POGLAVLJE 4

Neprekidnost i limes funkcije

4.1. Limesi elementarnih funkcija

PRIMJER 4.1. Dokažimo po Cauchyjevoj definiciji da vrijedi

$$\lim_{x\to 2} x^3 = 8.$$

RJEŠENJE. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Tražimo $\delta > 0$ tako da za sve $x \in \mathbf{R}$ takve da je $|x-2| < \delta$ vrijedi $|x^3 - 8| < \epsilon$. Primijetimo

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4).$$

Za $x \in \mathbf{R}$ takav da je $|x-2| < \delta$ i $\delta \leq 1$ vrijedi

$$|x| = |x - 2 + 2| < |x-2| + 2 < \delta + 2 \leq 1 + 2 = 3$$

i

$$x^2 = (x-2+2)^2 = (x-2)^2 + 4(x-2) + 4 < \delta^2 + 4\delta + 4 \leq 1 + 4 + 4 = 9.$$

Dakle, korištenjem nejednakosti trokuta slijedi:

$$|x^3 - 8| = |(x-2)(x^2 + 2x + 4)| \leq \delta(|x^2| + |2x| + |4|) < \delta(9 + 6 + 4) = 19\delta.$$

Konačno, odabirom $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{19}\}$ slijedi $|x^3 - 8| < \epsilon$ i time je tvrdnja dokazana. $\square$

Na predavanju se dokažu sljedeći teoremi, analogni onima za limese nizova.

TEOREM 4.2 (Operacije s limesima). *Neka je $I \subseteq \mathbf{R}$ i $c \in I$ i neka su funkcije $f, g : I\backslash\{c\} \to \mathbf{R}$ takve da postoje limesi $\lim_{x\to c} f(x)$ i $\lim_{x\to c} g(x)$. Tada vrijedi*

(i) Za sve $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ vrijedi:

$$\lim_{x\to c}(\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \lim_{x\to c} f(x) + \mu \lim_{x\to c} g(x).$$

(ii) Vrijedi

$$\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x).$$

(iii) Ako je $g(x) \neq 0$ za sve $x \in I \setminus \{c\}$ i vrijedi $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0$, tada je

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$

Na predavanju se dokaže da sljedeći limesi postoje i izračuna im se vrijednost.

PROPOZICIJA 4.3. *Vrijedi*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

PROPOZICIJA 4.4. *Vrijedi*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Sljedeći teorem slijedi jednostavnom modifikacijom teorema o kompoziciji neprekidnih funkcija s predavanja (potrebno je samo zamijeniti pojam neprekidnosti sa postojanjem limesa i dokaz je identičan).

TEOREM 4.5. *Neka su $I, J \subseteq \mathbf{R}$ otvoreni intervali te neka je $c \in I$. Neka je $f : I \setminus \{c\} \to \mathbf{R}$ funkcija takva da postoji $l := \lim_{x\to c} f(x)$ te $f(I \setminus \{c\}) \subseteq J \setminus \{\ell\}$. Ako je $g : J \setminus \{\ell\} \to \mathbf{R}$ funkcija takva da postoji $\lim_{y\to l} g(y)$, tada vrijedi:*

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = \lim_{y\to l} g(y).$$

ZADATAK 4.6. Izračunajte limese sljedećih funkcija

(a) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2x-3)(3x+5)(4x-5)}{3x^3+x^2-x+1}$

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^2}{3x^2-x-4}$

(c) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{100x}{x^2-1}$

(d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

(e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+1}}$

(f) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-1}{x^2-8x+1}$

(g) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(h) $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)$

RJEŠENJE. Navedeni limesi se, kao i kod limesa nizova, riješe dijeljenjem brojnika i nazivnika sa vodećim članom. U slučaju limesa $x \to -\infty$, može se napraviti supstitucija $y = -x$, čime se limes svede na $y \to \infty$. $\square$

ZADATAK 4.7. Dokažite da vrijedi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

RJEŠENJE. Koristeći identitet za dvostruki kut $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t$, slijedi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2},$$

gdje posljednji zaključak slijedi primjenom teorema 4.5 najprije na kompoziciju funkcija $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ i $x \mapsto \frac{x}{2}$, uz propoziciju 4.3 te zatim kompozicijom funkcija $x \mapsto \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$ i $x \mapsto x^2$.

