LINEARNA ALGEBRA 1

Prvi ispitni rok - 31. siječnja 2025.

ZADATAK 1

Neka je $U \leq M_3(\mathbb{R})$ vektorski potprostor realnih gornjetrokutastih matrica kojima su svi dijagonalni elementi međusobno jednaki.

(a) (8 bodova) Odredite dimenziju potprostora U te jednu njegovu bazu.

(b) (6 bodova) Odredite jedan direktni komplement od U u $M_3(\mathbb{R})$.

(c) (6 bodova) Neka je N dobiveni direktni komplement. Odredite rastav proizvoljne matrice
$A \in M_3(\mathbb{R})$ s obzirom na rastav $M_3(\mathbb{R}) = U \dotplus N$.

Rješenje:

(a) Neka je $A \in U$ proizvoljna matrica. Tada je:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{11} \end{bmatrix} = a_{11}(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + a_{12}E_{12} + a_{13}E_{13} + a_{23}E_{23}.$$

Lako se vidi da je skup $\{E_{11} + E_{22} + E_{33}, E_{12}, E_{13}, E_{23}\}$ linearno nezavisan, a to je i skup izvodnica za U, pa je to i baza za U. Slijedi da je $\dim U = 4$.

(b) Nadopunimo bazu za U do baze za $M_3(\mathbb{R})$, npr.

$$\{E_{11} + E_{22} + E_{33}, E_{12}, E_{13}, E_{23}, E_{11}, E_{22}, E_{21}, E_{31}, E_{32}\}.$$

Jedan mogući direktni komplement je $N = [\{E_{11}, E_{22}, E_{21}, E_{31}, E_{32}\}]$.

(c) Računamo:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{11} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{11} \end{bmatrix} \\ &= \alpha_1(E_{11} + E_{22} + E_{33}) + \alpha_2 E_{12} + \alpha_3 E_{13} + \alpha_4 E_{23} \\ &+ \beta_1 E_{11} + \beta_2 E_{22} + \beta_3 E_{21} + \beta_4 E_{31} + \beta_5 E_{32} \end{aligned}$$

Slijedi da je $\alpha_1 = a_{33}$, $\alpha_2 = a_{12}$, $\alpha_3 = a_{13}$, $\alpha_4 = a_{23}$, $\beta_1 = a_{11} - a_{33}$, $\beta_2 = a_{22} - a_{33}$, $\beta_3 = a_{21}$, $\beta_4 = a_{31}$, $\beta_5 = a_{32}$.

Dakle, $A_U = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{33} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$, $A_N = \begin{bmatrix} a_{11} - a_{33} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} - a_{33} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}$.

ZADATAK 2

(a) (10 bodova) Odredite parametar $t \in \mathbb{R}$ tako da u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ skup

$$W_t = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - t(x_1^2 + x_4^2) = 0\}$$

bude potprostor.

(b) (10 bodova) Ovisno o $t \in \mathbb{R}$ odredite $\dim [W_t]$.

Rješenje:

(a) Pretpostavimo da je $W_t \leq \mathbb{R}^4$. Kako se vektor $x = (1, 0, t-3, 0)$ nalazi u W_t, moralo bi vrijediti da je i $2x = (2, 0, 2t-6, 0) \in W_t$. No tada je $6 + 2t - 6 - 4t = 0$, odnosno $t = 0$.

Provjerimo da je $W_0 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ potprostor. Neka su $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in W_0$ proizvoljni i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada vrijedi

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3, \alpha x_4 + \beta y_4),$$

tj.

$$\begin{aligned} &3(\alpha x_1 + \beta y_1) - 2(\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) + (\alpha x_4 + \beta y_4) \\ &= \alpha \underbrace{(3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4)}_{=0,\text{ jer je } x \in W_0} + \beta \underbrace{(3y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4)}_{=0,\text{ jer je } y \in W_0} = 0. \end{aligned}$$

Dakle $\alpha x + \beta y \in W_0$ pa je $W_0 \leq \mathbb{R}^4$.

(b) Kako je W_0 potprostor, tada je $[W_0] = W_0$. Primijetimo da ako je $x \in W_0$, tada mora vrijediti

$$x_4 = -3x_1 + 2x_2 - x3,$$

pa je

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(1, 0, 0, -3) + x_2(0, 1, 0, 2) + x_3(0, 0, 1, -1).$$

Dakle, $\{(1, 0, 0, -3), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, -1)\}$ je baza za W_0, pa je $\dim[W_0] = \dim W_0 = 3$.

S druge strane, za $t \neq 0$ možemo naći 4 linearno nezavisna vektora koja su u W_t pa je $\dim[W_t] = 4$ (jer je $\dim \mathbb{R}^4 = 4$). Ti vektori su

$$\left(\frac{3}{t}, 0, 0, 0\right), \left(0, 0, 0, \frac{1}{t}\right), (0, 1, 2, 0), (1, 0, t-3, 0),\ t \neq 3,$$

odnosno

$$(1, 0, 0, 0), \left(0, 0, 0, \frac{1}{3}\right), (0, 1, 2, 0), (1, 1, 0, 0),\ t = 3.$$

ZADATAK 3

(a) (6 bodova) Odredite nepoznanicu x u matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & x & -1 & 2 \\ 2 & -1 & x & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ ako je poznato da je A ekvivalentna matrici $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

(b) (8 bodova) Dane su $A, B \in M_n$ te matrica $C \in M_{n,2n}$ u blok zapisu $C = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$. Dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom

(b1) $r(A) = n \implies r(C) = n$

(b2) $r(A) < n \implies r(C) < n$.

