Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odsjek

Tin Perkov, Mladen Vuković

Algebarska semantika modalne logike

Zagreb, ak. god. 2019/20.

Sadržaj

Predgovor

Ovaj materijal sadrži predavanja iz kolegija *Algebarska semantika modalne logike* koji smo predavali akademske godine 2019./20. na Zajedničkom poslijediplomskom doktorskom studiju matematike u Zagrebu. Materijal je prije svega namijenjen studentima koji su slušali predavanja tog kolegija.

Svaki ispravak, ili pak sugestiju, koji bi mogli doprinijeti poboljšanju ovog teksta, rado ćemo prihvatiti.

U Zagrebu, 2020. autori

Uvodne informacije o kolegiju

Način polaganja

- 3 domaće zadaće
- seminarski rad i izlaganje na *Seminaru za matematičku logiku i osnove matematike*

Literatura

- P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, četvrto izdanje, 2010.
- T. Perkov, M. Vuković, *Semantike logika dokazivosti i interpretabilnosti*, predavanja, PMF–MO, Zagreb, 2017.
https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/00-predavanja-doktorski-2016-17.pdf
- Y. Venema, *Algebras and coalgebras*, u P. Blackburn i dr. (ur.): *Handbook of Modal Logic*, Elsevier, 2007.
- M. Vuković: *Matematička logika*, Element, 2009.
- M. Vuković, *Primijenjena logika*, predavanja poslijediplomskog kolegija, PMF–MO, Zagreb, 2011.
https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/applog-skripta-2011_0.pdf

Sadržaj kolegija

- osnovni pojmovi modalne logike
- algebarska semantika
- opći okviri
- koalgebre

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi modalne logike

1.1 Relacijske strukture

Algebarsku semantiku modalne logike nećemo proučavati izolirano, nego u odnosu na osnovnu semantiku, koja se definira na relacijskim strukturama.

Definicija 1.1. *Relacijska struktura* je n-torka ($n > 1$) čija prva komponenta je neprazan skup W, a ostale komponente su relacije na W.

Primjer 1.1. Neki primjeri relacijskih struktura:

a) (strogo) parcijalno uređeni skupovi

b) označeni tranzicijski sistemi (LTS): više binarnih relacija na W

  b_1) deterministički: relacije su parcijalne funkcije

  b_2) nedeterministički

c) (konačna označena) stabla: uz očitu binarnu relaciju, oznake čvorova definiraju unarne relacije na W

Primjene:

(i) teorijsko računarstvo (stanja i tranzicije)

(ii) umjetna inteligencija (reprezentacija znanja)

(iii) lingvistika (stabla reprezentiraju strukturu rečenica)

1.2 Osnovni modalni jezik

Mi promatramo samo propozicionalne modalne logike. U većem dijelu kolegija razmatramo osnovnu modalnu logiku čija sintaksa je minimalno proširenje sintakse logike sudova.

Definicija 1.2. *Alfabet osnovnog modalnog jezika* čine:

a) skup Φ čije elemente zovemo *propozicionalne varijable* i označavamo ih p, q, r, p_i i sl.

b) *logički veznici* $\neg$ i $\vee$

c) *logička konstanta* $\bot$

d) simbol $\Diamond$ kojeg zovemo *modalni operator*

Formule osnovnog modalnog jezika su riječi jezika nad tim alfabetom, definirane sljedećom gramatikom:

$$\varphi \to p \,|\, \bot \,|\, \neg\varphi \,|\, \varphi_1 \vee \varphi_2 \,|\, \Diamond\varphi, \quad \text{gdje je} \quad p \in \Phi$$

Definiramo sljedeće pokrate:

a) $\Box\varphi := \neg\Diamond\neg\varphi$

b) $\varphi_1 \wedge \varphi_2 := \neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$

c) $\varphi_1 \to \varphi_2 := \neg\varphi_1 \vee \varphi_2$

d) $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_1 := (\varphi_1 \to \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \to \varphi_1)$

e) $\top := \neg\bot$

Najčešće prešutno pretpostavljamo da je skup varijabli Φ prebrojiv. No, to nismo eksplicitno naveli u definiciji jer je ponekad potrebno razmatrati konačne (kod pitanja odlučivosti), a ponekad i neprebrojive (u teoriji modela) skupove propozicionalnih varijabli.

Ovisno o primjeni, postoji više intendiranih interpretacija modalnih operatora. Ovdje navodimo neke.

a) $\Diamond\varphi$ čitamo "moguće je φ"

b) $\Box\varphi$ stoga čitamo "nužno je φ" ("nije moguće $\neg\varphi$")

c) u *epistemičkoj logici* $\Box\varphi$ se čita "agent zna φ" ili "agent vjeruje φ"

d) u *logici dokazivosti* $\Box\varphi$ se čita "dokazivo je φ"

e) ima i drugih intendiranih interpretacija modalnih logika (temporalna, etička itd)

Napomena 1.1. Moguće su sljedeće generalizacije modalnog jezika:

a) više modalnih operatora

b) modalni operatori više mjesnosti

Radi jednostavnosti oznaka, razmatrat ćemo samo osnovni modalni jezik, no gotovo svi rezultati koje ćemo dokazati vrijede i općenito, uz analogne dokaze.

1.3 Modeli i okviri

Kao što je već spomenuto, osnovna semantika modalne logike definirana je na relacijskim strukturama.

Definicija 1.3. *Kripkeov okvir* za osnovni modalni jezik je relacijska struktura $\mathfrak{F} = (W, R)$, gdje je:

a) W neprazan skup koji zovemo *nosač*, a njegove elemente zovemo *svjetovi* (*čvorovi*, *stanja*, *točke* i sl.)

b) R binarna relacija na W, koju zovemo *relacija dostiživosti*

Kripkeov model za osnovni modalni jezik je uređeni par $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$, gdje je:

a) $\mathfrak{F}$ okvir, pri čemu kažemo da je model $\mathfrak{M}$ *baziran* na okviru $\mathfrak{F}$ ili da je $\mathfrak{F}$ *pripadni okvir* modela $\mathfrak{M}$

b) $V : \Phi \to \mathcal{P}(W)$ funkcija koju zovemo *valuacija*

Napomena 1.2. Ako proširimo definiciju relacijske strukture tako da može imati i beskonačno mnogo relacija, model također možemo promatrati kao relacijsku strukturu, koja uz binarnu relaciju R ima i po jednu unarnu relaciju $V(p)$ za svaku propozicionalnu varijablu p. Ideja je da $V(p)$ obuhvaća one svjetove u kojima je p istinita.

Definicija 1.4. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model i $w \in W$. *Istinitost* formule φ u svijetu w modela $\mathfrak{M}$, u oznaci $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$, definiramo rekurzivno:

a) $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ ako i samo ako $w \in V(p)$, za svaki $p \in \Phi$

b) $\mathfrak{M}, w \Vdash \bot$ ne vrijedi nikad

c) $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\varphi$ ako i samo ako ne vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$

d) $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$ ako i samo ako $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi_1$ ili $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi_2$

e) $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$ ako i samo ako postoji $v \in W$ tako da vrijedi wRv i $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$

Za skup formula Σ pišemo $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$ ako vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ za svaku formulu $\varphi \in \Sigma$.

Iz definicije slijedi da je $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\varphi$ ekvivalentno sa činjenicom da za svaki $v \in W$ takav da je wRv vrijedi $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$.

Pišemo $\mathfrak{M}, w \nVdash \varphi$ ako ne vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$. Često pišemo samo $w \Vdash \varphi$, te $w \nVdash \varphi$ i sl. kad je model $\mathfrak{M}$ jasan iz konteksta.

Valuaciju na prirodan način proširujemo na skup svih formula:

$$V(\varphi) := \{w \in W : \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi\}.$$

Definicija 1.5. Kažemo da je formula φ *globalno istinita* na modelu $\mathfrak{M}$, i pišemo $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$, ako je $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ za svaki svijet $w \in W$.
Kažemo da je formula φ *ispunjiva u modelu* $\mathfrak{M}$ ako postoji svijet $w \in W$ takav da je $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$.
Kažemo da je formula φ *ispunjiva* ako postoji model u kojem je ispunjiva.
Za skup formula Σ pišemo $\mathfrak{M} \Vdash \Sigma$ ako je $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$ za svaki svijet $w \in W$.
Kažemo da je Σ *skup formula ispunjiv u modelu* $\mathfrak{M}$ ako postoji svijet $w \in W$ takav da je $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$.

Primjer 1.2. Sada dajemo primjere modela i formula koje su globalno istinite, te istinite, odnosno neistinite, na nekom svijetu modela.

a) $\mathfrak{M}_1 = (\mathbb{N}, <, V_1)$, gdje je $V_1(p) = \emptyset$ za svaku propozicionalnu varijablu $p \in \Phi$. Tada vrijedi $\mathfrak{M}_1 \Vdash \Diamond\neg p$ i $\mathfrak{M}_1 \Vdash \Box\neg p$, za svaku propozicionalnu varijablu $p \in \Phi$.

b) $\mathfrak{M}_2 = (\mathbb{N}, <, V_2)$, gdje je $V_2(p_i) = \{i\}$ za svaki $p_i \in \Phi$. Tada vrijedi $\mathfrak{M}_2 \Vdash \Diamond\neg p$ za svaki $p \in \Phi$. Zatim, vrijedi sljedeće: $\mathfrak{M}_2, 1 \Vdash \Diamond p_2$, $\mathfrak{M}_2, 1 \nVdash \Box\neg p_2$, $\mathfrak{M}_2 \nVdash \Box\neg p_2$ i $\mathfrak{M}_2, i \Vdash \Box\neg p_i$, za svaku propozicionalnu varijablu $p_i \in \Phi$.

c) Neka je Φ neki skup propozicionalnih varijabli. Zatim, neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, gdje je redom:

   (i) $W = \mathcal{P}(\Phi)$ (obično se elementi skupa W nazivaju epistemičke alternative ili moguća stanja stvari)

   (ii) R je neka relacija ekvivalencije na skupu W (intendirana interpretacija je da agent ne razlikuje svjetove koji su u relaciji)

   (iii) $w \in V(p)$ ako i samo ako $p \in w$ (valuacija V se naziva kanonska valuacija)

   Tada za svaki $p \in \Phi$ vrijedi: $\mathfrak{M}, \{p\} \Vdash p$, $\mathfrak{M} \Vdash p \to \Diamond p$ i $\mathfrak{M} \Vdash \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$.

Definicija 1.6. Kažemo da je formula φ *valjana na okviru* $\mathfrak{F} = (W, R)$, i pišemo $\mathfrak{F} \Vdash \varphi$, ako vrijedi $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$ za svaki model $\mathfrak{M}$ baziran na $\mathfrak{F}$, tj. $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}, V)$ za neku valuaciju V.

Kažemo da je formula φ *valjana*, i pišemo $\Vdash \varphi$, ako je formula φ valjana na svakom okviru.