Drugi način. Množenjem brojnika i nazivnika početnog izraza sa $(1 + \cos x)$ slijedi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\cos x} = 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

gdje smo u zadnjem koraku koristili propoziciju 4.3 i neprekidnost kvadratne funkcije. $\square$

ZADATAK 4.8. Dokažite da vrijedi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

RJEŠENJE.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left| \begin{array}{c} y = \ln(1+x) \Leftrightarrow x = e^y - 1 \\ x \to 0 \implies y \to 0 \end{array} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = 1,$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz propozicije 4.4.

Formalno opravdanje. Neka je $f : (-1, \infty) \to \mathbf{R}$ funkcija zadana s $f(x) = \ln(1 + x)$. Funkcija f je neprekidna kao kompozicija neprekidnih funkcija $x \mapsto \ln x$ i $x \mapsto 1 + x$. Primijetimo sada da vrijedi $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ i

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{f(x)}{e^{f(x)} - 1}.$$

Koristeći propoziciju 4.4 znamo da je $\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ pa po teoremu 4.5, uz supstituciju $t = f(x)$ slijedi da desna strana konvergira k 1 pa zaključujemo da je i $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Napomena. Vidimo da se u nizu jednakosti u prvom redu rješenja teorem 4.5 koristi da zaključujemo da limesi postoje čitajući jednakosti unazad. Preciznije, posljednji limes postoji po propoziciji 4.4, zatim supstitucijom $x = e^y - 1$ slijedi $x \to 0$ pa po teoremu 4.5 slijedi da i prvi limes postoji i jednak je zadnjem. $\square$

Zadatak 4.9. Dokažite da vrijede sljedeći limesi.

(a) Neka je $a > 0$. Dokažite da vrijedi

$$\lim_{x\to\infty} (ax - \ln x) = +\infty$$

(b) Neka su $a, p > 0$. Dokažite da vrijedi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^{ax}} = 0$$

(c) Neka je $p > 0$. Dokažite da vrijedi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$

Rješenje. Na predavanju se dokaže da za svaki $x \geq 0$ vrijedi da je niz $\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)_n$ rastući i konvergira k e^x. To posebno znači da za svaki $x \geq 0$ i $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$e^x \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq \frac{x^n}{n^n} \quad (*).$$

(a) Logaritmiranjem nejednakosti $(*)$ slijedi da je $x \geq n \ln x - n \ln n$. Odaberemo li $n \in \mathbf{N}$ tako da je $\frac{2}{n} < a$, tada iz prethodnog izraza, podijeljenog sa n slijedi:

$$ax - \ln x > \frac{2}{n} x - \ln x \geq \frac{x}{n} - \ln n.$$

Konačno, kako je $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{n} = \infty$, slijedi tvrdnja zadatka.

(b) Korištenjem definicije $x^p := e^{p \ln x}$ slijedi

$$\frac{x^p}{e^{ax}} = e^{p \ln x - ax} = e^{p(\ln x - \frac{a}{p} x)}.$$

Iz nejednakosti $(*)$ za $n = 1$ slijedi da je $e^x \geq 1 + x$ pa je $\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$, ali odatle korištenjem identiteta $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ slijedi da je i $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$. Konačno, iz prethodnog podzadatka znamo da $\lim_{x\to\infty} (\ln x - \frac{a}{p} x) = -\infty$ pa korištenjem 4.5 slijedi da je traženi limes jednak 0.

(c) Iz prethodnog pozadatka slijedi da za svaki $p > 0$ vrijedi $\lim_{y\to\infty} \frac{y}{e^{py}} = 0$. Prema tome, supstitucijom $x = e^y$, iz teorema 4.5 slijedi

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^{p\ln x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p}.$$

□

Napomena. Iz prethodnog zadatka slijedi da svaka eksponencijalna funkcija raste asimptotski brže od svake potencije te da svaki korijen raste asimptotski brže od logaritma.

