Alg. strukture – prvi kolokvij - rješenja i bodovanje
02. svibnja 2023.

1. *Neka je* $\mathbb{Q}_+ = \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$, *skup svih pozitivnih racionalnih brojeva. Na skupu* $S = \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ *definirajmo operaciju množenja*

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2, x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2).$$

Koja je od sljedećih struktura $(S, *)$: *grupoid, polugrupa, monoid, grupa? Je li operacija* $*$ *komutativna?*

• **(1 bod)** Ako su $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Q}_+$, onda su i x_1x_2 i $x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2$ također iz $\mathbb{Q}_+$; i zato je $(S, *)$ grupoid.

• **(3 boda)** Za $(x_i, y_i) \in S$, gdje je $i = 1, 2, 3$, imamo

$$\begin{aligned}\big((x_1, y_1) * (x_2, y_2)\big) * (x_3, y_3) &= (x_1x_2, x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2) * (x_3, y_3)\\ &= \big((x_1x_2)x_3, (x_1x_2)y_3 + (x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2)(x_3 + y_3)\big),\end{aligned}$$

i analogno

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) * \big((x_2, y_2) * (x_3, y_3)\big) &= (x_1, y_1) * (x_2x_3, x_2y_3 + y_2x_3 + y_2y_3)\\ &= \big(x_1(x_2x_3), y_1(x_2x_3) + (x_1 + y_1)(x_2y_3 + y_2x_3 + y_2y_3)\big).\end{aligned}$$

Budući imamo jednakost

$$(x_1x_2)y_3 + (x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2)(x_3 + y_3) = y_1(x_2x_3) + (x_1 + y_1)(x_2y_3 + y_2x_3 + y_2y_3),$$

Zaključujemo da je operacija $*$ asocijativna; i zato je $(S, *)$ polugrupa.

• **(3 boda)** Pitamo se da li postoji neki $(e, f) \in S$ takav da je posebno

$$(x, y) * (e, f) = (xe, xf + ye + yf) = (\mathbf{?}) = (x, y),$$

za svaki $(x, y) \in S$? Ali iz $xe = x$ i $xf + ye + yf = y$ odmah dobivamo da bi moralo biti $(e, f) = (1, 0)$. No $(1, 0)$ NIJE iz S (jer $0 \notin \mathbb{Q}_+$), i onda zaključujemo da $(S, *)$ NIJE monoid. Jasno, onda nije niti grupa.

• **(1 bod)** Treba provjeriti da je operacija $*$ komutativna.

---

2. *Definirajmo preslikavanje* $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ *s* $\phi(x, y) = (3^x y, 1/y^2)$. *(Ovdje je* $\mathbb{R}_+$ *standardna multiplikativna grupa pozitivnih realnih brojeva.) Je li* ϕ *homomorfizam grupa? Ako da, izračunajte mu jezgru i utvrdite je li to epimorfizam.*

Napomena. Operaciju množenja na produktu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ označimo s $\bullet$, a operaciju množenja na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ s $*$.

• **(3 boda)** Za $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ imamo

$$\begin{aligned}\phi\big((x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2)\big) &= \phi(x_1 + x_2, y_1y_2) = \big(3^{x_1+x_2}y_1y_2, 1/(y_1y_2)^2\big)\\ &= \big(3^{x_1}y_1, 1/y_1^2\big) * \big(3^{x_2}y_2, 1/y_2^2\big) = \phi(x_1, y_1) * \phi(x_2, y_2).\end{aligned}$$

Zaključak: ϕ je homomorfizam grupa.

• **(2 boda)** Jer je $(1,1)$ neutral u grupi $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, jezgra od ϕ je

$$\ker \phi = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid \phi(x,y) = (3^x y, 1/y^2) = (1,1)\}.$$

Sada iz sustava jednadžbi $3^x y = 1$ i $1/y^2 = 1$ odmah dobivamo da je nužno $y = 1$ i $x = 0$. Tojest, jezgra $\ker \phi = \{(0,1)\}$ je trivijalna; i zato je ϕ monomorfizam.

• **(3 boda)** Da bismo vidjeli je li ϕ epimorfizam treba provjeriti da li za proizvoljan $(a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ postoji neki $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ takav da je

$$\phi(x,y) = (3^x y, 1/y^2) = (\mathbf{?}) = (a,b).$$

Ali posebno iz $1/y^2 = b$ imamo $y = 1/\sqrt{b} \in \mathbb{R}_+$. I onda iz $3^x y = 3^x/\sqrt{b} = a$ dobivamo da je $x = \log_3(a\sqrt{b}) \in \mathbb{R}$. Zaključak: ϕ je epimorfizam.

---

3. *Neka je S skup svih 3×3 regularnih realnih matrica oblika* $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ *i neka je T skup svih 3×3 regularnih realnih matrica oblika* $\begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Jesu li S i T grupe s obzirom na standardnu operaciju množenja matrica? Ako da, je li T normalna podgrupa od S?*

• **(3 boda)** Za matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$ iz S je $AB = \begin{pmatrix} ax & ay+bz & 0 \\ 0 & cz & 0 \\ 0 & 0 & dt \end{pmatrix}$ očito regularna matrica (jer $acd, xzt \neq 0$, pa je i $(ax)(cz)(dt) \neq 0$) iz S.

