Alg. strukture – prvi kratki test - rješenja i bodovanje
17. travnja 2023.

1. Neka je S skup svih 2×2 matrica oblika $\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}$, gdje je $x\in\mathbb{R}$ i $y>0$ racionalan broj. Ako na S gledamo standardnu operaciju množenja matrica, koju od sljedećih struktura imamo na S: grupoid, polugrupu, monoid, grupu?

Rješenje.

• **(0.5 boda)** Za $A_i = \begin{pmatrix}1 & x_i\\ 0 & y_i\end{pmatrix}\in S$, gdje su $i=1,2$ te $x_i\in\mathbb{R}$ i $y_i\in\mathbb{Q}_+ := \mathbb{Q}\cap(0,+\infty)$ imamo

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix}1 & x_1\\ 0 & y_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x_2\\ 0 & y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & x_2+x_1y_2\\ 0 & y_1y_2\end{pmatrix}.$$

Jasno: $x_2+x_1y_2\in\mathbb{R}$ i $y_1y_2\in\mathbb{Q}_+$, i zato imamo $A_1A_2\in S$. Slijedi: S je grupoid.

• **(0.5 boda)** Znamo iz linearne algebre da je množenje matrica asocijativna operacija, pa je S i polugrupa.

Primijetimo da je $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ iz S, i I je neutral za množenje; i zato je S monoid.

• **(0.5 boda)** Za $A=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & y\end{pmatrix}\in S$ je inverzna matrica $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -x/y\\ 0 & 1/y\end{pmatrix}$ očito iz S (jer je $-x/y\in\mathbb{R}$ i $1/y\in\mathbb{Q}_+$). Zaključak: S je grupa.

---

2. Na Kartezijevom produktu $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}^\times$, aditivne grupe $\mathbb{Z}$ i multiplikativne grupe $\mathbb{Q}^\times$, definiramo preslikavanje $f:\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}^\times\to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ s

$$f(z,q) := \begin{pmatrix}2^zq & 0\\ 0 & 2^z/q\end{pmatrix}.$$

Je li f homomorfizam grupa? Ako da, je li f monomorfizam?

Rješenje.

• **(1 bod)** Za parove $(z_i,q_i)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}^\times$, gdje je $i=1,2$, imamo

$$f\big((z_1,q_1)(z_2,q_2)\big) = f(z_1+z_2,q_1q_2) = \begin{pmatrix}2^{z_1+z_2}q_1q_2 & 0\\ 0 & 2^{z_1+z_2}/(q_1q_2)\end{pmatrix}.$$

S druge strane, imamo i jednakost

$$f(z_1,q_1)f(z_2,q_2) = \begin{pmatrix}2^{z_1}q_1 & 0\\ 0 & 2^{z_1}/q_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{z_2}q_2 & 0\\ 0 & 2^{z_2}/q_2\end{pmatrix} = (!!) = \begin{pmatrix}2^{z_1}2^{z_2}q_1q_2 & 0\\ 0 & 2^{z_1}2^{z_2}/(q_1q_2)\end{pmatrix}.$$

Kako su sada desne strane gornjih jednakosti jednake, jednake su i lijeve strane; tj., imamo da je f homomorfizam grupa.

• **(1 bod)** Izračunajmo jezgru $\ker f = \{(z,q)\mid 2^zq=1=2^z/q\}$. Ali množenjem jednakosti $2^zq=1$ i $2^z/q=1$ dobivamo $2^{2z}=1$, i onda je nužno $z=0$. Sada iz $1=2^zq=2^0q=q$ zaključujemo da je jezgra $\ker f=\{(0,1)\}$, trivijalna. Na predavanjima smo pokazali da je homomorfizam injektivan ako i samo ako mu je jezgra trivijalna. Zaključak: f je monomorfizam.

---

3. Neka je G grupa svih bijektivnih preslikavanja $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, uz operaciju kompozicije. (Tj., G je grupa permutacija $\mathrm{Perm}(\mathbb{Z})$.) Definirajmo W kao skup svih bijekcija $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takvih da imamo jednakost apsolutnih vrijednosti $|\alpha(x)| = |x|$ za svaki $x \in \mathbb{Z}$. Je li W podgrupa od G?

   Rješenje.

   • **(0.5 boda)** Neka su $\alpha, \beta \in W$. Onda za proizvoljan $x \in \mathbb{Z}$ imamo:

   $$|(\alpha\circ\beta)(x)| = |\alpha(\beta(x)| = (\text{ jer } |\alpha(y)| = |y|,\ \forall y \in \mathbb{Z}) = |\beta(x)| = (\text{ jer } |\beta(x)| = |x|,\ \forall x \in \mathbb{Z}) = |x|.$$

   Zaključak: $\alpha \circ \beta \in W$; tj., W je zatvoren za kompoziciju.

   • **(1 bod)** Ako je $\alpha \in W$, onda za proizvoljan $x \in \mathbb{Z}$ imamo da je $y := \alpha(x) \in \mathbb{Z}$; i onda $\alpha^{-1}(y) = x$. Sada imamo:

   $$|\alpha^{-1}(y)| = |x| = (\text{jer } \alpha \in W, \text{ pa je } |x| = |\alpha(x)|) = |\alpha(x)| = |y|.$$

   Zaključak: $\alpha^{-1} \in W$; tj., W je zatvoren za invertiranje. Po definiciji podgrupe, zaključujemo da je W podgrupa od G.

Napomena. Gore napisana rješenja zadataka su zapravo "minimalne verzije" rješenja. Tojest, barem toliko komentara i argumenata treba napisati, prilikom rješavanja zadataka u kolokvijima i testovima, kako bi se rješenje smatralo korektnim. Što više preciznossti i detalja, to bolje!