

RJEŠENJA-BODOVANJE: Alg. Strukture – prvi test (05.11.2025.)

!!! Niže dana rješenja zadataka su napisana na način kako bi uvijek trebalo rješavati zadatke na testovima, kolokvijima i pisanim ispitima. Posebno treba voditi računa da napisana argumentacija bude precizna, jasna i nedvosmislena. Poželjno je pisati komentare koji pojašnjavaju račune i/ili danu argumentaciju. Isto tako treba korektno koristiti matematičku notaciju. (Posebno nemali broj studenata stavlja znakove $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ “kako im se sviđa”, ili ih uopće ne stavlja kada je to potrebno.) I treba pisati čitko, s dovoljno velikim slovima. (Posebno su kod dosta studenata indeksi za slova varijabli ili nepoznanica ili nekih mat. veličina presitna i nečitljiva!) Treba pisati “odozgo prema dolje na listu papira”, a ne “početi na vrhu, nastaviti na dnu i završiti argumentaciju u sredini”.

Posebne napomene: (1) Asocijativnost standardnog množenja matrica u zadatcima NE treba pokazivati, jer to je nešto što se smatra dobro poznatom činjenicom iz Lin. algebre 1 i 2. (Provjeravanjem asoc. nepotrebno se gubi vrijeme!); (2) Bilo bi korisno da se “napamet” nauči kako izgleda inverz 2×2 regularne matrice i da se postane vješt u eventualnoj potrebi računanja inverza nekih (jednostavnijih) matrica redova 3×3 ; (3) Vezano uz gore rečeno, ukoliko onaj tko boduje zadatak nije u stanju sa sigurnošću pročitati što piše na listu papira na kojem se rješava zadatak, to se boduje kao da toga nema ili da je krivo napisano. (I “studentovo rješenje toga problema” nije u tome da će se na eventualnim uvidima post festum “objašnjavati što piše, ili je trebalo pisati, u tomu što bi trebalo biti rješenje zadatka”.) (4) Napomena vezana uz drugi zadatak: puno studenata nije provjeravalo je li preslikavanje dobro definirano. Zatim, ako se jezgra želi opisati kao podgrupa, riječ je o grupi $3\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, a ne samo $3\mathbb{Z}$: naime, beskonačna grupa $3\mathbb{Z}$ ne može biti podgrupa konačne grupe $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

1. Neka je W skup svih matrica $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ iz $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ takvih da je $a + b = c + d$. Je li W grupa s obzirom na standardno množenje matrica?

Rješenje. _____

(0.5 boda) Ako sa $(\star)$ označimo jednakost $a + b = c + d$, onda za $A \in W$ kao u zadatku je inverz $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Budući je jednakost $d + (-b) = (-c) + a$ očito ekvivalentna jednakosti $(\star)$, zaključujemo da je $A^{-1} \in W$.

(1 bod) Za $A \in W$ kao gore i $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in W$ je $AB = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix}$. Imamo

$$(ax + bz) + (ay + bt) = (cx + dz) + (cy + dt) \iff a(x + y) + b(z + t) = c(x + y) + d(z + t)$$

što je dalje ekvivalentno (jer $B \in W \iff \omega := x + y = z + t$) s $(a + b)\omega = (c + d)\omega$. Ali posljednja jednakost vrijedi zbog $(\star)$. Zaključujemo da je $AB \in W$; i onda po definicije podgrupe imamo $W \leq \text{SL}_2(\mathbb{C})$.

2. Je li sa $f : \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $f(k+12\mathbb{Z}) := 2k+3\mathbb{Z}$, dobro definiran homomorfizam grupa? Ako da, izračunajte jezgru od f te utvrdite je li f epimorfizam.

Rješenje. _____

(0.5 boda) Za $k, \ell \in \mathbb{Z}$ je $k + 12\mathbb{Z} = \ell + 12\mathbb{Z} \Leftrightarrow (k - \ell)/12 \in \mathbb{Z}$. Ali onda je $(2k - 2\ell)/3 = 8(k - \ell)/12 \in 8\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$; i zato je f dobro defin. preslikavanje. Nadalje je

$$\begin{aligned} f((k + 12\mathbb{Z}) + (\ell + 12\mathbb{Z})) &= f(k + \ell + 12\mathbb{Z}) = 2(k + \ell) + 3\mathbb{Z} = 2k + 3\mathbb{Z} + 2\ell + 3\mathbb{Z} \\ &= f(k + 12\mathbb{Z}) + f(\ell + 12\mathbb{Z}); \end{aligned}$$

tj., f je homo. (aditivnih) grupa.

(0.5 boda) Ako označimo $\bar{k} = k + 12\mathbb{Z}$, onda je jezgra

$$\ker f = \{\bar{k} \mid 2k + 3\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}\} = \{\bar{k} \mid 2k \in 3\mathbb{Z}\} = \{\bar{k} \mid k \in 3\mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}.$$

(0.5 boda) Jer je $f(2+12\mathbb{Z}) = 2 \cdot 2 + 3\mathbb{Z} = 1 + 3\mathbb{Z}$ očito generator grupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, zaključujemo da je f epimorfizam. (Posebno je npr. $f(4 + 12\mathbb{Z}) = 2 + 3\mathbb{Z}$ te je $f(12\mathbb{Z}) = 3\mathbb{Z}$.)

3. Neka je G grupa, neka je H neka njezina normalna podgrupa i neka je ϕ neki automorfizam grupe G . Je li $\phi(H)$ podgrupa od G ? Je li $\phi(H)$ nužno i normalna podgrupa od G ?

Rješenje. _____

(0.5 boda) Neka su $y_1, y_2 \in \phi(H)$. Onda postoje $x_1, x_2 \in H$ t.d. je $\phi(x_j) = y_j$. Jer je $H \leq G$, onda je i $x_1 x_2^{-1} \in H$ te zatim

$$\phi(x_1 x_2^{-1}) = \phi(x_1) \phi(x_2^{-1}) = \phi(x_1) \phi(x_2)^{-1} = y_1 y_2^{-1} \in \phi(H).$$

Po kriteriju pogrupe zaključujemo da je $\phi(H) \leq G$

(1.5 boda) Tvrdimo: $\phi(H) \trianglelefteq G$. Za to vidjeti neka su $g \in G$ i $y = \phi(h) \in \phi(H)$ proizvoljni. Jer je ϕ automorfizam, postoji $\gamma \in G$ t.d. je $\phi(\gamma) = g$. I onda imamo

$$gyg^{-1} = \phi(\gamma)\phi(h)\phi(\gamma^{-1}) = \phi(\gamma h \gamma^{-1}).$$

Ali zbog $H \trianglelefteq G$ imamo da je $h_1 := \gamma h \gamma^{-1} \in H$ pa slijedi da je $gyg^{-1} = \phi(h_1) \in \phi(H)$. Time je tvrdnja dokazana.