Matematika 2 za kemičare

Rješenja pismenog ispita od 9. srpnja 2025.

Matea Čelar & Franka Miriam Brückler

1. (20) Linearan operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadan je svojim djelovanjem na bazi $f = \big(\underbrace{(1,0,-1)}_{f_1}, \underbrace{(1,0,1)}_{f_2}, \underbrace{(0,2,0)}_{f_3}\big)$:

$$Af_1 = (-1,1,-4), \qquad Af_2 = (5,3,6), \qquad Af_3 = (2,0,4)$$

(pri čemu su gornje koordinate dane s obzirom na kanonsku bazu).

(a) (5) Dokažite da je $f = (f_1, f_2, f_3)$ zaista baza prostora $\mathbb{R}^3$.

(b) (8) Odredite matricu operatora A u kanonskoj bazi.

(c) (7) Odredite vektor $v \in \mathbb{R}^3$ takav da je $Av = (1,-1,3)$ (s obzirom na kanonsku bazu).

Rješenje.

(a) Računamo rang matrice čiji stupci su elementi baze f:

$$r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Dakle, skup f se sastoji od tri linearno nezavisna vektora, pa je to baza za $\mathbb{R}^3$.

(b) Imamo $e_1 = (1,0,0) = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$, $e_2 = (0,1,0) = \frac{1}{2}f_3$ i $e_3 = (0,0,1) = \frac{1}{2}(f_2 - f_1)$. Stoga je

$$Ae_1 = A\left(\frac{1}{2}(f_1 + f_2)\right) = \frac{1}{2}Af_1 + \frac{1}{2}Af_2 = \frac{1}{2}(-1,1,-4) + \frac{1}{2}(5,3,6) = (2,2,1)$$

$$Ae_2 = A\left(\frac{1}{2}f_3\right) = \frac{1}{2}Af_3 = \frac{1}{2}(2,0,4) = (1,0,2)$$

$$Ae_3 = A\left(\frac{1}{2}(f_2 - f_1)\right) = \frac{1}{2}Af_2 - \frac{1}{2}Af_1 = \frac{1}{2}(5,3,6) - \frac{1}{2}(-1,1,-4) = (3,1,5).$$

Stoga je matrica operatora A u kanonskoj bazi

$$[A]_e = \begin{pmatrix} | & | & | \\ Ae_1 & Ae_2 & Ae_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(c) Ako matrica A ima inverz, onda je

$$Av = (1,-1,3) \iff A^{-1}Av = A^{-1}(1,-1,3) \iff v = A^{-1}(1,-1,3).$$

Izračunamo

$$[A^{-1}]_e = [A]_e^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 9 & -7 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

pa je

$$[v]_e = [A^{-1}]_e \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 9 & -7 & -4 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dakle, $v = (0,4,-1)$.

2. (20) Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y' + \operatorname{tg} t(y-t) = \sin 2t + 1.$$

Rješenje. Uvodimo supstituciju $u := y - t$; tada je $u' = y' - 1$, pa diferencijalna jednadžba prelazi u

$$u' + u \operatorname{tg} t = \sin 2t. \tag{1}$$

Pripadna homogena jednadžba je

$$u' + u \operatorname{tg} t = 0,$$

čije opće rješenje je

$$u = C \cos t, \quad C \in \mathbb{R}$$

(singularno rješenje $u = 0$ možemo uključiti u opće).

Rješenje jednadžbe (1) sada tražimo u obliku

$$u(t) = C(t) \cos t.$$

Uvrštavanjem u (1) dobivamo

$$C' \cos t - C \sin t + C \cos t \operatorname{tg} t = \sin 2t,$$

odnosno

$$C' \cos t = \sin 2t.$$

Odavde integriranjem dobivamo

$$C = -2 \cos t + D, \qquad D \in \mathbb{R}.$$

Dakle, opće rješenje jednadžbe (1) je

$$u = (D - 2\cos t)\cos t = D \cos t - 2\cos^2 t, \qquad D \in \mathbb{R}.$$

Rješenje polazne jednadžbe je tada

$$y = u + t = D\cos t - 2\cos^2 t + t, \qquad D \in \mathbb{R}.$$

3. (20) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = \cos x + y^2(1 + z) + z^2.$$

(a) (7) Odredite sve stacionarne točke i Hesseovu matricu funkcije f.