Primjer 1.3. Sada navodimo neke primjere valjanih formula, te valjanih formula na zadanom okviru $\mathcal{F} = (W, R)$.

a) formula $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ je valjana;

b) formula $\Box p \to p$ nije valjana, ali ako je relacija R refleksivna tada vrijedi $\mathfrak{F} \Vdash \Box p \to p$ ("ako agent zna p, onda vrijedi p");

c) ako je relacija R tranzitivina tada $\mathfrak{F} \Vdash \Box p \to \Box\Box p$ (*pozitivna introspekcija*);

d) ako je relacija R euklidska tj. wRu i wRv uvijek povlači uRv, tada imamo $\mathfrak{F} \Vdash \neg\Box p \to \Box\neg\Box p$ (*negativna introspekcija*);

e) ako je R tranzitivna i inverzno dobro fundirana (tj. ne postoji beskonačni niz $w_1 R w_2 R w_3 R \ldots$) tada $\mathfrak{F} \Vdash \Box(\Box p \to p) \to \Box p$ (*Löbova formula*).
To će biti detaljno dokazano kasnije u propoziciji 2.4.

1.4 Opći okviri

Valjanost modalne formule na okviru podrazumijeva globalnu istinitost za svaku valuaciju. Opći okviri ograničavaju valuacije dopuštajući da se propozicionalnim varijablama pridružuju samo podskupovi nosača iz unaprijed zadane familije podskupova, zatvorene na skupovne operacije koje prirodno korespondiraju s logičkim veznicima (unija, komplement itd), te na sljedeću operaciju koja analogno korespondira s modalnim operatorom.

Definicija 1.7. Neka je $\mathfrak{F} = (W, R)$ okvir. Definiramo funkciju $m_\Diamond : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W)$ na sljedeći način:

$$m_\Diamond(X) = \{w \in W : \text{postoji } x \in X \text{ takav da je } wRx\}$$

Drugim riječima, u skupu $m_\Diamond(X)$ su svi svjetovi koji "vide" neki svijet iz X. Lako je provjeriti da za sve formule φ i ψ vrijede sljedeće skupovne jednakosti:

$$V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi),\ V(\neg\varphi) = W \setminus V(\varphi) \ \text{ i } \ V(\Diamond\varphi) = m_\Diamond(V(\varphi))$$

Definicija 1.8. *Opći okvir* je uređeni par $(\mathfrak{F}, A)$, gdje je $\mathfrak{F} = (W, R)$ okvir, a A neprazna familija podskupova od W zatvorena na uniju, komplement i $m_\Diamond$, tj. vrijedi redom sljedeće:

a) ako su $X, Y \in A$, onda je $X \cup Y \in A$

b) ako je $X \in A$, onda je $W \setminus X \in A$

c) ako je $X \in A$, onda je $m_\Diamond(X) \in A$

Model baziran na općem okviru je uređena trojka $(\mathfrak{F}, A, V)$, gdje je $(\mathfrak{F}, A)$ opći okvir i V valuacija takva da je $V(p) \in A$ za svaki $p \in \Phi$. Za takve valuacije kažemo da su *dopustive* s obzirom na opći okvir $(\mathfrak{F}, A)$.

Iz definicije općeg okvira (W, R, A) odmah slijedi:

a) $\emptyset, W \in A$

b) okvir možemo promatrati kao opći okvir, uz $A = \mathcal{P}(W)$

c) ako je V dopustiva, onda za svaku formulu φ vrijedi $V(\varphi) \in A$

Definicija 1.9. Kažemo da je formula φ *valjana na općem okviru* $(\mathfrak{F}, A)$, i pišemo $(\mathfrak{F}, A) \Vdash \varphi$, ako je globalno istinita na svakom modelu baziranom na $(\mathfrak{F}, A)$, tj. ako je istinita u svakom svijetu za svaku dopustivu valuaciju.

Primjer 1.4. McKinseyeva formula $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ nije valjana na okviru $(\mathbb{N}, <)$, ali je valjana na općem okviru $(\mathbb{N}, <, A)$, gdje je A skup svih konačnih i kofinitnih (tj. onih kojima je komplement konačan) podskupova od $\mathbb{N}$. Ovaj primjer je detaljnije raspisan na strani 77.

1.5 Modalne relacije logičke posljedice

Logička posljedica se u modalnoj logici definira u odnosu na danu klasu okvira i ima dvije varijante, lokalnu i globalnu.

Definicija 1.10. Neka je K klasa okvira, Σ skup formula i φ formula. Kažemo da je φ *lokalna logička posljedica* od Σ nad klasom K, i pišemo $\Sigma \Vdash_{\mathsf{K}} \varphi$ (ili samo $\Sigma \Vdash \varphi$ ako je K klasa svih okvira) ako za svaki model $\mathfrak{M}$ baziran na okviru iz klase K i za svaki svijet w iz $\mathfrak{M}$ vrijedi da $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$ povlači $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$.

Primjer 1.5. Neka je K klasa svih tranzitivnih okvira. Tada $\{\Diamond\Diamond p\} \Vdash_{\mathsf{K}} \Diamond p$, iako $\{\Diamond\Diamond p\} \nVdash \Diamond p$.

Definicija 1.11. Neka je K klasa okvira, Σ skup formula i φ formula. Kažemo da je φ *globalna logička posljedica* od Σ nad klasom K, i pišemo $\Sigma \Vdash^g_{\mathsf{K}} \varphi$, ako za svaki okvir $\mathfrak{F}$ iz klase K vrijedi da $\mathfrak{F} \Vdash \Sigma$ povlači $\mathfrak{F} \Vdash \varphi$.

Analogno se definiraju i modalne relacije logičke posljedice u odnosu na klasu modela ili klasu općih okvira.

Primjer 1.6. Formula $\Box p$ je globalna, ali ne i lokalna, logička posljedica od p nad klasom svih modela.

1.6 Normalne modalne logike

Semantičke pojmove valjanosti i logičke posljedice povezujemo sa sintaktičkim pojmovima dokazivosti i izvedivosti.

Definicija 1.12. Sistem **K** zadan je sljedećim aksiomima:

a) sve tautologije (u osnovnom modalnom jeziku)

b) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (aksiom K)

c) $\Diamond p \leftrightarrow \neg\Box\neg p$ (aksiom Dual)

i pravilima izvoda:

a) iz φ i $\varphi \to \psi$ zaključujemo ψ (*modus ponens*)

b) iz φ zaključujemo φ', gdje je φ' dobivena uniformnom supstitucijom propozicionalnih varijabli u φ proizvoljnim modalnim formulama (*uniformna supstitucija*)

c) iz φ zaključujemo $\Box\varphi$ (*generalizacija*)

Dokaz u sistemu **K** je konačan niz formula, od kojih je svaka aksiom ili je dobivena primjenom jednog od pravila izvoda na formule koje joj prethode.

Kažemo da je formula φ *dokaziva* u sistemu **K**, i pišemo $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$, ako postoji dokaz u kojem je φ posljednja formula.

Napomena 1.3. Istaknimo neke detalje vezane uz definiciju sistema **K**.

a) tautologije mogu sadržavati modalne operatore, tj. radi se o svim formulama dobivenim uniformnom supstitucijom od tautologija logike sudova (primjeirce, $\Diamond p \vee \neg\Diamond p$) – naravno, moguće je uzeti za aksiome i manji broj tautologija iz kojih su sve ostale izvedive;

b) aksiomi su valjane formule, a pravila izvoda čuvaju valjanost; posebno, sve dokazive formule su valjane (teorem adekvatnosti); vidjet ćemo da vrijedi i obrat (teorem potpunosti);

c) pravilo izvoda modus ponens čuva istinitost i globalnu istinitost, pravilo generalizacije čuva globalnu istinitost, ali ne čuva istinitost, dok uniformna supstitucija ne čuva istinitost, a ni globalnu istinitost.

Primjer 1.7. Formula $\Box p \to \Box(p \vee q)$ je dokaziva u **K**. Navedimo jedan dokaz za nju u sistemu **K**:

1. $p \to p \vee q$ (aksiom – tautologija)
2. $\Box(p \to p \vee q)$ (generalizacija iz 1)
3. $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (aksiom K)
4. $\Box(p \to p \vee q) \to (\Box p \to \Box(p \vee q))$ (uniformna supstitucija iz 3)
5. $\Box p \to \Box(p \vee q)$ (modus ponens iz 2 i 4)

Za sistem **K** vrijedi teorem adekvatnosti i potpunosti u odnosu na klasu svih okvira. Dodavanjem drugih aksioma dobivamo modalne sisteme koji su adekvatni i potpuni u odnosu na druge klase okvira. Primjerice, dodavanjem aksioma $\Box p \to \Box\Box p$ dobivamo sistem **K4** za koji vrijedi teorem adekvatnosti i potpunosti u odnosu na klasu svih tranzitivnih okvira.

Umjesto hilbertovskih sistema u nastavku koristimo pojam normalne modalne logike kao skupa formula.

Definicija 1.13. *Normalna modalna logika* Λ je skup formula koji sadrži sve tautologije, te aksiome K i Dual, zatvoren je na pravila modus ponens i generalizaciju, te uniformnu supstituciju. Najmanju normalnu modalnu logiku označavamo sa **K**.

Primjer 1.8. Neka je K klasa okvira. Neka je Λ_{K} skup svih formula valjanih na svim okvirima iz klase K. Tada je Λ_{K} normalna modalna logika.

1.7 Osnovne konstrukcije modela

Zanimaju nas operacije kojima se od danih modela dobivaju novi modeli tako da se očuva istinitost modalnih formula. Ako čuvanje istinitosti vrijedi u oba smjera, govorimo o invarijantnosti.

Definicija 1.14. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ modeli i neka su $w \in W$ i $w' \in W'$ svjetovi. Kažemo da su w i w' *modalno evivalentni* ako za svaki formulu φ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$$

Disjunktna unija je uobičajena skupovna operacija koju ovdje provodimo na svim komponentama modela.

Definicija 1.15. Neka je $(\mathfrak{M}_i = (W_i, R_i, V_i) : i \in I)$ indeksirana familija modela čiji su nosači međusobno disjunktni. Njihova *disjunktna unija* je model $\biguplus_i \mathfrak{M}_i = (W, R, V)$, gdje je $W = \bigcup_i W_i$, $R = \bigcup_i R_i$ i $V(p) = \bigcup_i V_i(p)$ za svaku propozicionalnu varijablu $p \in \Phi$.

Disjunktna unija modela čiji nosači nisu disjunktni definira se tako da se promatraju disjunktne kopije. Primjerice, umjesto modela $\mathfrak{M}_i = (W_i, R_i, V_i)$ promatramo model s nosačem $\{(w, i) : w \in W_i\}$ i na očit način definiranom relacijom dostiživosti i valuacijom.

Istinitost modalnih formula je invarijantna na disjunktne unije.