Zadatak 4.10. Dokažite da sljedeći limesi postoje i izračunajte ih

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(13x)}{\sin(21x)}$
(b) $\lim_{x\to +\infty} x \sin\frac{\pi}{x}$
(c) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$
(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$
(e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{1-2\cos x}$
(f) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{x})}{\sin(\pi x)}$
(g) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{\sin^2 x}$
(h) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x^3}$

Rješenje. (a) Dijeljenjem brojnika i nazivnika sa x i korištenjem 4.3 slijedi:

$$\frac{\sin(13x)}{\sin(21x)} = \frac{13}{21} \cdot \underbrace{\frac{\sin(13x)}{13x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{21x}{\sin(21x)}}_{\to 1} \to \frac{13}{21}.$$

(b) Primijetimo da je $x \sin\frac{\pi}{x} = \pi \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}}$. Kako je $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi}{x} = 0$, korištenjem 4.3 i 4.5 slijedi da je limes jednak π.

(c)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)} = \left| \begin{array}{c} y = x-1 \\ x\to 1 \implies y \to 0 \end{array} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(\pi(y+1))}{\sin(3\pi(y+1))} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(\pi y)}{\sin(3\pi y)} = \frac{1}{3}$$

(d) Supstitucija $y = \arcsin x$.

(e) Koristeći adicijske formule i formule razlike kosinusa: $\cos a - \cos b = 2\sin(\frac{b-a}{2})\sin(\frac{b+a}{2})$ slijedi

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{1-2\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin(x-\frac{\pi}{3})}{2(\cos\frac{\pi}{3} - \cos x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{2\sin(\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2})\sin(\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2})}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{2\sin(\frac{y}{2})\sin(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{3})} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{\sin(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{3})} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(f)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{x})}{\sin(\pi x)} = \left| \begin{array}{c} y = x-1 \\ x\to 1 \implies y \to 0 \end{array} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(\pi\sqrt{1+y})}{\sin(\pi(1+y))} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(\pi(\sqrt{1+y}-1))}{\sin(\pi y)}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin(\frac{\pi y}{\sqrt{1+y}+1})}{\frac{\pi y}{\sqrt{1+y}+1}} \cdot \frac{\frac{\pi y}{\sqrt{1+y}+1}}{\pi y} \frac{\pi y}{\sin(\pi y)} = \frac{1}{2}$$

(g)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}(1-\cos x) \cdot \frac{1-\cos(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} = 0$$

(h) Vrijedi $0 \leq |\frac{\sin x}{x^3}| \leq \frac{1}{x^3}$ i $\frac{1}{x^3} \to 0$ za $x \to \infty$. Po teoremu o sendviču limes je jednak 0.

$\square$

ZADATAK 4.11. Neka je $n \in \mathbf{N}$. Dokažite da sljedeći limes postoji i izračunajte ga.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x \cos(2x) \cdots \cos(nx)}{x^2}.$$

RJEŠENJE. Po prethodno raspisanom limesu vrijedi $I(1) = \frac{1}{2}$. Pretpostavimo da limes postoji za neki $n \in \mathbf{N}$, označimo ga sa $I(n)$.

Koristimo trik teleskopiranja:

$$\frac{1 - \cos x \cdots \cos((n+1)x)}{x^2} = \frac{1 - \cos x \cos(2x) \cdots \cos(nx)}{x^2} + \cos x \cdots \cos(nx) \cdot \frac{1 - \cos((n+1)x)}{x^2}$$

Prvi član prethodnog zbroja konvergira k $I(n)$, dok drugi član konvergira k $\frac{(n+1)^2}{2}$. Dakle, vrijedi

$$I(n+1) = I(n) + \frac{(n+1)^2}{2}.$$

Teleskopiranjem navedenog izraza slijedi:

$$I(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$$

$\square$

Napomena. Česti pogrešan pokušaj rješenja prethodnog zadatka prethodnog oblika je sljedeći:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x \cdot \overbrace{\cos(2x)}^{\to 1} \cdots \overbrace{\cos(nx)}^{\to 1}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Međutim, **takvo zaključivanje je krivo**! Naime, limese ne smijemo puštati parcijalno, tj. tako da uvrstimo graničnu vrijednost samo za neki dio izraza. Elementarniji primjer na kojem se vidi da je takvo zaključivanje očito krivo je sljedeći limes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - (1-x)(1-2x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x - 2x^2}{x} = \lim_{x\to 0} 3 - 2x = 3,$$

u kojem bismo, korištenjem $(1-x) \to 0$ za $x \to 0$, dobili sljedeći pogrešan rezultat

