

**MATEMATIČKA ANALIZA 1**

Četvrti ispit – 7. 9. 2026.

Na kolokviju/ispitu nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje i službenog šalabahtera.

**Zadatak 1.** (30 bodova)

(a) (15 bodova) Odredite supremum i infimum skupa

$$S = \left\{ \frac{4nx - 2x + 3n + 2}{(n + 3)(2x + 1)} : n \in \mathbb{N}, x \geq 0 \right\}.$$

(b) (15 bodova) Neka je niz  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zadan rekurzivno:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{4a_n + 3}{a_n + 2}.$$

Ako postoji, odredite limes niza.

# MATEMATIČKA ANALIZA 1

Četvrti ispit – 7. 9. 2026.

**Zadatak 2.** (20 bodova)

(a) (10 bodova) Odredite limes superior i limes inferior niza

$$a_n = \left(2 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^{n \cos(n\pi)}.$$

(b) (10 bodova) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + \cos n}{2^{-n} + n^{10/3}}$$

*Uputa za rješenje.* (a) Promatramo podnizove ovisno o ostatku pri dijeljenju indeksa  $n$  s 4 ( $k \in \mathbb{N}_0$ ):

- Za  $n = 4k$ :  $\sin(2k\pi) = 0$ ,  $\cos(4k\pi) = 1$ . Slijedi  $a_{4k} = 2^{4k} \rightarrow +\infty$ .
- Za  $n = 4k + 1$ :  $\sin(2k\pi + \pi/2) = 1$ ,  $\cos((4k + 1)\pi) = -1$ . Slijedi  $a_{4k+1} = 3^{-(4k+1)} \rightarrow 0$ .
- Za  $n = 4k + 2$ :  $\sin(2k\pi + \pi) = 0$ ,  $\cos((4k + 2)\pi) = 1$ . Slijedi  $a_{4k+2} = 2^{4k+2} \rightarrow +\infty$ .
- Za  $n = 4k + 3$ :  $\sin(2k\pi + 3\pi/2) = -1$ ,  $\cos((4k + 3)\pi) = -1$ . Slijedi  $a_{4k+3} = 1^{-(4k+3)} = 1 \rightarrow 1$ .

Skup svih djelomičnih limesa (gomilišta) niza je  $\{0, 1, +\infty\}$ . Slijedi:  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

(b) Koristimo granični kriterij u usporedbi s redom  $\sum b_n = \sum \frac{n}{n^{10/3}} = \sum \frac{1}{n^{7/3}}$ . Neka je  $a_n = \frac{2n + \cos n}{2^{-n} + n^{10/3}}$ . Tražimo limes kvocijenta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(2 + \frac{\cos n}{n})}{n^{10/3}(\frac{2^{-n}}{n^{10/3}} + 1)}}{\frac{1}{n^{7/3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{\cos n}{n}}{\frac{2^{-n}}{n^{10/3}} + 1} = \frac{2 + 0}{0 + 1} = 2 \in \langle 0, +\infty \rangle.$$

Budući da referentni  $p$ -red  $\sum \frac{1}{n^{7/3}}$  konvergira ( $p = \frac{7}{3} > 1$ ), po graničnom kriteriju konvergira i zadani red.

△

# MATEMATIČKA ANALIZA 1

Četvrti ispit – 7. 9. 2026.

**Zadatak 3.** (25 bodova)

(a) (15 bodova) Odredite limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x+5x^2} - (1+x)}{x \arcsin x}.$$

(b) (10 bodova) Odredite limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - x + 3} \right)^{\frac{1}{2x-1}}.$$

*Uputa za rješenje.* (a) Limes ima neodređeni oblik  $\frac{0}{0}$ . Množimo brojnik i nazivnik konjugiranim izrazom  $\sqrt{1+2x+5x^2} + (1+x)$ :

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x+5x^2 - (1+x)^2}{x \arcsin x \cdot (\sqrt{1+2x+5x^2} + (1+x))}$$

Nakon kvadriranja  $(1+x)^2 = 1+2x+x^2$  i oduzimanja, dobivamo:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x \arcsin x \cdot (\sqrt{1+2x+5x^2} + 1+x)}$$

Kratimo  $x$  te koristimo tablični limes  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = 1$ :

$$L = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+2x+5x^2} + 1+x} = 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1}+1} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

(b) Uvrštavanjem dobivamo neodređeni oblik  $1^\infty$ . Bazu transformiramo izdvajanjem broja 1:

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - x + 3} = \frac{(x^2 - x + 3) + 3x}{x^2 - x + 3} = 1 + \frac{3x}{x^2 - x + 3}$$

Cijeli izraz svodimo na tablični limes za  $e$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( 1 + \frac{3x}{x^2 - x + 3} \right)^{\frac{x^2 - x + 3}{3x}} \right]^{\frac{3x}{(x^2 - x + 3)(2x - 1)}}$$

Baza u uglatoj zagradi teži u  $e$ . Za eksponent računamo zasebno:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{(x^2 - x + 3)(2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2 - x + 3} \cdot \frac{x}{2x - 1} = \frac{3}{3} \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Konačni rezultat je  $e^{\frac{1}{\ln 2}}$ .

**MATEMATIČKA ANALIZA 1**

Četvrti ispit – 7. 9. 2026.

**Zadatak 4.** (25 bodova)

- (a) (15 bodova) Definirajte limes niza realnih brojeva i dokažite da ako je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , da je onda  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ .
- (b) (10 bodova) Dokažite po definiciji da je funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana s  $f(x) = 2x - 1$  neprekidna u svakoj točki  $x_0 \in \mathbb{R}$ .