Propozicija 1.1. Za svaku modalnu formulu φ, za svaki $i \in I$ i za svaki $w \in W_i$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M}_i, w \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \biguplus_i \mathfrak{M}_i, w \Vdash \varphi$$

Dokaz ispuštamo, uz komentar da tvrdnja intuitivno očito vrijedi, jer istinitost modalne formule u svijetu w ovisi samo o svjetovima do kojih se može doći iz w pomoću relacije dostiživosti, što znači da ne može ovisiti o svjetovima iz drugih članova disjunktne unije. Osim toga, propozicija lako slijedi iz analogne tvrdnje o bisimulacijama koju ćemo dokazati kasnije.

Na podmodelu općenito neće biti očuvana istinitost modalnih formula jer ona ovisi o dostiživim svjetovima, koji možda više nisu u nosaču podmodela. Invarijantnost će, dakle, ipak vrijediti ako postavimo dodatni uvjet zatvorenosti na dostiživost.

Definicija 1.16. Kažemo da je model $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ *podmodel* modela $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ ako je $W' \subseteq W$, $R' = R \cap (W' \times W')$ i $V'(p) = V(p) \cap W'$ za svaku propozicionalnu varijablu $p \in \Phi$.

Kažemo da je model $\mathfrak{M}'$ *generirani podmodel* od $\mathfrak{M}$ ako je $\mathfrak{M}'$ podmodel od $\mathfrak{M}$ i za sve $w, v \in W$ vrijedi da wRv i $w \in W'$ povlači $v \in W'$.

Za model $\mathfrak{M} = (W, R; V)$ i $X \subseteq W$, najmanji generirani podmodel od $\mathfrak{M}$ čiji nosač sadrži X zovemo *podmodel generiran skupom* X.

Za model $\mathfrak{M}$ generiran jednočlanim skupom $\{w\}$ kažemo da je *točkovno generiran* i pritom w zovemo *korijen* od $\mathfrak{M}$.

Propozicija 1.2. Neka je $\mathfrak{M}'$ generirani podmodel od $\mathfrak{M}$. Tada za svaku formulu φ i za svaki $w \in W'$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}', w \Vdash \varphi$$

I u ovom slučaju tvrdnja će slijediti iz općenitije tvrdnje koju ćemo dokazati kasnije. Uočimo i da je analogna propozicija o disjunktnim unijama posljedica prethodne, jer je svaki član disjunktne unije generirani podmodel te unije.

Važna preslikavanja među relacijskim strukturama, kao što su homomorfizmi, jaki homomorfizmi i izomorfizmi, nisu prikladna za modalnu logiku. Naime, homomorfizmi nisu dovoljno jaki za invarijantnost, dok su izomorfizmi prejaki, odnosno postoji šira klasa preslikavanja za koju vrijedi invarijantnost.

Definicija 1.17. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ modeli. Funkciju $f : W \to W'$ zovemo *ograničeni morfizam* ako za sve $w, v \in W, v' \in W'$ vrijedi:

(at) $w \in V(p)$ ako i samo ako $f(w) \in V'(p)$, za svaki $p \in \Phi$

(forth) ako wRv onda $f(w)R'f(v)$

(back) ako $f(w)R'v'$ onda postoji $v \in W$ takav da je wRv i $f(v) = v'$

Primjer 1.9. Neka je $\mathfrak{M} = (\{w_1, w_2, w_3\}, \{(w_1, w_2), (w_2, w_3), (w_3, w_1)\}, V)$ i neka je $\mathfrak{M}' = (\{w\}, \{(w, w)\}, V')$, pri čemu je $V(p) = V'(p) = \emptyset$ za svaku varijablu $p \in \Phi$. Tada je funkcija $f : W \to W'$ definirana sa $f(1) = f(2) = f(3) = w$, ograničeni morfizam.

Propozicija 1.3. Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ modeli i neka je $f : W \to W'$ ograničeni morfizam. Tada za svaku modalnu formulu φ i za svaki $w \in W$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}', f(w) \Vdash \varphi$$

Dokaz. Tvrdnja se dokazuje indukcijom po složenosti formule.

Baza: u slučaju $\varphi = \bot$ tvrdnja očito vrijedi, a u slučaju $\varphi = p \in \Phi$ slijedi iz uvjeta (at) iz definicije ograničenog morfizma.

Korak: u slučaju da je φ oblika $\neg\psi$, ako je $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$, onda $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$, pa po pretpostavci indukcije $\mathfrak{M}', f(w) \nVdash \psi$, tj. $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash \neg\psi$. Obrat je sličan. Analogno se tvrdnja dokazuje i u slučaju disjunkcije. U slučaju formule oblika $\Diamond\psi$, ako je $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$, onda postoji svijet v tako da je wRv i $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. Tada iz pretpostavke indukcije slijedi $\mathfrak{M}', f(v) \Vdash \psi$, a uvjet (forth) iz definicije ograničenog morfizma povlači $f(w)R'f(v)$, pa vrijedi $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash \Diamond\psi$. Obratno, ako $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash \Diamond\psi$, onda postoji svijet v' tako da je $f(w)R'v'$ i $\mathfrak{M}', v' \Vdash \psi$. Iz uvjeta (back) iz definicije ograničenog morfizma slijedi da postoji svijet $v \in W$ tako da je wRv i $f(v) = v'$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$ i stoga $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$. Q.E.D.

Ograničene morfizme primjenjujemo u dokazu da za svaku ispunjivu modalnu formulu postoji model koji je stablo.

Propozicija 1.4. Za svaki točkovno generirani model $\mathfrak{M}$ postoji model $\mathfrak{M}'$ tako da mu je pripadni okvir stablo i postoji surjektivni ograničeni morfizam s $\mathfrak{M}'$ u $\mathfrak{M}$. Posebno, svaka ispunjiva modalna formula je istinita u korijenu nekog modela čiji pripadni okvir je stablo.

Dokaz. Neka je w korijen od $\mathfrak{M}$. Definiramo model $\mathfrak{M}'$ ovako:

a) W' je skup svih konačnih nizova oblika $(w, u_1, \ldots, u_n)$ takvih da je $n \geqslant 0$ i $wRu_1R\ldots Ru_n$

b) $(w, u_1, \ldots, u_n)R'(w, v_1, \ldots, v_m)$ ako i samo ako je $m = n+1$, $u_i = v_i$ za $i = 1, \ldots, n$ i $u_n R v_m$

c) $(w, u_1, \ldots, u_n) \in V'(p)$ ako i samo ako $u_n \in V(p)$

Očito je (W', R') stablo s korijenom (w).

Lako je provjeriti da je funkcija $f : W' \to W$ definirana s $f(w, u_1, \ldots, u_n) = u_n$ surjektivni ograničeni morfizam.

Kako bismo dokazali drugu tvrdnju, pretpostavimo da je formula φ istinita u svijetu w nekog modela. Neka je $\mathfrak{M}$ njegov podmodel generiran s w. Tada je prema ranijoj propoziciji $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$. Prema ranije dokazanom postoji model $\mathfrak{M}'$ baziran na stablu i ograničeni morfizam f s $\mathfrak{M}'$ u $\mathfrak{M}$ takav da je $f((w)) = w$. Iz prethodne propozicije slijedi $\mathfrak{M}', (w) \Vdash \varphi$. Q.E.D.

Konstrukciju stabla od danog modela iz dokaza prethodne propozicije zovemo *raspetljavanje*.

1.8 Bisimulacije

Bisimulacije poopćuju sve dosad navedene konstrukcije modela.

Definicija 1.18. Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ modeli. *Bisimulacija* između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ je neprazna relacija $Z \subseteq W \times W'$ takva da vrijedi:

(at) ako je wZw' onda za svaku propozicionalnu varijablu p vrijedi: $w \in V(p)$ ako i samo ako $w' \in V'(p)$

(forth) ako je wZw' i wRv onda postoji v' takav da je vZv' i $w'R'v'$

(back) ako je wZw' i $w'R'v'$ onda postoji v takav da je vZv' i wRv

Kažemo da su svjetovi w i w' *bisimulirani* ako je wZw'.

Primjer 1.10. Disjunktna unija, generirani podmodel i ograničeni morfizam su primjeri bisimulacija. Ovdje navodimo još neke primjere bisimulacija.

a) Relacija $\{(w, w) : w \in W_i\}$ je jedna bisimulacija između disjunktne unije $\biguplus_i \mathfrak{M}_i$ i bilo kojeg modela $\mathfrak{M}_i$.

b) Relacija $\{(w, w) : w \in W'\}$ jedna bisimulacija između zadanog modela $\mathfrak{M}$ i njegovog proizvoljnog generiranog podmodela $\mathfrak{M}'$.

c) Ako je f ograničeni morfizam između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ onda je $\{(w, f(w)) : w \in W\}$ jedna bisimulacija između tih modela.

d) Neka je $\mathfrak{M} = (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (1, 3)\}, V)$ i $\mathfrak{M}' = (\{a, b, c\}, \{(a, c), (b, c)\}, V')$, gdje je $V(p) = V'(p) = \emptyset$. Lako je provjeriti da je $Z = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, c)\}$ jedna bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$. Važno je naglasiti da se bisimulacija Z ne može dobiti iz ranije definiranih konstrukcija.

Teorem 1.1. Neka je Z bisimulacija između modela $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$. Tada za svaku modalnu formulu φ, te za sve svjetove $w \in W$ i $w' \in W'$ takve da je wZw', vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$$

Dokaz. Tvrdnja se dokazuje indukcijom po složenosti formule. Navodimo samo korak indukcije u slučaju formule oblika $\Diamond\psi$. Neka je $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$. Tada postoji svijet v takav da je wRv i $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. Iz uvjeta (forth) iz definicije bisimulacije slijedi da postoji svijet v' takav da je $w'Rv'$ i vZv'. Iz pretpostavke indukcije slijedi $\mathfrak{M}', v' \Vdash \psi$ i stoga $\mathfrak{M}', w' \Vdash \Diamond\psi$. Obrat se dokazuje analogno koristeći uvjet (back). Q.E.D.

Iz prethodnog primjera vidimo da su propozicije o invarijantnosti istinitosti modalnih formula na disjunktne unije, generirane podmodele i ograničene morfizme posljedice prethodnog teorema.

Obrat prethodnog teorema ne vrijedi. Drugim riječima, modalno ekvivalentni svjetovi nisu nužno bisimulirani.

Primjer 1.11. Neka je $\mathfrak{M}$ model baziran na stablu s korijenom w i granama duljine n za svaki $n > 0$. Zatim, neka je $\mathfrak{N}$ model s korijenom w' koji također grane kao model $\mathfrak{M}$ i dodatno jednu prebrojivu granu. Definiramo $V(p) = V'(p) = \emptyset$ za svaku varijablu $p \in \Phi$. Nije teško provjeriti da vrijedi ekvivalencija: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{N}, w' \Vdash \varphi$, za svaku modalnu formulu φ. Međutim, svjetovi w i w' nisu bisimulirani. Naime, lako se vidi da neposredni sljedbenik sviejta w' na beskonačnoj grani ne može biti u bisimulaciji ni s jednim svijetom modela $\mathfrak{M}$.