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - (1-x)(1-2x)}{x} \text{„} = \text{''} \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1-2x)}{x} = 2.$$

ZADATAK 4.12. Dokažite da sljedeći limesi postoje i izračunajte ih

(a) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$

(b) $\lim_{x\to \pm\infty} \left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}$

(d) $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x}, a \in \mathbf{R}$

(e) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

(f) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

RJEŠENJE. (a)

$$\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x} = \exp\left((1+x)\ln\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)\right).$$

Puštanjem $x \to 0$, korištenjem propozicije 4.3 slijedi da $\frac{\sin 2x}{x} \to 2$ pa po neprekidnosti funkcije ln slijedi $\ln(\frac{\sin 2x}{x}) \to \ln 2$ te konačno po limesu produkta slijedi da izraz unutar funkcije exp konvergira k $\ln 2$. Konačno, po neprekidnosti funkcije exp slijedi da je limes jednak $\exp(\ln 2) = 2$.

(b)

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2} &= \exp\left(x^2 \ln\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)\right) = \exp\left(x^2 \ln\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)\right)\right)\\ &= \exp\left(x^2\left(-\ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

Po neprekidnosti funkcije ln slijedi da $\ln(1+\frac{1}{2x+1}) \to 0$ pa koristeći limes zbroja i činjenicu da je $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$, po limesu produkta slijedi da izraz unutar funkcije exp konvergira k $-\infty$ pa slijedi da je traženi limes jednak 0 po teoremu 4.5.

(c)

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} = \exp\left(x \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) = \exp\left(x \ln\left(1-\frac{2}{x+1}\right)\right) = \exp\left(\frac{-2x}{x+1}\cdot\frac{\ln(1-\frac{2}{x+1})}{\frac{-2}{x+1}}\right)$$

Koristeći limes 4.8 i limes produkta slijedi da izraz izraz u zagradi konvergira k -2 pa po neprekidnosti funkcije exp slijedi da je limes jednak e^{-2}.

(d)

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = e^{x\cdot\ln(1+\frac{a}{x})} = \exp\left(a\cdot\frac{\ln(1+\frac{a}{x})}{\frac{a}{x}}\right) \to e^a.$$

(e)

$$(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(\cos x)}{x}\right) = \exp\left(\frac{\ln(1+\cos x - 1)}{\cos x - 1}\cdot\frac{\cos x - 1}{x^2}\cdot x\right).$$

Koristeći limese 4.8 i 4.7 slijedi da izraz unutar funkcije exp konvergira k 0 pa je po teoremu 4.5 limes jednak 1.

(f)

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\right) = \exp\left(\frac{\ln(1+\cos x - 1)}{\cos x - 1}\cdot\frac{\cos x - 1}{x^2}\right).$$

Koristeći limese 4.8 i 4.7 slijedi da izraz unutar funkcije exp konvergira k $-\frac{1}{2}$ pa je po teoremu 4.5 limes jednak $e^{-\frac{1}{2}}$.

□

4.2. Neprekidnost funkcija

Zadatak 4.13. Dokažite da svaki polinom neparnog stupnja ima barem jednu realnu nultočku.

Rješenje. Neka je $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$. Polinom je neprekidna funkcija kao zbroj neprekidnih funkcija. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $a_n > 0$ (u suprotnom promotrimo $-p$). Po limesu produkta slijedi:

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n \left(1 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-n}\right) = \pm\infty\cdot 1 = \pm\infty.$$

Prema tome, po definiciji limesa postoje $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 < x_2$ takvi da je $p(x_1) < 0$ i $p(x_2) > 0$. Međutim, tada po teoremu o međuvrijednosti slijedi da postoji $x_0 \in (x_1, x_2)$ takav da je $p(x_0) = 0$. □

ZADATAK 4.14. Neka je $f : [0, 1] \to [0, 1]$ neprekidna funkcija. Dokažite da f ima fiksnu točku, tj. da postoji $x_0 \in [0, 1]$ takav da je $f(x_0) = x_0$.

