Matematika 1 za kemičare

Rješenje 5. zadatka od 19. lipnja 2024.

Zadatak. Kao jedan od osnovnih vjerojatnosnih modela u predviđanju rezultata nogometnih utakmica koristi se tzv. Poissonova razdioba. Prema istoj, vjerojatnost da će momčad koja prosječno daje $m \in \mathbb{R}$ pogodaka po utakmici, na sljedećoj utakmici u vremenu t (t ide od početka utakmice, $t = 0$, do kraja utakmice, $t = 1$, tj. kao jedinicu vremena uzimamo nepreciznu jedinicu ,,utakmica") dati točno n pogodaka računa se kao

$$p_n(t) = \exp(-m\,t) \cdot \frac{(m\,t)^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Danas popodne na EURO2024 susrest će se Hrvatska i Albanija. Hrvatska je u posljednjih godinu dana odigrala 13 utakmica na kojima je dala ukupno 23 pogotka (u regularnim dijelovima utakmica).

Koliko iznosi vjerojatnost da na poluvrijeme Hrvatska ode s najviše dva dana pogotka?[1] Skicirajte grafove funkcija p_n za Hrvatsku danas, za $n = 0, 1, 2, 3, 4$ (svih pet u istom pravokutnom koordinatnom sustavu). U kojem trenutku utakmice se za svaki od tih n postiže maksimalna vjerojatnost i koliko ona iznosi? Koji je najvjerojatniji broj pogodaka koje će dati Hrvatska danas? Nakon koliko vremena će postati vjerojatnije da će Hrvatska dati gol nego da neće?

Rješenje. Parametar m za Hrvatsku iznosi $m = \frac{23}{13} \approx 1{,}76923$.

Vjerojatnost da Hrvatska na poluvrijeme ($t = \frac{1}{2}$) ode s najviše dva (dakle, 0, 1 ili 2) dana pogotka je

$$p_0\left(\frac{1}{2}\right)+p_1\left(\frac{1}{2}\right)+p_2\left(\frac{1}{2}\right) = \exp\left(-m\cdot\frac{1}{2}\right)+\exp\left(-m\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot m\cdot\frac{1}{2}+\exp\left(-m\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{(m\,\frac{1}{2})^2}{2} =$$

$$= \exp\left(-\frac{m}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{m}{2}+\frac{m^2}{8}\right) = (\text{uvrsti } m = \frac{23}{13}) = \frac{3077}{1352}\exp\left(-\frac{23}{26}\right) \approx 93{,}965\,\%.$$

Domena svake od funkcija p_n je $[0, 1]$. Očigledno su te funkcije nenegativne, dakle su grafovi u prvom kvadrantu. Za $n > 0$ je $p_n(0) = 0$, a za $n = 0$ je $p_0(0) = 1$ (sigurno utakmica počinje bez pogotka). Funkcije su elementarne, dakle su neprekidne i nema smisla tražiti asimptote na danoj domeni. Stoga jedine dodatne informacije o grafovima daju derivacije (prva i druga) tih funkcija, pri čemu treba odvojiti slučaj $n = 0$ od ostalih n, jer je za $n = 0$ funkcija p_0 čista eksponencijalna funkcija: $p_0(t) = \exp(-m\,t) = (e^{-m})^t$ je eksponencijalna funkcija s bazom $e^{-m} \approx 0{,}170464$, dakle padajuća (i konveksna) od $p_0(0) = 1$ do $p_0(1) = 17{,}0464\,\%$. Za ostale n imamo

$$p_n'(t) = \frac{m^n}{n!}\left(\exp(-m\,t)\cdot t^n\right)' = \frac{m^n}{n!}\left(-m\exp(-m\,t)\cdot t^n + \exp(-m\,t)\,n\,t^{n-1}\right) =$$

$$= \exp(-m\,t)\,\frac{m^n}{n!}\left(n\,t^{n-1} - m\cdot t^n\right);$$

[1] Ako se neki događaji ne mogu istovremeno dogoditi, vjerojatnost da se bar jedan od njih dogodi računa se kao zbroj vjerojatnosti tih događaja.