Ipak, moguće je dobiti obrat prethodnog teorema uz dodatne uvjete.

Definicija 1.19. Kažemo da je model $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *slikovno konačan* ako je za svaki svijet $w \in W$ skup $R[w] = \{v \in W : wRv\}$ konačan.

Teorem 1.2 (Hennessy-Milner)**.** Neka su $\mathfrak{M} = (W, R; V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ slikovno konačni modeli. Tada za sve $w \in W$ i $w' \in W'$ vrijedi: svjetovi w i w' su modalno ekvivalentni ako i samo ako su bisimulirani.

Dokaz. Dokazat ćemo da je modalna ekvivalencija među svjetovima modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ (označimo je sa Z) bisimulacija. Uvjet (at) trivijalno vrijedi. Kako bismo dokazali da vrijedi uvjet (forth) iz definicije bisimulacije, pretpostavimo wZw' i wRv. Pretpostavimo suprotno, tj. da ne postoji v' takav da je $w'Rv'$ i vZv'. Neka je $S' = \{u' : w'Ru'\}$. Tada je $S' \neq \emptyset$ jer u suprotnom $\mathfrak{M}', w' \Vdash \Box\bot$, što bi bilo u kontradikciji s wZw' jer $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\top$ zbog wRv. Nadalje, skup S' je po pretpostavci teorema konačan. Stavimo $S' = \{w'_1, \ldots, w'_n\}$. Prema pretpostavci, za svaki $w'_i \in S'$ postoji formula ψ_i takva da je $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi_i$, ali $\mathfrak{M}', w'_i \nVdash \psi_i$. Dakle, imamo $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$, ali $\mathfrak{M}', w' \nVdash \Diamond(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$, što je u kontradikciji s wZw'.

Analogno se dokazuje da vrijedi uvjet (back) iz definicije bisimulacije. Q.E.D.

Napomena 1.4. Lako je provjeriti da vrijedi:

a) Kompozicija bisimulacija je bisimulacija.

b) Proizvoljna unija bisimulacija između danih modela je bisimulacija. Postoji maksimalna bisimulacija između danih modela.

1.9 Standardna translacija

Modalna logika može se promatrati kao fragment logike prvog reda.

Neka je σ signatura koja (uz jednakost) sadrži jedan dvomjesni relacijski simbol R (koristimo istu oznaku kao za relaciju dostiživosti, no uvijek će biti jasno iz konteksta o čemu se radi) i po jedan jednomjesni relacijski simbol P za svaku propozicionalnu varijablu p.

Definicija 1.20. Standardna translacija je funkcija ST_x koja svaku modalnu formulu φ preslikava u σ-formulu $ST_x(\varphi)$ s jednom slobodnom varijablom x, a definiramo je rekurzivno:

a) $ST_x(p) = P(x)$, za svaku propozicionalnu varijablu $p \in \Phi$

b) $ST_x(\bot)$ je formula $x \neq x$

c) $ST_x(\neg\varphi) = \neg ST_x(\varphi)$

d) $ST_x(\varphi_1 \vee \varphi_2) = ST_x(\varphi_1) \vee ST_x(\varphi_2)$

e) $ST_x(\Diamond\varphi) = \exists y(R(x,y) \wedge ST_y(\varphi))$, gdje je y nova varijabla

Iz definicije funkcije ST_x lako slijedi da je $ST_x(\Box\varphi)$ jednako $\forall y(R(x,y) \to ST_y(\varphi))$.

Svaki model $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ možemo promatrati kao σ–strukturu, pri čemu $|\mathfrak{M}| = W$, $R^{\mathfrak{M}} = R$ i $P^{\mathfrak{M}} = V(p)$ za svaki $p \in \Phi$.

Kako je definicija standardne translacije zapravo formalno u logici prvog reda zapisana definicija istinitosti modalne formule, lako se dokazuje sljedeća propozicija.

Propozicija 1.5. Neka je φ modalna formula i $\mathfrak{M}$ model. Tada vrijedi:

a) za svaki svijet $w \in W$ imamo: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \models ST_x(\varphi)[w]$

b) $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \models \forall x ST_x(\varphi)$

Koristeći prethodnu propoziciju, važna svojstva logike prvog reda možemo prenijeti u modalnu logiku i obratno.

Primjer 1.12. Modalna logika je kompaktna, tj. ako je Σ skup modalnih formula čiji je svaki konačan podskup ispunjiv, onda je Σ ispunjiv. To je posljedica kompaktnosti logike prvog reda i prethodne propozicije 1.5.

Naime, konačna ispunjivost skupa Σ povlači konačnu ispunjivost skupa $\{ST_x(\varphi) : \varphi \in \Sigma\}$, koji je stoga zbog kompaktnosti logike prvog reda ispunjiv, no onda opet propozicija 1.5 povlači da je Σ ispunjiv.

Slično se pokazuje da za modalnu logiku vrijedi analogon Löwenheim–Skolemovog teorema prema dolje, tj. ako skup formula ima model onda ima i prebrojiv model.

S druge strane, logika prvog reda je neodlučiva (Churchov teorem), no modalna logika je odlučiva, pa se pomoću standardne translacije mogu odrediti odlučivi fragmenti logike prvog reda.

Standardna translacija očito nije surjekcija. Štoviše, nije svaka formula logike prvog reda ekvivalentna standardnoj translaciji neke modalne formule. Naime, takve formule su nužno invarijantne na bisimulacije, što ne vrijedi za sve formule logike prvog reda.

Primjer 1.13. Formula $F(x) = \exists y R(y, x)$ nije invarijantna na bisimulacije. Naime, neka je $\mathfrak{M} = (\{a, b\}, \{(b, a)\}, V)$ i $\mathfrak{M}' = (\{a'\}, \emptyset, V')$, pri čemu je $V(p) = V'(p) = \emptyset$ za svaku propozicionalnu varijablu p. Tada je $Z = \{(a, a')\}$ bisimulacija. Lako je provjeriti da vrijedi $\mathfrak{M} \models F(x)[a]$ i $\mathfrak{M}' \not\models F(x)[a']$.

Bez dokaza istaknimo temeljni teorem modalne teorije korespondencije.

Teorem 1.3 (van Benthem)**.** Neka je $F(x)$ neka σ–formula. Tada je formula $F(x)$ ekvivalentna standardnoj translaciji neke modalne formule ako i samo ako je formula $F(x)$ invarijantna na bisimulacije.

1.10 Ultrafiltri

Radi definicije još jedne konstrukcije modela, ultrafilterskog proširenja, potreban nam je pojam ultrafiltra.

Definicija 1.21. Neka je $S \neq \emptyset$. *Ultrafilter* nad S je familija $F \subseteq \mathcal{P}(S)$ takva da vrijedi:

(1) $S \in F$

(2) F je zatvoren na konačne presjeke, tj. ako je $A \in F$ i $B \in F$, onda je i $A \cap B \in F$

(3) F je zatvoren na nadskupe, tj. ako je $A \in F$ i $A \subseteq B \subseteq S$, onda je i $B \in F$,

(4) $F \neq \mathcal{P}(S)$

(5) za svaki $A \subseteq S$ vrijedi: $A \in F$ ako i samo ako $S \setminus A \notin F$.

Kažemo da je ultrafilter *prebrojivo nepotpun* ako nije zatvoren na prebrojive presjeke.

Familija F za koju vrijede uvjeti (1)–(3) naziva se *filter*, a ako vrijedi i (4) tada familiju F nazivamo *pravi filter*.

Primijetimo da uvjet (4) zbog zatvorenosti na nadskupe možemo zamijeniti uvjetom $\emptyset \notin S$. Nadalje, za $x \in S$, familija svih podskupova skupa S koji sadrže x je očito ultrafilter, koji se zove *glavni filter* i označava s Π_x. Nije teško dokazati da ultrafilter nad beskonačnim skupom S nije glavni ako i samo ako sadrži samo beskonačne skupove, a to je ekvivalentno sa činjenicom da sadrži sve kofinitne podskupove skupa S. Odavde lako slijedi da je ultrafilter nad prebrojivim skupom, ako nije glavni filter, prebrojivo nepotpun. Ultrafilter koji nije glavni teško je konstruirati, ali sljedeća propozicija daje jednostavan dovoljan uvjet njegove egzistencije.

Propozicija 1.6. Neka je S neprazan skup i E familija njegovih podskupova koja ima svojstvo konačnih presjeka (tj. presjek svake njene konačne potfamilije je neprazan). Tada postoji ultrafilter nad S koji sadrži E.

Dokaz. Neka je $\mathcal{F}$ familija svih pravih filtera nad S koji sadrže E. Uočimo da je $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Naime, lako se vidi da je presjek svih filtera nad S koji sadrže E pravi filter. Familija $\mathcal{F}$ je parcijalno uređena inkluzijom. Neka je $\mathcal{L}$ proizvoljan lanac u $\mathcal{F}$. Lako je provjeriti da je unija svih članova lanca $\mathcal{L}$ također pravi filter koji sadrži E. Dakle, svaki lanac u $\mathcal{F}$ ima gornju među. Prema Zornovoj lemi, postoji maksimalni element $F \in \mathcal{F}$. Lako se vidi da je F traženi ultrafilter. Q.E.D.

Sve detalje o filtrima i ultrafiltrima možete vidjeti u nastavnom materijalu M. Vuković, Primijenjena logika, predavanja poslijediplomskog kolegija, PMF–MO, Zagreb, 2011. www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/applog-skripta-2011_0.pdf

1.11 Modalna saturacija

Vidjeli smo da postojanje bisimulacije između dva točkovna modela povlači njihovu modalnu ekvivalenciju. Za klasu modela K modela kažemo da ima *Hennessy-Milnerovo svojstvo* ili da je *Hennessy–Milnerova klasa* ako vrijedi i obrat, tj. ako za sve modele $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \in \mathsf{K}$ i za sve svjetove $w \in W$ i $w' \in W'$ vrijedi: ako su svjetovi w i w' modalno ekvivalentni onda postoji bisimulacija Z između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ takva da je wZw'.

Definicija 1.22. Za model $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ kažemo da je *modalno saturiran* ili *m–saturiran* ako za svaki $w \in W$ i svaki skup formula Σ vrijedi: ako je Σ konačno ispunjiv u $R[w] = \{v \in W : wRv\}$, onda je Σ ispunjiv u $R[w]$.

Propozicija 1.7. Svaka klasa m–saturiranih modela ima Hennessy–Milnerovo svojstvo.

Dokaz. Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ m–saturirani modeli. Za $w \in W$ i $w' \in W'$ stavimo wZw' ako su w i w' modalno ekvivalentni. Treba dokazati da je Z bisimulacija. Uvjet (at) je trivijalno zadovoljen.