Ako za jediničnu 3×3 matricu I stavimo $AB = I$, onda iz gore dobivenog lako slijedi da je inverz

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/(ac) & 0 \\ 0 & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 1/d \end{pmatrix},$$

i to je također matrica iz S. Kako je očito $S \subseteq \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, po *kriteriju podgrupe* zaključujemo da je S podgrupa od $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

• **(2 boda)** Iz gornjeg računa za S se odmah vidi da je i T također podgrupa od $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$. Štoviše je $T \leq S$, podgrupa. (Potrebne detalje treba napisati!)

• **(3 boda)** Za matricu A kao gore, izračunatu njoj inverznu matricu i bilo koju matricu $N = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & 1/x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in T$ računamo

$$ANA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & 1/x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a & -b/(ac) & 0 \\ 0 & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 1/d \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} x & * & 0 \\ 0 & 1/x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

gdje je $*$ neki realan broj (koji nas ne zanima!). Kako je očito $ANA^{-1} \in T$, zaključujemo da je $T \trianglelefteq S$, normalna podgrupa.

---

4. *Neka je grupa* $G = \mathbb{Z}/102\mathbb{Z}$ *i neka je* H *njezina podgrupa generirana elementima* $\overline{12} = 12 + 102\mathbb{Z}$ *i* $\overline{42} = 42 + 102\mathbb{Z}$.

   (a) *Odredite koji su svi mogući redovi elemenata iz grupe* H *i za svaki takav red* n *nađite sve elemente* $x \in H$ *čiji je red upravo* n.

   (b) *Postoji li neka podgrupa* B *grupe* $A = \mathbb{Z}/180\mathbb{Z}$ *takva da su kvocijentne grupe* G/H *i* A/B *međusobno izomorfne? Ako da, precizno odredite neku takvu podgrupu* B.

(a) **(2 boda)** Računamo cikličku grupu

$$\langle\overline{12}\rangle = \{\overline{12}, \overline{24}, \overline{36}, \overline{48}, \overline{60}, \overline{72}, \overline{84}, \overline{96}, \overline{6}, \overline{18}, \overline{30}, \overline{42}, \overline{54}, \overline{66}, \overline{78}, \overline{90}, \overline{0}\}.$$

Jer je $\overline{42} \in \langle\overline{12}\rangle$, zaključujemo da je

$$H = \langle\overline{12}, \overline{42}\rangle = \langle\overline{12}\rangle.$$

(2 boda) Budući je red $|H| = 17$ (prim broj), a po Lagrangeovom teoremu znamo da je za svaki $x \in H$ red toga elementa $\mathrm{ord}(x) := |\langle x\rangle|$ djelitelj od 17, zaključujemo da su jedini redovi elemenata 1 i 17. Jasno, jedini element reda 1 je neutral $\overline{0}$, dok su svi ostali elemnti iz H reda 17.

(b) **(1 bod)** Primijetimo da je red $|G/H| = |G|/|H| = 102/17 = 6$. I po *teoremu o strukturi cikličkih grupa* znamo da je G/H ciklička grupa, reda 6; tj., $G/H \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

(3 boda) U A definirajmo (cikličku) podgrupu $B := \langle\overline{6}\rangle$. Jer je $180/6 = 30$, očito je red $|B| = 30$. Slijedi da je red $|A/B| = 180/30 = 6$. Dakle i A/B je ciklička grupa reda 6. Jasno, onda su kvocijentne grupe G/H i A/B izomorfne.

---

5. (a) *Jesu li grupe* $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times$ *i* $\mathbb{C}^\times$ *izomorfne?*

   (b) *Jesu li grupe* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *i* $\mathbb{R}^\times$ *izomorfne?*

(a) **(4 boda)** Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times \to \mathbb{C}^\times$ neki izomorfizam. Posebno, jer "homo. šalje neutral u neutral", imamo $f(1,1) = 1$. Sada primijetimo da za međusobno različite elemente $a = (1,-1)$, $b = (-1,1)$ i $c = (-1,-1)$ iz $\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times$ imamo $a^2 = b^2 = c^2 = (1,1)$. I onda slijedi da su $f(a)$, $f(b)$ i $f(c)$ tri međusobno različita elementa (jer je f injekcija) iz $\mathbb{C}^\times$ takva da (jer je f homomorfizam)

$$f(a)^2 = f(b)^2 = f(c)^2 = f(1,1) = 1.$$

No ne postoje tri međusobno različita kompleksna broja čiji su kvadrati jednaki 1. Zaključak: Dane grupe NISU izomorfne.

(b) Tvrdimo da su dane grupe izomorfne. Naime za $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ definirajmo preslikavanje $\alpha : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^\times$ s $\alpha(r, \overline{0}) := r$ i $\alpha(r, \overline{1}) = -r$, za svaki $r \in \mathbb{R}^\times$. Sada naprimjer imamo

$$\alpha\big((x,\overline{0}) \cdot (y,\overline{1})\big) = \alpha(xy, \overline{0} + \overline{1}) = \alpha(xy, \overline{1}) = -xy = x(-y) = \alpha(x,\overline{0})\alpha(y,\overline{1}).$$

Analogni argumenti (imamo ukupno 4, zapravo 3, mogućnosti) pokazuju da je α homomorfizam grupa. No iz same definicije toga preslikavanja je jasno da je ono surjekcija, te da je i injekcija.