(b) (6) Za koje vrijednosti parametra c skup $S \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$S \ldots f(x, y, z) = c,$$

jest, a za koje nije ploha? Obrazložite svoj odgovor.

(c) (7) Odredite najmanju vrijednost koju funkcija f može postići na xy-ravnini. U kojim točkama se ona postiže?

Rješenje.

(a) Odredimo prve parcijalne derivacije funkcije f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -\sin x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y(1 + z) \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y^2 + 2z$$

Stacionarne točke su rješenja sustava

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ 2y(1 + z) = 0 \\ y^2 = -2z. \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe slijedi $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Iz druge jednadžbe slijedi $y = 0$ ili $z = -1$, pa uvrštavanjem u treću jednadžbu dobivamo da je skup svih stacionarnih točaka

$$\{(k\pi, 0, 0) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(k\pi, \sqrt{2}, -1) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(k\pi, -\sqrt{2}, -1) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Hesseova matrica je

$$(Hf)(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\cos x & 0 & 0 \\ 0 & 2(1 + z) & 2y \\ 0 & 2y & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Skup S je ploha ako i samo ako ne sadrži nijednu stacionarnu točku funkcije f. Za stacionarne točke imamo

$$f(k\pi, 0, 0) = \cos(k\pi) + 0 + 0 = \pm 1$$
$$f(k\pi, \sqrt{2}, -1) = \cos(k\pi) + 2 \cdot 0 + 1 = \pm 1 + 1$$
$$f(k\pi, -\sqrt{2}, -1) = \cos(k\pi) + 2 \cdot 0 + 1 = \pm 1 + 1$$

Dakle, skup S nije ploha za $c \in \{-1, 0, 1, 2\}$, a za sve ostale vrijednosti od c jest ploha.

(c) Na xy-ravnini vrijedi $z = 0$, pa imamo

$$f(x, y, 0) = \cos x + y^2 =: g(x, y).$$

Odredimo lokalne ekstreme funkcije g. Imamo

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\sin x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Stacionarne točke su $T_k = (k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Imamo

$$(Hg)(2l\pi, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad (Hg)((2l+1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dakle, točke $(2l\pi, 0)$ su sedlaste točke, a točke $((2l+1)\pi, 0)$ su točke lokalnog minimuma od g. Imamo $g((2l+1)\pi, 0) = -1$. Kako je $\cos x \geq -1$ i $y^2 \geq 0$, vrijedi $g(x, y) \geq -1$ za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prema tome, točke $((2l+1)\pi, 0)$ su točke globalnog minimuma od g i najmanja vrijednost koju f postiže na xy-ravnini je -1.

4. (20) Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^3$ skup zadan u Kartezijevim koordinatama s

$$S \ldots \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2y \\ 0 \leq z \leq 2. \end{cases}$$

(a) (10) Izrazite skup S u cilindričnim koordinatama.

(b) (10) Izračunajte integral $\displaystyle\int_S y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$.

Rješenje.

(a) Imamo

$$x^2 + y^2 \leq 2y \iff x^2 + y^2 - 2y + 1 \leq 1 \iff x^2 + (y-1)^2 \leq 1.$$

Dakle, zadani skup je valjak čije baze su krugovi sa središtem u $(0, 1)$ radijusa 1 u ravninama $z = 0$ i $z = 2$.

U cilindričnim koordinatama imamo

$$S \ldots \begin{cases} 0 \leq r \leq 2\sin\varphi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq z \leq 2. \end{cases}$$

(b) Traženi integral je

$$\int_S y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\sin\varphi} r \sin\varphi \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z = \frac{8}{3} \int_0^2 \int_0^\pi \sin^4\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z = 2\pi.$$