(c) (6 bodova) Neka su $A, B \in M_{mn}$ proizvoljne. Pokažite da je $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

Rješenje:

(a) Kako je $\{R_1^B, R_2^B\}$ očito linearno nezavisan skup, te je $R_3^B = 2R_1 - R_2^B$, vidimo da je $r(B) = 2$. S obzirom da su matrice ekvivalentne ako i samo ako su istog ranga, potrebno je odrediti x takav da je $r(A) = 2$. Standardnim načinom se dobije da je

$$r(A) = \begin{cases} 2, & x = 3 \\ 3, & x \neq 3 \end{cases},$$

pa zaključujemo da mora biti $x = 3$.

(b1) Ukoliko je $r(A) = n$, slijedi da stupci matrice A čine linearno nezavisan skup. Posebno, kako su oni ujedno i stupci matrice C, slijedi da je $r(C) \geq n$. S druge strane, zbog dimenzija je očito i $r(C) \leq n$, odakle slijedi $r(C) = n$.

(b2) Implikacija ne vrijedi: možemo uzeti $A = 0, B = I_n$; u tom slučaju je $r(A) = 0 < n$ no $r(C) = n$.

(c) Kako za stupce matrice $A + B$ očito imamo $S_j^{A+B} = S_j^A + S_j^B$, $j = 1, \ldots, n$, imamo

$$\{S_1^{A+B}, \ldots, S_n^{A+B}\} \subseteq [\{S_1^A, \ldots, S_n^A, S_1^B, \ldots, S_n^B\}] = [\{S_1^A, \ldots, S_n^A\}] + [\{S_1^B, \ldots, S_n^B\}].$$

Uzimanjem linearne ljuske u prethodnoj inkluziji te promatranjem dimenzija odmah slijedi tražena nejednakost.

ZADATAK 4

(a) (12 bodova) Izračunajte determinantu matrice $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ dane s

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i+j = n+1, \\ j, & \text{inače.} \end{cases}$$

(b) (8 bodova) Neka su $A, B \in M_n$ regularne. Pokažite da je $\widetilde{AB} = \widetilde{B}\widetilde{A}$.

Rješenje:

(a) Računamo

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & 1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 1 & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 1 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{dodamo } j\text{-tom} \\ \text{stupcu}}}{\overset{\text{I. stupac } \cdot(-j)}{=}}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -(n-1) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -(n-2) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -(n-3) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & -2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{po zadnjem retku}}{\overset{\text{Laplaceov razvoj}}{=}}$$

$$= (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(n-3) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{u trenutnim materijalima}}{\overset{\text{Zadatak 4.10.}}{=}}$$

$$= (-1)^{n+1}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-1)^{n-1}(n-1)! = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(n-1)!.$$

(b) Kako su A i B regularne, tada je i AB regularna. Stoga je

$$\widetilde{AB} = \det(AB)(AB)^{-1} \overset{\text{B-C}}{=} (\det A \cdot \det B) B^{-1} A^{-1} = \tilde{B}\tilde{A}.$$

ZADATAK 5

(a) (6 bodova) Neka je $A \in M_{2n+1}$ antisimetrična matrica (to jest, takva da je $A^T = -A$). Dokažite da je A singularna matrica.

(b) (14 bodova) Neka je $A \in M_{mn}, n \geq 2$, matrica ranga $n-1$, te neka su $S_1, S_2, \ldots, S_n$ njezini stupci. Ako je prvi stupac matrice A jednak sumi svih preostalih stupaca od A, odredite skup svih rješenja sustava $AX = S_1 - 2S_2$.

Rješenje:

(a) Iz $\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^{2n+1} \det A = -\det A$ slijedi $\det A = 0$, pa je A singularna.

(b) Znamo da je $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rješenje sustava $AX = B$ ako i samo ako je $B = x_1 S_1 + x_2 S_2 + \ldots + x_n S_n$. Odavde slijedi da je $(1, -2, 0, \ldots, 0)$ jedno partikularno rješenje sustava $AX = S_1 - 2S_2$. Također, zbog $S_1 = S_2 + \ldots + S_n$, to jest $S_1 - S_2 - \ldots - S_n = 0$, slijedi i da je $(1, -1, -1, \ldots, -1)$ jedno rješenje homogenog sustava $AX = 0$. Iz $r(A) = n - 1$ zaključujemo da je $\dim \Omega = n - (n-1) = 1$, pa je $\Omega = [\{(1, -1, \ldots, -1)\}]$. Sada je skup svih rješenja sustava $AX = S_1 - 2S_2$ jednak

$$\{1, -2, 0, \ldots, 0) + \lambda(1, -1, -1, \ldots, -1) : \lambda \in \mathbb{F}\}.$$