Dokažimo da vrijedi uvjet (forth). Neka su svjetovi $w \in W$ i $w' \in W'$ modalno ekvivalentni i wRv. Treba dokazati da postoji svijet $v' \in W'$ modalno ekvivalentan sa svijetom v takav da je $w'R'v'$. Neka je Σ skup svih formula istinitih u svijetu v. Lako se vidi da je tada skup formula Σ konačno ispunjiv u $R'[w']$ (naime, na konačan skup formula može se primijeniti konjunkcija, a na tako dobivenu formulu operator $\Diamond$). Zbog m–saturiranosti skup formula Σ je ispunjiv u $R'[w']$, tj. postoji svijet v' takav da je $w'R'v'$ i sve formule istinite na svijetu v su istinite i na svijetu v'. Lako je provjeriti (primjenom već dokazanog na negaciju formule) da vrijedi i obrat, dakle svjetovi v i v' su modalno ekvivalentni.

Slično se dokaže i uvjet (back). Q.E.D.

Dakle, među modalno ekvivalentnim svjetovima m–saturiranih modela postoji bisimulacija.

1.12 Ultrafilterska proširenja

Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model. Podsjetimo se da smo za svaki $A \subseteq W$ sa $m_\Diamond(A)$ označali skup svih $w \in W$ za koje postoji $v \in A$ takav da je wRv.

Definicija 1.23. *Ultrafiltersko proširenje* modela $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ je model $\mathfrak{ue}\mathfrak{M} = (Uf(W), R^{\mathfrak{ue}}, V^{\mathfrak{ue}})$, gdje je:

a) $Uf(W)$ skup svih ultrafiltera nad W

b) $uR^{\mathfrak{ue}}v$ ako i samo ako za svaki $A \in v$ vrijedi $m_\Diamond(A) \in u$

c) $V^{\mathfrak{ue}}(p)$ skup svih ultrafiltera u takvih da je $V(p) \in u$, za svaku variajblu p.

Za svaki $A \subseteq W$ definira se i $m_\Box(A)$. To je skup svih svjetova $w \in W$ takvih da za svaki svijet $v \in W$ iz wRv slijedi $v \in A$. Lako se vidi da se relacija dostiživosti ultrafilterskog proširenja može ekvivalentno definirati pomoću funkcije $m_\Box$. Tada bi definicija relacije $R^{\mathfrak{ue}}$ izgledala ovako:

$$uR^{\mathfrak{ue}}v \text{ ako i samo ako } \{A \subseteq W : m_\Box(A) \in u\} \subseteq v$$

Propozicija 1.8. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model. Tada za svaki ultrafilter u nad W i svaku modalnu formulu φ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } V(\varphi) \in u$$

Posebno, svaki svijet $w \in W$ je modalno ekvivalentan glavnom ultrafiltru Π_w.

Dokaz. Prva tvrdnja dokazuje se indukcijom po složenosti formule. Bazu indukcije osigurava definicija valuacije $V^{\mathfrak{ue}}$. Korak u slučaju logičkih veznika jednostavna je posljedica definicijskih svojstava ultrafiltera. Dokažimo tvrdnju za formulu oblika $\Diamond\varphi$. Pretpostavimo $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\varphi$. Tada postoji v takav da vrijedi $uR^{\mathfrak{ue}}v$ i $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $V(\varphi) \in v$. Iz definicije relacije $R^{\mathfrak{ue}}$ slijedi $m_{\Diamond}(V(\varphi)) \in u$. Kako je $m_{\Diamond}(V(\varphi)) = V(\Diamond\varphi)$, imamo $V(\Diamond\varphi) \in u$, što je i trebalo dokazati.

Dokažimo sada obratnu implikaciju. Neka je φ proizvoljna formula za koju vrijedi $V(\Diamond\varphi) \in u$. Dovoljno je dokazati da skup $E = \{V(\varphi)\} \cup \{A \subseteq W : m_{\Box}(A) \in u\}$ ima svojstvo konačnih presjeka. Naime, tada se skup E može proširiti do nekog ultrafiltera v, pa vrijedi $V(\varphi) \in v$ i stoga prema pretpostavci indukcije imamo $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$. S druge strane, $\{A : m_{\Box}(A) \in u\} \subseteq v$ povlači $uR^{\mathfrak{ue}}v$, pa je $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\varphi$. Dokažimo, dakle, da skup E ima svojstvo konačnih presjeka. Lako se provjeri da je skup $\{A : m_{\Box}(A) \in u\}$ zatvoren na konačne presjeke. Stoga preostaje dokazati da vrijedi $V(\varphi) \cap A \neq \emptyset$ za svaki skup A takav da je $m_{\Box}(A) \in u$. Po pretpostavci je i $V(\Diamond\varphi) \in u$, pa je $V(\Diamond\varphi) \cap m_{\Box}(A) \neq \emptyset$. Neka je w_0 neki sviejt iz tog presjeka. Zbog $w_0 \in V(\Diamond\varphi)$ slijedi da postoji svijet w_1 takav da je $w_0 R w_1$ i $w_1 \in V(\varphi)$. S druge strane, kako je $w_0 \in m_{\Box}(A)$, to je $w_1 \in A$, pa je $w_1 \in V(\varphi) \cap A$, dakle taj presjek je zaista neprazan.

Iz upravo dokazane prve tvrdnje odmah slijedi da je $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \Pi_w \Vdash \varphi$ ekvivalentno sa $V(\varphi) \in \Pi_w$, tj. $w \in V(\varphi)$. To povlači $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$. Q.E.D.

Propozicija 1.9. Ultrafiltersko proširenje svakog modela je m–saturiran model.

Dokaz. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model, u ultrafilter nad W i Σ skup formula konačno ispunjiv na skupu svih $R^{\mathfrak{ue}}$–sljedbenika ultrafiltra u.

Neka je sa Σ' označen skup svih konjunkcija formula iz skupa Σ. Dokažimo da skup $E = \{V(\varphi) : \varphi \in \Sigma'\} \cup \{A \subseteq W : m_{\Box}(A) \in u\}$ ima svojstvo konačnih presjeka. Kako su skupovi $\{V(\varphi) : \varphi \in \Sigma'\}$ i $\{A : m_{\Box}(A) \in u\}$ zatvoreni na konačne presjeke, preostaje dokazati da za svaku formulu $\varphi \in \Sigma'$ i svaki $A \subseteq W$ takav da je $m_{\Box}(A) \in u$ vrijedi $V(\varphi) \cap A \neq \emptyset$. No, kako je $\varphi \in \Sigma'$, tada postoji ultrafilter v_{φ} takav da je $uR^{\mathfrak{ue}}v_{\varphi}$ i $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, v_{\varphi} \Vdash \varphi$, tj. $V(\varphi) \in v_{\varphi}$. S druge strane, zbog $m_{\Box}(A) \in u$ je $A \in v_{\varphi}$. Slijedi da je presjek $V(\varphi) \cap A \in v_{\varphi}$, pa je po definiciji ultrafiltra neprazan.

Stoga postoji ultrafilter v nad W koji sadrži E. Pritom je $uR^{\mathfrak{ue}}v$ i $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, v \Vdash \Sigma$. Dakle, Σ je ispunjiv na skupu $R^{\mathfrak{ue}}$–sljedbenika ultrafiltera u, što je i trebalo dokazati. Q.E.D.

1.13 Modalna definabilnost

Vidjeli smo primjere formula koje nisu valjane, ali su valjane na svim okvirima neke klase. Ako vrijedi i obrat, tj. da su svi okviri na kojima su dane formule valjane nužno u toj klasi, govorimo o modalnoj definabilnosti.

Definicija 1.24. Za klasu okvira K kažemo da je *modalno definabilna* ako postoji skup formula Σ takav da za svaki okvir $\mathfrak{F}$ vrijedi:

$$\mathfrak{F} \in \mathsf{K} \ \text{ ako i samo ako } \ \mathfrak{F} \Vdash \Sigma$$

Analogno se može definirati modalna definabilnost klasa modela.

Primjer 1.14. Klasa svih refleksivnih okvira je modalno definabilna formulom $\Box p \to p$ ili alternativno, formulom $p \to \Diamond p$. Često kratko kažemo da je refleksivnost modalno definabilna. Tranzitivnost je modalno definabilna formulom $\Box p \to \Box\Box p$, ali i $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$. Klasa svih okvira čija relacija dostiživosti je tranzitivna i inverzno dobro fundirana je modalno definabilna Löbovom formulom $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

1.14 Standardna translacija drugog reda

Uočimo da su, primjerice, refleksivnost i tranzitivnost, za koje smo u prethodnom primjeru vidjeli da su modalno definabilna, također i elementarna svojstva, za razliku od inverzne dobre fundiranosti. Iako su i mnoga druga modalno definabilna svojstva elementarna, ne postoji prirodna općenita veza između modalne definabilnosti klasa okvira i elementarnosti, nego između modalne definabilnosti i definabilnosti u logici drugog reda. Naime, definicija valjanosti okvira kvantificira po valuacijama, tj. po podskupovima okvira.

Nećemo detaljno govoriti o logici drugog reda, nego ćemo se osloniti samo na intuitivno razumijevanje da se dopušta kvantifikacija ne samo po individualnim varijablama, nego i po varijablama kojima se valuacijom pridružuju relacije na nosaču (u našem slučaju trebaju nam samo unarne relacije, tj. podskupovi), tj. umjesto signature σ koju smo koristili za standardnu translaciju sada imamo signaturu drugog reda u kojoj je svaki jednomjesni relacijski simbol $P \in \sigma$ sada varijabla drugog reda po kojoj se može kvantificirati. Samo R (uz jednakost) ostaje relacijski simbol, pa se okvir može promatrati kao struktura za tu signaturu.

Propozicija 1.10. Modalna formula φ je valjana na okviru $\mathfrak{F}$ ako i samo ako $\mathfrak{F} \models \forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x ST_x(\varphi)$, gdje su $P_1, \ldots, P_n$ varijable drugog reda koje odgovaraju propozicionalnim varijablama iz φ.

1.15 Nedefinabilnost

Ispuštajući dio definicije koji se odnosi na valuaciju, jasno je kako se definiraju osnovne konstrukcije okvira: disjunktna unija, generirani podokvir i ograničeni morfizam. Koristeći već dokazanu invarijantnost modalnih formula na analogne konstrukcije modela, lako se dokazuje sljedeća propozicija.

Propozicija 1.11. Disjunktna unija, generirani podokvir i surjektivni ograničeni morfizam čuvaju valjanost modalnih formula.

Ovo nam omogućuje dokazivanje nedefinabilnosti nekih svojstava.

Primjer 1.15. Irefleksivnost nije modalno definabilna. Naime, za Kripkeove okvire $\mathfrak{F} = (\{a,b\}, \{(a,b),(b,a)\})$ i $\mathfrak{F}' = (\{c\}, \{(c,c)\})$, sa $f(a) = f(b) = c$ dan je surjektivni ograničeni morfizam. Primijetimo da je okvir $\mathfrak{F}$ irefleksivan, a okvir $\mathfrak{F}'$ nije. Kada bi irefleksivnost bila modalno definabilna nekim skupom formula Σ, vrijedilo bi $\mathfrak{F} \Vdash \Sigma$. No, onda zbog očuvanja valjanosti pri ograničenom morfizmu vrijedilo bi i $\mathfrak{F}' \Vdash \Sigma$. To bi povlačilo da je i okvir $\mathfrak{F}'$ irefleksivan, a nije.