RJEŠENJE. Promotrimo funkciju $g(x) = f(x) - x$, koja je neprekidna. Budući da je $f([0, 1]) \subseteq [0, 1]$, slijedi $g(0) = f(0) \geq 0$ i $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Po teoremu o međuvrijednosti slijedi da postoji $x_0 \in [0, 1]$ takav da je $g(x_0) = 0$, odnosno $f(x_0) = x_0$. □

Napomena. Neprekidna funkcija $f\colon (0, 1) \to (0, 1)$ ne mora imati fiksnu točku, npr. $f(x) = x^2$.

ZADATAK 4.15. Neka je $I \subseteq \mathbf{R}$ interval te $f\colon I \to \mathbf{R}$ neprekidna injekcija. Dokažite da je f strogo monotona.

RJEŠENJE. Pretpostavimo suprotno. Kako f nije strogo rastuća, postoje $x_1 < x_2$ u I takvi da $f(x_1) \geq f(x_2)$. Kako f nije strogo padajuća, postoje $y_1 < y_2$ u I takvi da $f(y_1) \leq f(y_2)$. Promotrimo funkciju

$$g\colon [0, 1] \to \mathbf{R}, \quad g(t) = f((1 - t)x_1 + ty_1) - f((1 - t)x_2 + ty_2).$$

Ona je neprekidna te zadovoljava $g(0) = f(x_1) - f(x_2) \geq 0$, $g(1) = f(y_1) - f(y_2) \leq 0$. Dakle, po teoremu o međuvrijednosti postoji $t_0 \in [0, 1]$ takav da $g(t_0) = 0$. No, primijetimo da vrijedi

$$(1 - t_0)x_1 + t_0y_1 < (1 - t_0)x_2 + t_0y_2$$

pa iz injektivnosti funkcije f slijedi

$$g(t_0) = f((1 - t_0)x_1 + t_0y_1) - f((1 - t_0)x_2 + t_0y_2) \neq 0,$$

što je kontradikcija. □

Napomena. Alternativno, iz pretpostavke da f nije strogo monotona moguće je dokazati da postoje $x < y < z$ u I takvi da $f(x), f(z) < f(y)$ ili $f(x), f(z) > f(y)$. Tada možemo dobiti kontradikciju s injektivnošću funkcije f koristeći teorem o međuvrijednosti. Na primjer, u prvom slučaju, ako je $f(x) < f(z)$, tada možemo zaključiti da postoji $w \in (x, y)$ takav da $f(w) = f(z)$. Slično, ako je $f(x) > f(z)$, tada postoji $w \in (y, z)$ takav da $f(w) = f(x)$.

Napomena. Bez pretpostavke o neprekidnosti funkcije f, tvrdnja ne mora vrijediti, npr.

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{ako } x \neq 0 \\ 0 & \text{ako } x = 0 \end{cases}$$

je injekcija, ali nije strogo monotona.

ZADATAK 4.16. Odredite sve neprekidne funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

RJEŠENJE. Uvrštavanjem $x = y = 0$ slijedi $f(0) = 2f(0)$ pa zaključujemo da je $f(0) = 0$. Uvrštavanjem $y = nx$ za $n \in \mathbf{N}$ induktivno slijedi

$$f(nx) = nf(x) \quad (*).$$

Označimo li sada $a := f(1)$, slijedi $f(n) = nf(1) = an$ za sve $n \in \mathbf{N}$. Nadalje, slijedi i $a = f(1) = f(n \cdot \frac{1}{n}) = nf(\frac{1}{n})$ pa zaključujemo da je i $f(\frac{1}{n}) = \frac{a}{n}$ za sve $n \in \mathbf{N}$. Konačno, ponovnim uvrštavanjem $x = \frac{m}{n}$ za $m, n \in \mathbf{N}$ slijedi $f(\frac{m}{n}) = a\frac{m}{n}$ za sve $m, n \in \mathbf{N}$. Konačno, uvrštavanjem $y = -x$ slijedi $f(-x) = -f(x)$ pa zaključujemo da za sve $q \in \mathbf{Q}$ vrijedi $f(q) = aq$. Konačno, ako je $x \in \mathbf{R}$, tada postoji niz $q_n \in \mathbf{Q}$ takav da je $\lim_{n\to\infty} q_n = x$ pa zbog toga što je f neprekidna slijedi

