Uvod u primijenjenu algebarsku topologiju - domaća zadaća

Matija Bašić

Rok za predaju: 4. 6. 2021.

Obavezno treba riješiti dva od zadataka 1-4; jedan od zadataka 5 i 6; jedan od zadatak 7 i 8; dva zadatka od zadataka 9-11; te zadatak 12.

1. Neka je $\mathbb{Z}$ skup cijelih brojeva. Promotrite najmanju topologiju na $\mathbb{Z}$ takvu da su skupovi $A_{a,b} = \{an + b \colon n \in \mathbb{Z}\}$, za $a \neq 0$, otvoreni. Neka je $S = \bigcup_{p \text{ prost}} p\mathbb{Z}$.

   (a) Dokažite da je svaki skup $A_{a,b}$ i otovoren i zatvoren.

   (b) Dokažite da nijedan neprazni konačni skup nije otvoren.

   (c) Promatrajući skup S zaključite da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva.

2. Neka je X skup i σ familija podskupova od X takva da vrijedi:

   (a) Za svaki $x \in X$ postoji $U \in \sigma$ takav da je $x \in U$.

   (b) Za svaki $x \in U \cap V$, $U, V \in \sigma$ postoji $W \in \sigma$ takav da je $x \in W \subseteq U \cap V$.

   Neka je τ familija svih podskupova od X koji se mogu prikazati kao unija elemenata od σ. Dokažite da je τ topologija na X.

   Napomena. Kažemo da je σ baza topologije τ.

3. (Lema o uniji) Neka su X i Y topološki prostori, neka su A i B zatvoreni podskupovi od X takvi da je $A \cup B = X$, te neka su $f \colon A \to Y$ i $g \colon B \to Y$ neprekidna preslikavanja takva da je $f(x) = g(x)$ za svaki $x \in A \cap B$. Dokažite da je preslikavanje $F \colon X \to Y$ definirano formulom
$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g(x), & x \in B, \end{cases}$$
   također neprekidno.

   Napomena. Podskup A topološkog prostora X je *zatvoren* ako je njegov komplement $X \setminus A$ otvoren. To općenito *nije* isto što i tvrdnja da A nije otvoren.

4. Neka je ρ standardna topologija na $\mathbb{R}$. Neka je σ familija svih intervala u $\mathbb{R}$ oblika $[a, b\rangle$, $a < b$.

   (a) Dokažite da je σ baza neke topologije τ na $\mathbb{R}$.

   (b) Dokažite da je preslikavanje $f \colon (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \rho)$ neprekidno u točki c ako i samo ako funkcija f ima limes zdesna u c.

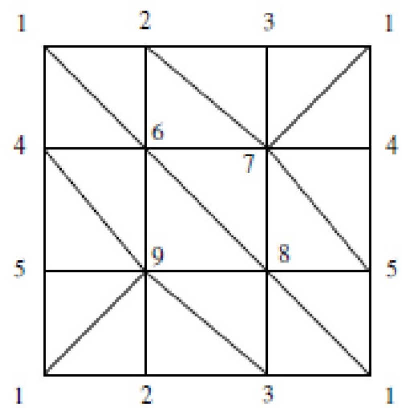
5. Neka je C kategorija. Dokažite da postoji kategorija $Arr(C)$ čiji objekti su morfizmi $f \colon X \to Y$ u C, a morfizmi između $f \colon X \to Y$ i $f' \colon X' \to Y'$ su parovi morfizama $(a \colon X \to X', b \colon Y \to Y')$ u C takvi da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "b"] & Y'. \end{tikzcd}$$

6. Za morfizam $f\colon X \to Y$ kažemo da je *izomorfizam* ako postoji morfizam $f^{-1}\colon Y \to X$ takav da je $f \circ f^{-1} = 1_Y$ i $f^{-1} \circ f = 1_X$.

   Dokažite da je za svaki funktor $F\colon C \to D$ i svaki izomorfizam f u C morfizam $F(f)$ također izomorfizam.

7. Izračunajte vektorske prostore homologije $H_n(X)$ za torus koristeći triangulaciju:



   Na sličan način odredite homologiju Kleinove boce i projektivne ravnine.

8. Uočite da nije nužno homologiju računati nad poljem. Na primjer, za homologiju s cjelobrojnim koeficijentima, $C_n(X;\mathbb{Z})$ možemo definirati kao slobodnu abelovu grupu generiranu skupom X_n. Promjenom koeficijenata možemo dobiti nove vrijedne informacije. Izračunajte homološke grupe $H_n(X;\mathbb{Z})$ za Kleinovu bocu i projektivnu ravninu.

9. Neka je X konačni apstraktni simplicijalni kompleks dimenzije n, te označimo $n_k = |X_k|$. Eulerovu karakteristiku od X definiramo formulom

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k n_k.$$

   Kažemo da je apstraktni simplicijalni kompleks Y dobiven od X *elemntarnom subdivizijom* ako kompleks Y ima točno jedan vrh više od X. Kažemo da su konačni apstraktni simplicijalni kompleksi X i Y *kombinatorno ekvivalentni* ako jedan možemo dobiti od drugog nizom elementarnih subdivizija.

   Dokažite da kombinatorno ekvivalentni apstraktni simplicijalni kompleksi imaju iste Eulerove karakteristike.

10. Neka je X abstraktni simplicijalni kompleks i neka je $C_n(X)$ realni vektorski prostor kojem je baza skup X_n. Preslikavanje $d_n\colon C_{n+1}(X) \to C_n(X)$ definiramo na bazi koristeći preslikavanja strana $\partial_k\colon X_{n+1} \to X_n$ formulom

$$d(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \partial_k(x), \quad x \in X_{n+1}.$$

    Dokažite da je $d_n \circ d_{n+1} = 0$.

11. Neka je X konačni apstraktni simplicijalni kompleks. Bettijev broj $\beta_n(X)$ definiramo kao dimenziju vektorskog prostora

$$H_n(X) = \mathrm{Ker} d_n / \mathrm{Im}\ d_{n+1}.$$

Dokažite da je

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \beta_k(X).$$

12. Koristeći rezultate

$$H_k(D^n) = \begin{cases} 0, & k \geq 1; \\ \mathbb{R}, & k = 0 \end{cases} \qquad H_k(S^n) = \begin{cases} 0, & k \neq 0, n; \\ \mathbb{R}, & k = 0, n \end{cases}$$

dokažite da ne postoji retrakcija inkluzije $i_n \colon S^{n-1} \to D^n$ i Brouwerov teorem o fiksnoj točki za funkcije $f \colon D^n \to D^n$.