Alg. strukture – drugi kratki test - rješenja i bodovanje
19. lipnja 2023.

1. *Neka je $\mathcal{S}$ skup svih matrica $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ iz prstena $M_2(\mathbb{Z})$ takvih da su matrični koeficijenti y i z te razlika $x-t$ parni brojevi. Je li $\mathcal{S}$ prsten s jedinicom uz standardne operacije zbrajanja i množenja matrica?*

   Rješenje.

   • **(0.5 boda)** Za matrice $A_i = \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ z_i & t_i \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$, gdje su $i = 1, 2$, imamo da je razlika

$$A_1 - A_2 = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 & t_1 - t_2 \end{pmatrix}.$$

   Kako su y_1, y_2 te z_1, z_2 parni, onda su i razlike $y_1 - y_2$ i $z_1 - z_2$ također parni brojevi. Nadalje i razlika $(x_1 - x_2) - (t_1 - t_2) = (x_1 - t_1) - (x_2 - t_2)$ je paran broj, kao razlika dva parna broja. Zaključujemo da je $A_1 - A_2 \in \mathcal{S}$, i zato je $(\mathcal{S}, +)$ aditivna podgrupa od $(M_2(\mathbb{Z}), +)$.

   • **(1 bod)** Za matrice A_1 i A_2 kao gore imamo da je produkt

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} x_1x_2 + y_1z_2 & x_1y_2 + y_1t_2 \\ z_1x_2 + t_1z_2 & z_1y_2 + t_1t_2 \end{pmatrix}.$$

   Jasno, elementi na mjestima $(1, 2)$ i $(2, 1)$ u A_1A_2 su parni, jer su y_1, y_2 te z_1, z_2 parni. Nadalje, imamo da je i razlika

$$x_1x_2 + y_1z_2 - (z_1y_2 + t_1t_2) = (x_1 - t_1)x_2 + t_1(x_2 - t_2) + y_1z_2 - z_1y_2$$

   također paran broj, kao zbroj tri parna broja. Zaključujemo da je $A_1A_2 \in \mathcal{S}$, i zato je $\mathcal{S}$ zatvoren za množenje (tj., $\mathcal{S}$ je podpolugrupa multiplikativne polugrupe $M_2(\mathbb{Z})$).

   • **(0.5 boda)** Još primijetimo da je jedinična matrica $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$, jer je $1 - 1 = 0$ paran broj. Kao zaključak, po "kriteriju potprstena", imamo da je $\mathcal{S}$ potprsten s jedinicom u prstenu $M_2(\mathbb{Z})$. I kao takav je i sam prsten s jedinicom.

---

2. *Definirajmo preslikavanje $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ s*

$$\varphi\big(p(X)\big) := \big(p(-1) + 2\mathbb{Z}, p(\sqrt{2} + 1)\big).$$

   Je li φ homomorfizam prstena s jedinicom? Ako da, je li φ i monomorfizam?

   Rješenje.

   • **(1 bod)** Imajući na umu kako se množi u kvocijentnom prstenu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, za polinome $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}[X]$ računamo

$$\begin{aligned} \varphi(p_1p_2) &= \big((p_1p_2)(-1) + 2\mathbb{Z}, (p_1p_2)(\sqrt{2} + 1)\big) \\ &= \big((p_1(-1) + 2\mathbb{Z})(p_2(-1) + 2\mathbb{Z}), p_1(\sqrt{2} + 1)p_2(\sqrt{2} + 1)\big) = \varphi(p_1)\varphi(p_2). \end{aligned}$$

   Sasvim analogno vidimo i da vrijedi $\varphi(p_1 + p_2) = \cdots = \varphi(p_1) + \varphi(p_2)$. I još za polinom konstante $\mathbf{1}(X) = 1$, koji je jedinica u prstenu $\mathbb{Z}[X]$, imamo da je

$$\varphi(\mathbf{1}) = \big(\mathbf{1}(-1) + 2\mathbb{Z}, \mathbf{1}(\sqrt{2} + 1)\big) = (1 + 2\mathbb{Z}, 1),$$

što je jedinica u prstenu koji je kodomena od φ. Zaključak: φ je homo. prstena s jedinicom.

• **(1 bod)** Pokažimo da je jezgra

$$\ker \varphi = \{p \in \mathbb{Z}[X] \mid \ p(-1) \text{ je paran i } p(\sqrt{2}) = 0\}$$

netrivijalna; i zato φ nije monomorfizam. U tu svrhu stavimo $x = \sqrt{2}+1$. Onda je $(x-1)^2 = 2$; tj. x je nultočka kvadratnog polinoma $p_0(X) = X^2 - 2X - 1$. Još primijetimo da je $p_0(-1) = 2$, paran broj. Zaključak: Nenul polinom p_0 je u jezgri $\ker \varphi$.

Napomena. Nekoliko studenata je nekorektno zaključilo da φ nije monomorfizam tako što su "pokazali" da polinom $p(X) = (X-1)(X-(\sqrt{2}+1))$ "jest u jezgri". Tu je problem u činjenici da taj $p(X)$ NIJE u $\mathbb{Z}[X]$; pa, jasno, ne može biti ni u jezgri!

---

3. *Neka je $C \subseteq \mathbb{Z}[X]$ skup koji sadrži nul-polinom i sve cjelobrojne polinome $f \in \mathbb{Z}[X]$ kojima je stupanj $\deg f \geq 2$ te vrijedi $f(2) = 0$. Je li C ideal u prstenu $\mathbb{Z}[X]$?*

Rješenje.

• **(1 bod)** Skup C nije ideal, jer čak nije niti potprsten od $\mathbb{Z}[X]$. Da to vidimo, uzmimo naprimjer polinome $f = f(X) = (X-2)(X+1)$ i $g = g(X) = (X-2)X$, oba stupnja 2 koji imaju broj 2 kao nultočku; tj., imamo da su $f, g \in C$. Ali njihova razlika $f - g = X - 2$ je polinom stupnja 1, pa nije element iz C. Znači, $(C, +)$ nije aditivna grupa.

Napomena. U ovom zadatku se dobivalo 1 bod samo za korektno argumentiran zaključak da C nije potprsten od $\mathbb{Z}[X]$, pa onda ne može biti niti ideal.

Napomena. Gore napisana rješenja pokazuju korektan način pisanja istih, kako u testu tako i u kolokviju. Što više preciznosti i detalja, to bolje!