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} aq_n = ax.$$

Dakle, zaključujemo da su sva rješenja dane jednadžbe određena s $f(x) = ax$ za neki $a \in \mathbf{R}$. $\square$

ZADATAK 4.17. Neka je $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ zadana s $f(x) = x \ln x$.

(a) Dokažite da je f bijekcija.
(b) Dokažite da za $y > e$ vrijedi $f^{-1}(y) > \frac{y}{\ln y}$.
(c) Odredite $\lim_{y\to\infty} \frac{f^{-1}(y)}{\frac{y}{\ln y}}$.

RJEŠENJE. (a) Funkcija f je neprekidna kao produkt neprekidnih funkcija $x \mapsto x$ i $x \mapsto \ln x$. Također, kako su obje navedene funkcije strogo rastuće i nenegativne na $[1, \infty)$, slijedi da je i njihov produkt strogo rastuća funkcija pa zaključujemo da je f injekcija.

Primijetimo da je $f(1) = 0$. Neka je sada $y \in (0, \infty)$ proizvoljan. Zbog toga što je $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, slijedi da postoji $x' > 0$ takav da za sve $x \geq x'$ vrijedi $f(x) \geq y + 1$. Konačno, zbog toga što je $y \in [0, y + 1] \subseteq [0, f(x')]$, po teoremu o međuvrijednosti slijedi da postoji $x \in (1, \infty)$ takav da je $f(x) = y$. Dakle, f je bijekcija.

(b) Označimo sa x_0 rješenje $f(x_0) = y$. Tada vrijedi

$$x_0 = \frac{y}{\ln x_0}.$$

Ako dokažemo da je $x_0 < y$, tada će, uz opservaciju $\ln x_0 > 0$, vrijediti

$$x_0 = \frac{y}{\ln x_0} > \frac{y}{\ln y}.$$

Kada bi vrijedilo $x_0 \geq y$, zbog toga što f rastuća funkcija, tada bismo imali

$$x_0 \ln x_0 \geq y \ln y > y \ln e = y,$$

što je kontradikcija s definicijom x_0. Dakle, tvrdnja je dokazana.

(c) Kako je f strogo rastuća bijekcija, za svaki $y > 0$ postoji $x > 1$ takav da je $y = f(x)$ i vrijedi da $x \to \infty$ za $y \to \infty$. Tada je

$$\frac{f^{-1}(y)}{\frac{y}{\ln y}} = \frac{x}{\frac{x \ln x}{\ln x + \ln \ln x}} = \frac{\ln x + \ln \ln x}{\ln x} = 1 + \frac{\ln \ln x}{\ln x}.$$

Posljednji izraz na desnoj strani, zbog $\lim_{z\to\infty} \frac{\ln z}{z} = 1$ i teorema 4.5 uz supstituciju $z = \ln x$ konvergira k 1 kad $x \to \infty$ pa po teoremu 4.5, uz supstituciju $x = f^{-1}(y)$, slijedi da je i traženi limes jednak 1.

□

ZADATAK 4.18. Neka je $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija takva da $f(0) = f(1) = 0$. Pretpostavimo da za svaki $x \in (0,1)$ postoji $\delta > 0$ takav da $x-\delta, x+\delta \in (0,1)$ te

$$f(x) = \frac{f(x-\delta)+f(x+\delta)}{2}.$$

Dokažite da je $f(x) = 0$ za svaki $x \in [0,1]$.

