Dokaz iracionalnosti broja e

Vjekoslav Kos

U ovom dokazu iracionalnosti broja e koristi se Taylorov red. Taylorov red funkcije f u točki $c \in I$ je red $f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$, gdje je $I \subseteq R$ otvoreni interval i $f: I \to R$ funkcija koja na intervalu I ima derivacije proizvoljnog reda. Promatramo li funkciju $f(x) = e^x, x \in R$ za $c = 0$ i $I = R$ vrijedi $f^{(n)}(o) = 1$ i $f^{(n)}(x) = e^x$ pa pripadni Taylorov red za funkciju $f(x) = e^x$ glasi

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

Posebno, za $x = 1$ vrijedi $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

Dokaz o iracionalnosti broja e

Pretpostavimo suprotno; neka je broj e racionalan.
Tada se on može zapisati u obliku razlomka $\frac{m}{n}$ pri čemu su m i n prirodni brojevi. Sada vrijedi:

$$e = \frac{m}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots$$

Pomnožimo li cijelu jednakost s $n!$ dobivamo:

$$m(n-1)! = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + 1 + \frac{1}{n+1} + \cdots (*)$$

Lijeva strana jednakosti je, kao i svi pribrojnici na desnoj strani do broja 1, cijeli broj. Pibrojnici iza broja 1 na desnoj strani su razlomci, a zbroj tih razlomaka manji je od zbroja geometrijskog reda:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n+1-1} = \frac{1}{n} < 1$$

Iz toga slijedi da je desna strana jednakosti $(*)$ jednaka zbroju cijelog broja (pribrojnici do broja 1 i broj 1) i pozitivnog broja manjeg od 1 (zbroj svih razlomaka iza broja 1), što je kontradikcija obzirom da je lijeva strana jednakosti $(*)$ cijeli broj.
Time smo dokazali da je e iracionalan broj.

Izvor: *Vuković P., Keček D., Benković M., Benko L., Iracionalnost nekih poznatih konstanti* (https://hrcak.srce.hr/file/177648)