Linearna algebra 2

5. zadaća

1. Za linearan operator $A: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ vrijedi

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Odredite djelovanje operatora A na proizvoljnu matricu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ te njegov matrični prikaz u standardnoj bazi. Odredite jezgru i sliku operatora A.

2. Za linearan operator $B: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ vrijedi

$$B(x) = -x + 3x^2, \quad B\left(3 + x - 8x^2\right) = 19, \quad B\left(x^2\right) = -2 + x.$$

Odredite djelovanje operatora B na proizvoljan polinom $a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2$. Odredite rang i defekt operatora. Je li operator B injekcija?

3. Nađite neki operator $C : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ takav da mu jezgra sadrži vektor $(1, -i, 0)$, a slika vektore $(0, 1, -1)$ i $(2i, 1, 0)$. Je li takav operator jedinstven? Za nađeni operator odredite njegov matrični prikaz u bazi

$$\{(1, 0, 1), (i, 1, 0), (0, -i, 1)\}.$$

4. Neka je $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ linearan operator takav da je $D(p) = p'' - p$. Odredite jezgru operatora D^2.

U sljedećim zadacima na $V^3(O)$ je dana ortonormirana baza $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ koja određuje koordinatne osi x, y, z.

5. Za sljedeća preslikavanja na $V^3(O)$ pokažite da su linearni operatori te odredite njihovo djelovanje na opći vektor $\vec{v} \in V^3(O)$ i matrični prikaz u ortonormiranoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$:

   a) zrcaljenje s obzirom na yz-ravninu,
   b) zrcaljenje s obzirom na y-os,
   c) ortogonalna projekcija na xz-ravninu.

6. Dani su linearni operatori A, B, C, D na prostoru $V^3(O)$, pri čemu je

   A zrcaljenje s obzirom na ravninu razapetu vektorima $\vec{i}-\vec{k}, \vec{i}+\vec{k}$,

   B ortogonalna projekcija na pravac razapet vektorom $2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$,

   C rotacija oko z-osi za $30°$,

   D ortogonalna projekcija na ravninu razapetu vektorima $\vec{i}-2\vec{j}, -\vec{j}+\vec{k}$.

   Za operatore $A \circ B, D \circ B, C \circ A$ i D^2 odredite njihovo djelovanje na proizvoljan vektor iz $V^3(O)$, baze za sliku i jezgru te rang i defekt. Možemo li za zadane kompozicije odrediti rang i defekt geometrijskim zaključivanjem, bez određivanja djelovanja operatora?

7. Neka je $T : V^3(O) \longrightarrow V^3(O)$ operator koji vektor prvo rotira oko x-osi za $45°$, a potom ga projicira na pravac razapet vektorom $2\vec{k}-\vec{j}$. Pokažite da je T linearan operator te odredite njegov matrični prikaz u ortonormiranoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

8. Neka je $S : V^3(O) \longrightarrow V^3(O)$ operator koji vektor prvo projicira na ravninu $x - 3y = 0$, a potom ga zrcali s obzirom na pravac $y = z$ u yz-ravnini.

   a) Operatoru S odredite matrični prikaz u ortonormiranoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

   b) Odredite $\operatorname{Im} S$ i $\operatorname{Ker} S$.

   c) Je li S injekcija?

   d) Odredite nalaze li se vektori $\vec{v} = 3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}, \vec{w} = 3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ u $\operatorname{Im} S$, te ako se nalaze nađite sve vektore takve da je $\vec{v}$, odnosno $\vec{w}$ slika tog vektora.

9. Odredite linearan operator $R : V^3(O) \longrightarrow V^3(O)$ takav da je $R(\vec{k}) = -\vec{i}$ i R je zrcaljenje s obzirom na neku ravninu.