RJEŠENJE. Kako je f neprekidna funkcija na ograničenom zatvorenom intervalu, ona je ograničena te postiže svoje granice. Dakle, postoji

$$M := \sup\{f(x) \mid x \in [0,1]\}$$

te je skup $S := \{x \in [0,1] \mid f(x) = M\}$ neprazan. Promotrimo $x_0 := \inf S \in [0,1]$. Tvrdimo da vrijedi $x_0 \in S$. Zaista, postoji niz (a_n) u S takav da $a_n \to x_0$ pa kako je f neprekidna, slijedi $f(a_n) \to f(x_0)$. Dakle, $f(x_0) = M$, odnosno $x_0 \in S$. Nadalje, tvrdimo da $x_0 \in \{0,1\}$. Zaista, ako to ne vrijedi, tada postoji $\delta > 0$ takav da $x_0-\delta, x_0+\delta \in (0,1)$ te

$$f(x_0) = \frac{f(x_0-\delta)+f(x_0+\delta)}{2}.$$

Zbog $x_0 - \delta < x_0$ slijedi $x_0 - \delta \notin S$, stoga $f(x_0-\delta) < M$. Također vrijedi $f(x_0+\delta) \le M$ pa iz gornje nejednakosti dobivamo $f(x_0) < M$, što je kontradikcija. Dakle, mora biti $x_0 \in \{0,1\}$, što znači da je $M = 0$. Međutim, potpuno analognim argumentom možemo dobiti da vrijedi

$$\inf\{f(x) \mid x \in [0,1]\} = 0.$$

Dakle, za svaki $x \in [0,1]$ imamo $f(x) = 0$, što je i trebalo dokazati. □

4.3. Zadaci za vježbu

ZADATAK 4.19. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x-1}{\sqrt{x^2+2}}$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ (c) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

ZADATAK 4.20. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3x+4}{\sqrt{x^4+1}}$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2)^3(x^2+x+1)^2}{x^7-50x+5}$ (c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}$

ZADATAK 4.21. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)^3}{2x^3-x+2}$ (b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7}$ (c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x^2+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

ZADATAK 4.22. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-x-1}{x^2-1}$ (b) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ (c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1}$, $m,n\in\mathbf{N}$

Zadatak 4.23. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{1+\sqrt[5]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ (c) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

Zadatak 4.24. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin ax}{\sin bx}$, $a,b\in\mathbf{R}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x^2}$ (c) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{1-x^3}$

Zadatak 4.25. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to -1} \frac{\sin(x+1)}{x+1}$ (b) $\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}$, $a\in\mathbf{R}$ (c) $\lim_{x\to +\infty} x\sin\frac{\pi}{x}$

Zadatak 4.26. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$ (b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin x}{x}$ (c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x-\frac{1}{\cos x}\right)$

Zadatak 4.27. Odredite parametar a takav da funkcija $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ zadana s

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x<0,\\ a, & x=0,\\ 1+x, & x>0\end{cases}$$

bude neprekidna.

Zadatak 4.28. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$ (c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

Zadatak 4.29. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{\cos\alpha x}-\sqrt[n]{\cos\beta x}}{x^2}$, $m\in\mathbf{N}$, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ (c) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x+\sin x}}$
(b) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1+\cot^2 x}$

Zadatak 4.30. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x\sin x}}$ (b) $\lim_{x\to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1-2\sin^2 x\right)}{x^2}$

Zadatak 4.31. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\pi x)}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{6^x-5^x}{4^x-3^x}$

Zadatak 4.32. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$ (b) $\lim_{x\to 3} \frac{2-\sqrt[3]{x+5}}{2-\sqrt{x+1}}$ (c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+3x}}{x-\sqrt{x^3+2x^2}}$

Zadatak 4.33. Je li moguće proširiti funkciju $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}$ do neprekidne funkcije na $\mathbf{R}$?