Analogno, koristeći disjunktnu uniju možemo dokazati da svojstvo konačnosti modela nije modalno definabilna. Koristeći generirane podokvire može se pokazati da klasa svih okvira, u kojima je svaki svijet dostiživ iz nekog svijeta, nije modalno definabilna.

Što se tiče ultrafilterskog proširenja okvira, lako se dokazuje da vrijedi očuvanje valjanosti u suprotnom smjeru.

Propozicija 1.12. Ultrafiltersko proširenje reflektira valjanost modalnih formula, tj. ako je $\mathfrak{ue}\mathfrak{F} \Vdash \varphi$, onda je $\mathfrak{F} \Vdash \varphi$.

Postoje svojstva koja nisu modalno definabilna, iako su očuvana na tri osnovne konstrukcije struktura.

Primjer 1.16. Promotrimo klasu svih okvira takvih da svaki svijet ima refleksivnog sljedbenika. Drugim riječima, radi se o elementarnoj klasi definiranoj formulom $\forall x \exists y (R(x,y) \wedge R(y,y))$. Lako se vidi da je to svojstvo očuvano na disjunktne unije, generirane podokvire i surjektivne ograničene morfizme. No, ta klasa nije modalno definabilna. Naime, za okvir $\mathfrak{F} = (\mathbb{N}, <)$ se jednostavno pokazuje da $\mathfrak{ue}\mathfrak{F}$ ima to svojstvo, a $\mathfrak{F}$ ga, naravno, nema.

Sljedeći teorem pokazuje da su dosad navedene konstrukcije dovoljne za karakterizaciju modalno definablinih svojstava među elementarnim svojstvima. Dokazat ćemo ga kasnije pomoću algebarske semantike. Za klasu okvira K kažemo da je *elementarna* ako postoji skup Σ formula prvog reda tako da za svaki okvir $\mathfrak{F}$ vrijedi sljedeća ekvivalencija: $\mathfrak{F} \in \mathsf{K}$ ako i samo ako $\mathfrak{F} \models \Sigma$.

Teorem 1.4 (Goldblatt-Thomason)**.** Elementarna klasa okvira je modalno definabilna ako i samo ako je zatvorena na disjunktne unije, generirane podokvire i surjektivne ograničene morfizme i reflektira ultrafilterska proširenja.

1.16 Sahlqvistove formule

Sada ćemo djelomično odgovoriti na obratno pitanje: koja modalno definabilna svojstva okvira su elementarna. Definirat ćemo Sahlqvistove formule. To nisu sve modalne formule koje definiraju takva svojstva, ali riječ je o širokoj klasi za koju je odgovarajuća formula prvog reda efektivno izračunljiva.

U nastavku ćemo pisati $\mathfrak{F}, w \Vdash \varphi$ ako je formula φ istinita na svijetu w za svaku valuaciju na okviru $\mathfrak{F}$.

Definicija 1.25. Modalna formula i formula prvog ili drugog reda su *(globalni) korespondenti* ako definiraju istu klasu okvira.

Modalna formula φ i formula $A(x)$ prvog ili drugog reda reda su *lokalni korespondenti* ako za svaki okvir $\mathfrak{F}$ i svaki svijet w vrijedi: $\mathfrak{F}, w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{F} \models A(x)[w]$.

Ako su formule φ i $A(x)$ lokalni korespondenti, onda su φ i $\forall x A(x)$ korespondenti. Uočimo da formula φ lokalno korespondira s $\forall P_1 \ldots \forall P_n ST_x(\varphi)$, gdje $P_1, \ldots, P_n$ odgovaraju propozicionalnim varijablama iz φ.

Definicija 1.26. Kažemo da je modalna formula φ *pozitivna* (*negativna*) *u* nekoj varijabli $p \in \Phi$ ako je svaki nastup propozicionalne varijable p u dosegu parnog (neparnog) broja negacija. Kažemo da je formula φ *pozitivna* (*negativna*) ako je pozitivna (negativna) u svakoj svojoj propozicionalnoj varijabli.

Kažemo da je modalna formula φ *rastuća* (*padajuća*) u nekoj varijabli p ako je njena istinitost očuvana na proširenja (suženja) valuacije $V(p)$ (dok su valuacije ostalih propozicionalnih varijabli nepromijenjene).

Važno je napomenuti da se u prethodnoj definiciji govori o dosegu parnog, odnosno neparnog broja negacija u formuli napisanoj u alfabetu osnovnog modalnog jezika, ne koristeći definirane pokrate (npr. $p \to q$ je negativna u p, jer je pokrata za $\neg p \vee q$).

Sljedeće tvrdnje se lako dokazuju simultano indukcijom po složenosti formule.

Lema 1.1. Ako je formula φ pozitivna (negativna) u varijabli p onda je formula φ rastuća (padajuća) u varijabli p.

Definicija 1.27. Kažemo da je modalna formula φ *uniformna* ako je pozitivna ili negativna u svakoj varijabli koja nastupa u formuli φ.

Propozicija 1.13. Svaka uniformna formula ima korespondenta prvog reda.

Ne dajemo dokaz prethodne propozicije. U sljedećem primjeru ilustriramo algoritam kojim se standardna translacija drugog reda uniformne formule prevodi u korespondenta prvog reda.

Primjer 1.17. Promotrimo formulu $\varphi = \Diamond\Box p$. Ona je pozitivna u varijabli p i stoga je rastuća. Odredimo standardnu translaciju: $ST_x(\varphi) = \exists y(R(x,y) \wedge ST_y(\Box p))$ $= \exists y(R(x,y) \wedge \forall z(R(y,z) \to P(z)))$. Dakle, formula φ lokalno korespondira s formulom drugog reda $\forall P \exists y(R(x,y) \wedge \forall z(R(y,z) \to P(z)))$. Intuitivno, ova formula kaže da formula φ vrijedi za svaku valuaciju propozicionalne varijable p, pa posebno i za $V(p) = \emptyset$. Ali, ovu minimalnu valuaciju možemo reprezentirati supstituiranjem svake potformule oblika $P(x_i)$ potformulom $x_i \neq x_i$ i eliminiranjem kvantifikatora $\forall P$. Dobivamo: $\exists y(R(x,y) \wedge \forall z(R(y,z) \to z \neq z))$, što možemo pojednostaviti na $\exists y(R(x,y) \wedge \forall z(\neg R(y,z)))$. Očito, formula $\forall P\, ST_x(\varphi)$ povlači tu formulu kao svoju instancu. S druge strane, kako je formula φ rastuća, a ova instanca je minimalna, ove formule su zapravo ekvivalentne. Dakle, formula $\exists y(R(x,y) \wedge \forall z(\neg R(y,z)))$ je lokalni korespondent formule φ, pa je formula $\forall x \exists y(R(x,y) \wedge \forall z(\neg R(y,z)))$ njen globalni korespondent.

Definicija 1.28. *Vrlo jednostavna Sahlqvistova formula* je svaka formula oblika $\varphi \to \psi$ tako da je formula ψ pozitivna, a formula φ je izgrađena samo od konstanti $\bot$ i $\top$, te propozicionalnih varijabli, pri čemu se koriste samo veznik $\wedge$ i modalni operator $\Diamond$.

Propozicija 1.14. Svaka vrlo jednostavna Sahlqvistova formula ima korespondenta prvog reda.

Ideja dokaza je uzeti minimalnu valuaciju za koju je φ istinita. Kako je formula ψ pozitivna, tada formula $\varphi \to \psi$ ostaje istinita za sva proširenja te minimalne valuacije. I ovdje ćemo ispustiti dokaz i samo za ilustraciju promotriti jedan primjer.

Primjer 1.18. Znamo da formula $\Box p \to p$ definira refleksivnost.[1] To je vrlo jednostavna Sahlqvistova formula. Odredimo njenog globalnog korespondenta.

Standardna translacija drugog reda te formule je formula $\forall P(P(x) \to \exists y(R(x,y) \wedge P(y)))$. Minimalna instanca koja čini formulom $P(x)$ istinitim je ona kojom se simbolu P pridružuje jednočlan skup (koji sadrži svijet pridružen valuacijom varijabli x). Dakle, eliminirat ćemo kvantifikator drugog reda i supstituirati svaku potformulu oblika $P(x_i)$ potformulom $x_i = x$. Dobivamo $x = x \to \exists y(R(x,y) \wedge y = x)$, što se pojednostavljuje na $R(x,x)$. Dakle, formula $\forall x(R(x,x))$ je globalni korespondent, što smo i očekivali.

Sljedeći primjer ilustrira pripremni korak u algoritmu kada imamo kvantifikatore u antecendenti, nakon čega nastavljamo kao u prethodnom primjeru.

Primjer 1.19. U ovom primjeru pokazujemo da modalna formula $\Diamond p \to \Diamond\Diamond p$ definira gustoću. Navedena formula lokalno korespondira sa $\forall P(\exists y(R(x,y) \wedge P(y)) \to \exists z(R(x,z) \wedge \exists z'(R(z,z') \wedge P(z'))))$. Budući da je formula $(\exists x A(x) \to B) \leftrightarrow \forall x(A(x) \to B)$ valjana, tada dobivamo $\forall P \forall y((R(x,y) \wedge P(y)) \to \exists z(R(x,z) \wedge \exists z'(R(z,z') \wedge P(z'))))$. Sada nastavljamo kao prije: supstituiramo svaku atomarnu formulu $P(x_i)$ sa $x_i = y$, što je sada potrebna minimalna instanca. Tako dobivamo formulu $\forall y((R(x,y) \wedge y = y) \to \exists z(R(x,z) \wedge \exists z'(R(z,z') \wedge z' = y)))$. Lako je vidjeti da se pojednostavljenjem dobiva $\forall y(R(x,y) \to \exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)))$. Zaista, univerzalni zatvarač $\forall x \forall y(R(x,y) \to \exists z(R(x,z) \wedge R(z,y)))$ je formula gustoće.

Definicija 1.29. *Jednostavna Sahlqvistova formula* je svaka modalna formula oblika $\varphi \to \psi$ tako da je formula ψ pozitivna, a formula φ je izgrađena samo od konstanti $\bot$ i $\top$, te formula oblika $\Box^k p$, gdje je $k \in \mathbb{N}$ i $p \in \Phi$, pri čemu koristimo samo veznik $\wedge$ i modalni operator $\Diamond$.

Propozicija 1.15. Svaka jednostavna Sahlqvistova formula ima korespondenta prvog reda.

I ovdje ćemo ideju dokaza ilustrirati primjerima.

---

[1] To ćemo kasnije dokazati u propoziciji 2.2 na strani 32.