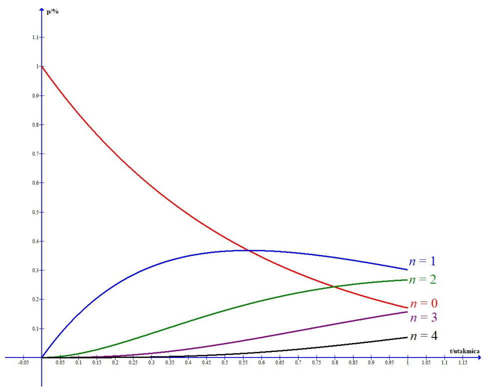
$$p_n''(t) = \ldots = \exp(-m\,t)\,\frac{m^n}{n!}\left(m^2 t^n - 2m\,n\,t^{n-1} + (n^2-n)\,t^{n-2}\right).$$

Odredimo stacionarne točke funkcija p_n:

$$p_n'(t) = 0 \Leftrightarrow \exp(-m\,t)\,\frac{m^n}{n!}\,t^{n-1}\,(n - m\cdot t) = 0 \quad (0 < t < 1) \qquad \Rightarrow t = \frac{n}{m}$$

Pritom je $\frac{n}{m}$ stacionarna točka samo ako je $n < m$ (u suprotnom nije u domeni), dakle samo za $n = 1$, a za $n > 2$ funkcije p_n nemaju stacionarnih točaka pa su rastuće od $p_n(0) = 1$ do $p_n(1) = \exp(-m)\cdot\frac{m^n}{n!}$ i $p_n\left(\frac{n}{m}\right)$ (što ima približnu vrijednost 2668 % za $n = 2$, približnu vrijednost 1573 % za $n = 3$ i približnu vrijednost 696 % za $n = 4$). Budući da je funkcija p_1 elementarna i neprekidna na $[0,1]$ znamo da postižu globalni minimum i maksimum i to po jednoj od točaka 0, 1 i $\frac{1}{m}$. Imamo $p_1(0) = 0$ (što je sigurno globalni minimum jer funkcije p_n nigdje nisu negativne), $p_1(1) \approx 30{,}16\,\%$. i $p_1(1/m) \approx 36{,}79\,\%$. Dakle, svaka od p_n postiže globalni maksimum na kraju utakmice (za $t = 1$), osim p_0, koja globalni maksimum 100 % postiže na početku (za $t = 0$) i p_1, koja globalni maksimum 36,79 % postiže u svojoj stacionarnoj točki $\frac{1}{m} = \frac{13}{23} \approx 0{,}565$ utakmice (dakle, ca. 6 minuta nakon poluvremena je najvjerojatnije da je Hrvatska dala točno 1 gol), a za bilo koji veći broj pogodaka maksimalna vjerojatnost (26,68 % za $n = 2$, 15,73 % za $n = 3$ i 6,96 % za $n = 4$) se postiže na kraju utakmice.

Razmatranjem konveksnosti i konkavnosti za $n = 1$, 2, 3 i 4, zaključujemo da grafovi izgledaju ovako:



Za ukupno najvjerojatniji broj pogodaka bitne su vjerojatnosti na kraju utakmice. Vjerojatnost da Hrvatska uopće ne da gol je $p_0(1) \approx 17{,}05\,\%$, vjerojatnost da dade točno jedan gol je $p_1(1) \approx 30{,}16\,\%$, vjerojatnost da dade točno dva gola je $p_2(1) \approx 26{,}68\,\%$, vjerojatnost da dade točno tri gola je $p_3(1) \approx 15{,}73\,\%$ i vjerojatnost da dade točno četiri gola je $p_4(1) \approx 6{,}96\,\%$. Dakle, najvjerojatniji ukupni broj golova za Hrvatsku je 1, a slijedi ga s malo manjom vjerojatnosti 2.