Zadatak 4.34. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{2^x-\cos x}{3^x-\cos x}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{tg} x-\sin x)^2}{x^2 \operatorname{tg}(x^2)\sin(x^2)}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos 2x}\cdot e^{2x^2}-1}{\ln(1+2x)\cdot\ln(1+2\arcsin x)}$

Zadatak 4.35. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x}-e^{\arcsin x}}{1-\cos^3 x}$ (b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$ (c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\sin x\right)\right)^{\cot(\pi\sin x)}$

Zadatak 4.36. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x^2+3x+4)}{\ln(x^2+2x+3)}\right)^{x\ln x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2}$, $\quad a\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbf{Z}\right\}$

Zadatak 4.37. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ (b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x)+\ln(a-x)-2\ln a}{x^2}$

Zadatak 4.38. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{x^2}-1\right)^2+x^2}{\cos x-1-\frac{1}{2}x^2}$ (b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+5^x)}{\ln(1+3^x)}$

Zadatak 4.39. Može li se funkcija

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$$

proširiti do neprekidne funkcije na $[-1,\infty\rangle$?

Zadatak 4.40. Neka je $f\colon \langle -a,a\rangle\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$ funkcija. Koje su od sljedećih tvrdnje nužno istinite:

(a) $\lim_{x\to 0} f(x) = l \iff \lim_{x\to 0} f(\sin x) = l$;

(b) $\lim_{x\to 0} f(x) = l \iff \lim_{x\to 0} f(|x|) = l$?

Dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom!

Zadatak 4.41. Dokažite da za $f : \langle -a,a\rangle\setminus\{0\}\to\langle 0,+\infty\rangle$ takvu da je

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right) = 2$$

vrijedi

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

Dokažite da limes $\lim_{x\to 0} f(x)$ ne mora postojati ukoliko 2 zamijenimo sa 3.

Zadatak 4.42. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to 0} \sin x \cos \frac{1}{x^2}$ (b) $\lim_{x\to 2} \lfloor x \rfloor \sin(\pi x)$ (c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2^{-x}+\sin x}{2^{-x}+\cos x}$

ZADATAK 4.43. Izračunajte limese:

(a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\lfloor 3e^x \rfloor + 2}{\lfloor 2e^x \rfloor + 1}$ (b) $\lim_{x\to 0} x^3 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ (c) $\lim_{x\to +\infty} \left[\sin\left(x + \frac{1}{x}\right) - \sin x\right]$

ZADATAK 4.44. Dokažite da jednadžba $x^5 - 3x - 1 = 0$ ima barem jedno rješenje na segmentu $[1, 2]$.

ZADATAK 4.45. Neka su $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ neprekidne funkcije takve da je $f \circ g = g \circ f$. Dokažite da postoji $x_0 \in [0, 1]$ takav da je $f(x_0) = g(x_0)$.

ZADATAK 4.46. Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ neprekidna i periodična s periodom $\tau > 0$. Dokažite da postoji $x_0 \in \mathbf{R}$ takav da je $f(x_0 + \frac{\tau}{2}) = f(x_0)$.

ZADATAK 4.47. Neka je $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija. Dokažite da postoje $x, y \in [0, 2]$ takvi da je

$$y - x = 1 \quad \text{i} \quad f(y) - f(x) = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$

ZADATAK 4.48. Nađite sve neprekidne funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da je $f(1) > 0$ i da za sve $x, y \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y).$$

ZADATAK 4.49. Neka su $a_1, \ldots, a_n > 0$ pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a_1^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

ZADATAK 4.50. Trkač je pretrčao ravnu stazu duljine 6 kilometara za 30 minuta. Dokažite da je postojao dio staze duljine 1 kilometar koji je pretrčao za točno 5 minuta.

ZADATAK 4.51. Planinar se počeo penjati na planinu u 8:00 i stigao je na vrh planine u 20:00. Sljedeći dan krenuo se spuštati istim putem u 8:00 i spustio se s planine u 20:00. Dokažite da je postojalo mjesto na putu na kojem se u oba dana nalazio u isto vrijeme.

ZADATAK 4.52. Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ neprekidna padajuća funkcija. Dokažite da sustav jednadžbi:

$$y = f(x), \quad z = f(y), \quad x = f(z)$$

ima jedinstveno rješenje $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

ZADATAK 4.53 (*). Neka je $a \in (0, 1)$ realan broj i $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkcija koja zadovoljava uvjete:

(i) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$,
(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(ax)}{x} = 0$.

Dokažite da vrijedi $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.