Primjer 1.20. Podsjetimo se da formula $\Box p \to \Box\Box p$ definira tranzitivnost.[2] Njen lokalni korespondent drugog reda je sljedeća formula:

$$\forall P(\forall y(R(x,y) \to P(y)) \to \forall z(R(x,z) \to \forall z'(R(z,z') \to P(z'))))$$

Ovdje je potrebna minimalna valuacija ona u kojoj je simbolu P pridružen skup svih R–sljedbenika svijeta pridruženog varijabli x. Dakle, odgovarajuća supstitucija svake potformule $P(x_i)$ je $R(x,x_i)$. Tako dobivamo $\forall y(R(x,y) \to R(x,y)) \to \forall z(R(x,z) \to \forall z'(R(z,z') \to R(x,z')))$. To se pojednostavljuje na $\forall z(R(x,z) \to \forall z'(R(z,z') \to R(x,z')))$. Nakon univerzalnog zatvorenja dobivamo uvjet tranzitivnosti, što smo i očekivali.

Primjer 1.21. Lokalni korespondent drugog reda formule $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ je

$$\forall P(\exists y(R(x,y) \land \forall z'(R(y,z') \to P(z'))) \to \forall z(R(x,z) \to \exists z''(R(z,z'') \land P(z'')))).$$

Slijede koraci kao u prethodnim primjerima:

$$\forall P \forall y((R(x,y) \land \forall z'(R(y,z') \to P(z'))) \to \forall z(R(x,z) \to \exists z''(R(z,z'') \land P(z'')))),$$

$$\forall y((R(x,y) \land \forall z'(R(y,z') \to R(y,z'))) \to \forall z(R(x,z) \to \exists z''(R(z,z'') \land R(y,z'')))).$$

Pojednostavljujemo: $\forall y(R(x,y) \to \forall z(R(x,z) \to \exists z''(R(z,z'') \land R(y,z''))))$, odnosno ekvivalentno $\forall y \forall z((R(x,y) \land R(x,z)) \to \exists z''(R(z,z'') \land R(y,z'')))$.

Definicija 1.30. *Sahlqvistova implikacija* je formula oblika $\varphi \to \psi$ tako da je formula ψ pozitivna, a formula φ je izgrađena samo od konstatni $\bot$ i $\top$, te formula oblika $\Box^k p$, gdje je $k \in \mathbb{N}$ i $p \in \Phi$, i negativnih formula, koristeći samo veznike $\land$ i $\lor$, te modalnog operatora $\Diamond$.

Sahlqvistova formula je svaka formula izgrađena od Sahlqvistovih implikacija, koristeći $\Box$ i $\land$ slobodno, a $\lor$ samo među formulama koje nemaju zajedničkih propozicionalnih varijabli.

Lema 1.2. Neka su φ i ψ modalne formule, te neka su $A(x)$ i $B(x)$ formule prvog reda.

a) Ako formule φ i $A(x)$ lokalno korespondiraju, onda i formule $\Box\varphi$ i $\forall y(R(x,y) \to A(y/x))$ lokalno korespondiraju;

b) Ako modalna formula φ lokalno korespondira s formulom A, te modalna formula ψ lokalno korespondira s formulom B, tada vrijedi:

   b_1) formula $\varphi \land \psi$ lokalno korespondira s formulom $A \land B$;

   b_2) ako modalne formule φ i ψ nemaju zajedničkih propozicionalnih varijabli, onda formula $\varphi \lor \psi$ lokalno korespondira s formulom $A \lor B$.

[2] To kasnije dokazujemo u propoziciji 2.1 na strani 31.

Teorem 1.5 (Sahlqvistov teorem korespondencije)**.**
Svaka Sahlqvistova formula ima korespondenta prvog reda.

Prema prethodnoj lemi, dovoljno je dokazati tvrdnju za Sahlqvistove implikacije. I ovdje ćemo samo ideju dokaza ilustrirati na primjeru.

Primjer 1.22. Formula $(p \wedge \Diamond\neg p) \to \Diamond p$ ima lokalnu standardnu translaciju drugog reda $\forall P(P(x) \wedge \exists y(R(x,y) \wedge \neg P(y)) \to \exists z(R(x,z) \wedge P(z)))$. Nakon već poznatog koraka $\forall P \forall y(P(x) \wedge R(x,y) \wedge \neg P(y) \to \exists z(R(x,z) \wedge P(z)))$, prebacujemo negativnu potformulu (koja time postaje pozitivna!) koristeći ekvivalenciju $((A \wedge B) \to C) \leftrightarrow (A \to (\neg B \vee C))$ i nakon toga dobivamo $\forall P \forall y(P(x) \wedge R(x,y) \to P(y) \vee \exists z(R(x,z) \wedge P(z)))$. Završavamo odgovarajućom supstitucijom kao i ranije i tako dobivamo $\forall y(x = x \wedge R(x,y) \to y = x \vee \exists z(R(x,z) \wedge z = x))$. To možemo pojednostaviti na $\forall y(R(x,y) \to y = x \vee R(x,x))$.

Poglavlje 2

Potpunost. Kanonski modeli. Nepotpunost

U ovom poglavlju želimo istaknuti jedan od najvažnijih razloga zašto se uopće razmatra algebarska semantika modalne logike: to je nepotpunost nekih modalnih sistema u odnosu na relacijsku semantiku. Prvo ćemo dati skice dokaza potpunosti nekih normalnih modalnih logika u odnosu na relacijsku Kripkeovu semantiku. Razmatrat ćemo samo metodu kanonskih modela. Dokazat ćemo da je jedan modalni sistem nepotpun u odnosu na relacijsku semantiku.

2.1 Potpunost sistema K

Na početku je dobro pogledati skicu dokaza potpunosti za logiku sudova. Primjerice, jedna takva skica je u materijalima s predavanja T. Perkov, M. Vuković, *Semantike logika dokazivosti i interpretabilnosti*, PMF–MO, Zagreb, 2017. (navedene materijale možete preuzeti sa sljedeće mrežne adrese:
https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures
/00-predavanja-doktorski-2016-17.pdf).

Dok je detaljan dokaz, primjerice, u knjizi M. Vuković, *Matematička logika*, Element, 2009.

Ako pojam izvoda u normalnoj modalnoj logici definiramo sasvim analogno kao u logici sudova, tada ne vrijedi teorem dedukcije. Iz tog razloga razmatra se malo modificirani pojma izvoda koji navodimo u sljedećoj definiciji.

Definicija 2.1. Neka je S skup formula i F neka formula. Kažemo da je formula F izvediva iz skupa S u sistemu **K** ako vrijedi $\vdash_K F$ ili postoje formule $A_1, \ldots, A_n \in S$ tako da $\vdash_K (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to F$. Ako je formula F izvediva iz skupa S u sistemu **K** tada to označavamo sa $S \vdash_K F$.

Teorem 2.1 (Teorem dedukcije za sistem **K**).
Ako $S \cup \{A\} \vdash_K B$ tada $S \vdash_K A \to B$.

Dokaz. Iz pretpostavke $S \cup \{A\} \vdash_K B$ i definicije izvoda slijedi da su moguća sljedeća dva slučaja:

a) $\vdash_K B$

b) postoje formule $A_1, \ldots, A_n \in S \cup \{A\}$ takve da vrijedi $\vdash_K (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$.

Promotrimo svaki slučaj posebno. Ako vrijedi $\vdash_K B$, tada iz činjenica da je $B \to (A \to B)$ tautologija i da je svaka tautologija aksiom sistema **K**, lako slijedi $\vdash_K A \to B$.

Promotrimo sada drugi slučaj b). Tu razlikujemo dva podslučaja:

(i) $A \in \{A_1, \ldots, A_n\}$

(ii) $A \notin \{A_1, \ldots, A_n\}$

Promotrimo prvo podslučaj (i). Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $A = A_n$ i $\{A_1, \ldots, A_{n-1}\} \subseteq S$. Sada pretpostavku b) možemo zapisati u obliku $\vdash_K (A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1} \wedge A) \to B$. Pošto je svaka formula oblika $((F \wedge G) \to H) \to (F \to (G \to H))$ tautologija tada je to i formula $((A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1} \wedge A) \to B) \to ((A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}) \to (A \to B))$. Primjenom te tautologije i pravila izvoda modus ponens stoga slijedi $\vdash_K (A_1 \wedge \ldots \wedge A_{n-1}) \to (A \to B)$, tj. $S \vdash_K A \to B$.

Promotrimo sada podslučaj (ii). Primijetimo prvo da su formule $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge A) \to (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$ i $((A \to B) \to (B \to C)) \to (A \to C)$ tautologije. Sada iz pretpostavke $\vdash_K (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B$ primjenom pravila izvoda modus ponens slijedi $\vdash_K (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge A) \to B$. Dalje postupamo kao u podslučaju (i). Q.E.D.

Definicija 2.2. Za skup formula S kažemo da je konzistentan u sistemu **K** ako vrijedi $S \nvdash_K \bot$. Inače kažemo da je skup S inkonzistentan.

Lema 2.1. Vrijede sljedeće tvrdnje:

a) Svaki podskup konzistentnog skupa je konzistentan. Svaki nadskup inkonzistentnog skupa je inkonzistentan;

b) Skup S je konzistentan ako i samo ako ne postoji formula F tako da vrijedi $S \vdash_K F$ i $S \vdash_K \neg F$;

c) Skup S je konzistentan ako i samo ako svaki konačan podskup skupa S je konzistentan;

d) Skup S je konzistentan ako i samo ako postoji formula F tako da vrijedi $S \nvdash_K F$;

e) Ako $S \nvdash_K F$ tada je skup $S \cup \{\neg F\}$ konzistentan;

f) Ako $S \nvdash_K \neg F$ tada je skup $S \cup \{F\}$ konzistentan;

g) Ako $S \vdash_K F$ i skup S je konzistentan tada je i skup $S \cup \{F\}$ konzistentan.

Definicija 2.3. Za skup formula S kažemo da je maksimalno konzistentan u sistemu **K** ako je konzistentan i svaki njegov pravi nadskup je inkonzistentan.

Ako je $(W, R, \Vdash)$ Kripkeov model i $w \in W$ tada je skup $\{F : w \Vdash F\}$ maksimalno konzistentan.

Lema 2.2. Neka je S neki maksimalno konzistentan skup. Tada za sve formule A i B vrijedi:

a) Ako $A, A \to B \in S$ tada $B \in S$;

b) $A \in S$ ili $\neg A \in S$;

c) Ako $\vdash_K A$ tada $A \in S$;

d) $\neg A \in S$ ako i samo ako $A \notin S$;

e) $A \wedge B \in S$ ako i samo ako $A \in S$ i $B \in S$;

f) $A \vee B \in S$ ako i samo ako $A \in S$ ili $B \in S$.

Lema 2.3 (Lindenbaumova lema za sistem **K**).
Za svaki konzistentan skup postoji maksimalno konzistentan nadskup.

Definicija 2.4. Za Kripkeov model $(W, R, \Vdash)$ kažemo da je **kanonski model** ako vrijedi:

a) W je skup svih maksimalno konzistentnih skupova;

b) wRu ako i samo ako za svaku formulu F činjenica $F \in u$ povlači $\Diamond F \in w$;

c) $w \Vdash P$ ako i samo ako $P \in w$, za svaku propozicionalnu varijablu P.