Za posljednje pitanje zanima nas (vidi gore sliku grafova) za koji t će biti $p_0(t) = p_1(t)$, tj. $\exp(-m\,t) = \exp(-m\,t)m\,t$, dakle $m\,t = 1$, odnosno $t = \frac{1}{m} = \frac{13}{23}$ utakmice, tj. točno u točki maksimuma od p_1 (ca. 6 minuta nakon poluvremena postaje vjerojatnije da je Hrvatska dala bar jedan gol nego da nije).

Matematika 2 za kemičare

Rješenje 5. zadatka od 19. lipnja 2024.

Zadatak. Kao jedan od osnovnih vjerojatnosnih modela u predviđanju rezultata nogometnih utakmica koristi se tzv. Poissonova razdioba. Radi se o nizu realnih brojeva $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definiranom formulom

$$p_n = \exp(-m) \cdot \frac{m^n}{n!}.$$

Pritom je $m \in \mathbb{R}$ konstanta koja predstavlja prosječni broj pogodaka koje promatrana momčad daje po jednoj utakmici. Ako utakmicu igraju momčadi s prosjecima od po m i m' pogodataka po utakmici, vjerojatnost rezultata $n : n'$ može se (uz neke dodatne pretpostavke koje ćemo ovdje zanemariti) „na prvu ruku“ (bez uzimanja u obzir prosjeka primljenih pogodaka i drugih podataka) procijeniti kao umnožak od p_n (s parametrom m) i $p_{n'}$ (s parametrom m'). Danas popodne na EURO2024 susrest će se Hrvatska i Albanija. Hrvatska je u posljednjih godinu dana odigrala 13 utakmica na kojima je dala ukupno 23 pogotka (u regularnim dijelovima utakmica). Albanija je isto u posljednjih godinu dana odigrala 13 utakmica, a na njima je dala ukupno 21 pogodak (u regularnim dijelovima utakmica). Podsjećamo, ako se neki događaji ne mogu istovremeno dogoditi, vjerojatnost da se bar jedan od njih dogodi računa se kao zbroj vjerojatnosti tih događaja.

1. (6) Dokažite da je Poissonova razdioba normirana, tj. da je $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ za svaki parametar m.
2. (6) Koja je vjerojatnost da Hrvatska danas dade 2 ili više pogodaka?
3. (8) Koja je vjerojatnost neodlučenog ishoda današnje utakmice?

Rješenje.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-m) \cdot \frac{m^n}{n!} = \exp(-m) \sum_{n=0}^{\infty} \cdot \frac{m^n}{n!} = \exp(-m) \cdot \exp(m) = 1.$
2. Tražena vjerojatnost je $p = 1 - p_0 - p_1 \left(= \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} p_n \right)$. Za Hrvatsku je $m = \frac{23}{13}$ pa je $p_0 = \exp(-23/13) \approx 17{,}0464\,\%$, $p_1 = \exp(-23/13) \cdot \frac{23}{13} \approx 30{,}159\,\%$, $p \approx 52{,}79\,\%$.
3. (8) Neodlučeni ishod znači da se postigao neki od rezultata $0:0$, $1:1$ i t.d., tj. $n : n'$ s $n = n'$. Dakle, vjerojatnost neodlučenog rezultata je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-23/13) \cdot \frac{(23/13)^n}{n!} \cdot \exp(-21/13) \cdot \frac{(21/13)^n}{n!} = \exp\left(-\frac{44}{13}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{483}{169}\right)^n.$$

Posljednja suma se ne može izračunati elementarnim tehnikama, ali možemo računati parcijalne sume sve dok nam se prvih nekoliko značajnih znamenki ne počne podudarati: $S_0 \approx 0{,}03389$, $S_1 \approx 0{,}13075$, $S_2 \approx 0{,}19996$, $S_3 \approx 0{,}13075$, $S_4 \approx 0{,}22913$, $S_5 \approx 0{,}22586$, $S_6 \approx 0{,}22630$. Dakle, vjerojatnost neodlučenog rezultata je otprilike $22{,}6\,\%$.