Linearna algebra 2

6. zadaća

1. Postoji li monomorfizam/epimorfizam/izomorfizam:

   a) $A : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$
   b) $B : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^3$
   c) $C : V^3(O) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$
   d) $D : \mathbb{C}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^n$, za neki $n \in \mathbb{N}$,
   e) $E : \mathbb{C}^3_{\mathbb{R}} \to S_3(\mathbb{R})$, pri čemu je $S_3(\mathbb{R})$ potprostor simetričnih matrica u $M_3(\mathbb{R})$.

   Ako postoji, navedite primjer jednog takvog, u suprotnom dokažite da takav ne postoji.

2. U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ odredite rang i defekt te po jednu bazu za sliku i jezgru sljedećih operatora:

   a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad A(x, y, z) = (x - \lambda y, x + y + (1 - 2\lambda)z, -y - z)$,
   b) $B : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \quad B\left(a + bt + ct^2\right) = 2c + (\lambda a + b + 2c)t + (a + \lambda b)t^2$,
   c) $C : M_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}), \quad C \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a - c + ((\lambda + 2)b + c - d)t + (b + c + \lambda d)t^2$.

   Za svaki od operatora provjerite je li on monomorfizam/epimorfizam/izomorfizam. Ako je operator izomorfizam, odredite mu inverz.

3. Odredite djelovanje ortogonalne projekcije $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na proizvoljnom vektoru $x \in \mathbb{R}^3$ ako je $\operatorname{Ker} P = [\{(1, 0, 1), (-3, 1, 0)\}]$.

4. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor, $M \leq V$ te $P : V \longrightarrow M$ preslikavanje koje svakom vektoru iz V pridružuje njegovu ortogonalnu projekciju na potprostor M.

   a) Dokažite da vrijedi $P \circ P = P$.
   b) Dokažite da vrijedi $\|Px\| \leq \|x\|$, pri čemu je $\|\cdot\|$ norma inducirana skalarnim produktom na danom unitarnom prostoru. Za koje vektore se postiže jednakost?

5. Za sljedeće linearne operatore ispitajte vrijedi li relacija oblika $P^2 = P$:

   a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, -2x_1 - x_2, x_3)$,

b) $B : V^3(O) \to V^3(O)$
$B(v) = \left(\frac{13}{15}x - \frac{1}{15}y - \frac{1}{3}z\right)\vec{i} + \left(-\frac{1}{15}x + \frac{29}{30}y - \frac{1}{6}z\right)\vec{j} + \left(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{6}y + \frac{1}{6}z\right)\vec{k}$

Je li neki od tih operatora ortogonalna projekcija na svoju sliku?

(Uputa: što vrijedi za sliku i jezgru ortogonalne projekcije?)