Lema 2.4. Neka je $(W, R, \Vdash)$ kanonski model. Tada za sve svjetove $w, u \in W$ vrijedi:

$$wRu \text{ ako i samo ako za svaku formulu } F \text{ činjenica } \Box F \in w \text{ povlači } F \in u.$$

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi wRu, te neka je F formula tako da imamo $F \notin u$. Iz leme 2.2 slijedi $\neg F \in u$. Sada wRu, $\neg F \in u$ i definicija relacije R u kanonskom modelu povlače $\Diamond\neg F \in w$. Pošto je w konzistentan skup tada $\neg\Diamond\neg F \notin w$, tj. $\Box F \notin w$.

Dokažimo sada obrat. Neka su w i u maksimalno konzistentni skupovi za koje ne vrijedi wRu. Iz definicije relacije dostiživosti u kanonskom modelu tada slijedi da postoji formula F tako da vrijedi $F \in u$ i $\Diamond F \notin w$. Sada $\Diamond F \notin w$ i lema 2.2 povlače $\neg\Diamond F \in w$. Lako je vidjeti da vrijedi $\vdash_K \neg\Diamond F \to \Box\neg F$. Iz leme 2.2 tada slijedi $\neg\Diamond F \to \Box\neg F \in w$. Sada ovo posljednje i prije dokazana činjenica $\neg\Diamond F \in u$, te lema 2.2, povlače $\Box\neg F \in w$. Pošto imamo $F \in u$ tada očito $\neg F \notin u$. Rezimirajmo: pretpostavka da ne vrijedi wRu povlači da postoji formula F tako da vrijedi $\Box\neg F \in w$ i $\neg F \notin u$. Q.E.D.

Lema 2.5 (Lema o egzistenciji za sistem **K**).
Neka je $(W, R, \Vdash)$ kanonski model, te $w \in W$ proizvoljan svijet. Ako je F formula tako da $\Diamond F \in w$ tada postoji svijet $u \in W$ tako da wRu i $F \in u$.

Dokaz. Definiramo $v^- = \{F\} \cup \{G : \Box G \in w\}$. Pretpostavimo da je skup v^- inkonzistentan. Tada za svaku formulu A vrijedi $v^- \vdash_K A$, a onda posebno $v^- \vdash_K \neg F$. Iz definicije izvoda slijedi da su moguća sljedeća dva slučaja:

a) $\vdash_K \neg F$

b) postoje formule $A_1, \ldots, A_n \in v^-$ tako da vrijedi $\vdash_K (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to \neg F$.

Ako $\vdash_K \neg F$ tada očito $\vdash_K \Box\neg F$, a onda lema 2.2 povlači $\Box\neg F \in w$. No, iz $\Diamond F \in w$ slijedi $\neg\Box\neg F \in w$, pa je skup w inkonzistentan što je suprotno pretpostavci.

Promotrimo sada slučaj b). Primjenom pravila generalizacije i aksioma distributivnosti slijedi da vrijedi $\vdash_K (\Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n) \to \Box\neg F$. Iz činjenice $A_1, \ldots, A_n \in v^-$ i definicije skupa v^- slijedi $\Box A_1, \ldots, \Box A_n \in w$. Iz leme 2.2 slijedi $\Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n \in w$. Sada $\vdash_K (\Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n) \to \Box\neg F$, $\Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n \in w$ i lema 2.2 povlače $\Box\neg F \in w$. Pošto je po pretpostavci $\Diamond F \in w$ tada dobivamo da je skup w inkonzistentan, što je nemoguće.

Time smo dokazali da je skup formula v^- konzistentan. Iz Lindenbaumove leme slijedi da postoji maksimalno konzistentan skup $u \in W$ tako da vrijedi $v^- \subseteq u$. Pošto $F \in v^-$ tada $F \in u$.

Iz definicije skupa v^- slijedi da za svaku formulu G za koju je $\Box G \in w$ imamo $G \in v^- \subseteq u$. Iz leme 2.4 slijedi wRu. Q.E.D.

Lema 2.6 (Lema o istinitosti za sistem **K**).
Neka je $(W, R, \Vdash)$ kanonski model. Tada za svaki svijet $w \in W$ i svaku formulu F vrijedi:

$$w \Vdash F \text{ ako i samo ako } F \in w.$$

Dokaz. Tvrdnju leme dokazujemo indukcijom po složenosti formule F. Za ilustraciju promatramo samo u koraku indukcije slučaj $F \equiv \Diamond G$. Primijetimo prvo da vrijedi sljedeće:

$$w \Vdash \Diamond G \Leftrightarrow \exists u(wRu \ \& \ u \Vdash G) \Leftrightarrow \text{(pret. ind.)} \ \exists u(wRu \ \& \ G \in u)$$

Iz wRu i $G \in u$, te definicije relacije dostiživosti u kanonskom modelu, slijedi $\Diamond G \in w$.

Obrat slijedi direktno iz leme o egzistenciji. Q.E.D.

Teorem 2.2 (Teorem potpunosti za sistem **K**).
Ako je F valjana formula tada $\vdash_K F$.

Dokaz. Pretpostavimo $\nvdash_K F$. Iz leme 2.1 tada slijedi da je skup $\{\neg F\}$ konzistentan. Iz Lindenbaumove leme slijedi da postoji maksimalno konzistentan skup w tako da vrijedi $\neg F \in w$. Iz leme o istinitosti slijedi $w \nVdash F$, pa F nije valjana formula. Q.E.D.

2.2 Potpunost nekih drugih modalnih logika

Ako je Λ neka modalna logika tada s $(W^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$ označavamo pripadni kanonski model (elementi skupa W^Λ su maksimalno Λ–konzistentni skupovi)[1]

Prvo proširenje sistema **K** koje promatramo je modalna logika **K4**. Nju dobivamo dodavanjem formule $\Box p \to \Box\Box p$ kao novog aksioma sistemu **K**. To kratko označavamo ovako: $\mathbf{K4} = \mathbf{K}\ +\ \Box p \to \Box\Box p$. Primijetimo da smo mogli sistem **K4** defnirati i ovako $\mathbf{K4} = \mathbf{K}\ +\ \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$, jer imamo aksiom dualnosti.

Propozicija 2.1. Za svaki Kripkeov okvir $\mathcal{F}$ vrijedi:

$$\mathcal{F} \Vdash \Box p \to \Box\Box p \text{ ako i samo ako okvir } \mathcal{F} \text{ je tranzitivan.}$$

Dokaz. Neka je formula $\Box p \to \Box\Box p$ valjana na okviru $\mathcal{F} = (W, R)$. Pretpostavimo da relacija R nije tranzitivna. Tada postoje svjetovi $w, u, v \in W$ takvi da wRu, uRv, te ne vrijedi wRv. Na okviru $\mathcal{F}$ definiramo relaciju forsiranja $\Vdash$ ovako: $u \Vdash p$ ako i samo ako wRu, za svaku propozicionalnu varijablu p. Tada vrijedi $w \Vdash \Box p$, a onda zbog valjanosti formule $\Box p \to \Box\Box p$ na okviru $\mathcal{F}$ posebno vrijedi $w \Vdash \Box\Box p$. Kako je wRu, imamo $u \Vdash \Box p$, a zbog uRv tada $v \Vdash p$. No prema definiciji od $\Vdash$, mora biti wRv, što je u kontradikciji s pretpostavkom da ne vrijedi wRv.

Pretpostavimo da je R tranzitivna. Neka je $\Vdash$ proizvoljna relacija forsiranja na okviru $\mathcal{F}$. Pretpostavimo da za neki $w \in W$ vrijedi $w \Vdash \Box p$. Tvrdimo da tada $w \Vdash \Box\Box p$. Neka je wRu. Tada za $v \in W$ takav da uRv, zbog tranzitivnosti od R vrijedi wRv, a onda zbog $w \Vdash \Box p$, vrijedi $v \Vdash p$. Kako je v bio proizvoljan svijet, tada imamo $u \Vdash \Box p$, a zbog proizvoljnosti svijeta u slijedi $w \Vdash \Box\Box p$. Q.E.D.

Teorem 2.3. Logika **K4** je potpuna u odnosu na klasu svih tranzitivnih okvira.

Dokaz. Neka je F modalna formula za koju vrijedi $\mathbf{K4} \not\vdash F$. Tada je skup $\{\neg F\}$ **K4**–konzistentan. Iz Lindenbaumove leme (za **K4**!) slijedi da postoji maksimalno **K4**–konzistentan skup w tako da vrijedi $\neg F \in w$. Iz leme o istinitosti (za **K4**!) slijedi $(W^{\mathbf{K4}}, R^{\mathbf{K4}}, V^{\mathbf{K4}}), w \not\Vdash F$.

Dokažimo da je kanonski model $(W^{\mathbf{K4}}, R^{\mathbf{K4}}, V^{\mathbf{K4}})$ tranzitivan. Neka su $x, y, z \in W^{\mathbf{K4}}$ takvi da vrijedi $xR^{\mathbf{K4}}yR^{\mathbf{K4}}z$. Neka je A formula tako da vrijedi $A \in z$. Tada iz $yR^{\mathbf{K4}}z$ slijedi $\Diamond A \in y$. Zatim, iz $xR^{\mathbf{K4}}y$ slijedi $\Diamond\Diamond A \in x$. Budući da je x maksimalni **K4**–konzistentni skup, te vrijedi $\vdash_{\mathbf{K4}} \Diamond\Diamond A \to \Diamond A$, a onda i $\Diamond\Diamond A \to \Diamond A \in x$. Sada ovo posljednje i $\Diamond\Diamond A \in x$ povlače $\Diamond A \in x$.

Iz prethodne propozicije slijedi da je kanonski model $(W^{\mathbf{K4}}, R^{\mathbf{K4}}, V^{\mathbf{K4}})$ jedan model za logiku **K4**. Q.E.D.

[1] Ovdje nećemo posebno isticati definiciju Λ–konzistentnog skupa, te navoditi tvrdnje o svojstvima Λ–konzistentnih skupova. Prilikom razmatranja sistema **K** mogli smo sve pojmove definirati za općenitu normalnu modalnu logiku Λ. Zatim, sve tvrdnje o (maksimalno)konzistentnim skupovima vrijede za svaku normalnu logiku, a ne samo za sistem **K**. Dokazi su sasvim analogni dokazima u logici sudova.

Modalni sistem **T** dobivamo dodavanjem novog aksioma $\Box p \to p$ modalnom sistemu **K**. To kratko zapisujemo ovako: $\mathbf{T} = \mathbf{K} \ + \ \Box p \to p$.

Propozicija 2.2. Za svaki Kripkeov okvir $\mathcal{F}$ vrijedi:

$$\mathcal{F} \Vdash \Box p \to p \text{ ako i samo ako okvir } \mathcal{F} \text{ je refleksivan.}$$

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je formula $\Box p \to p$ valjana na okviru (W, R) i neka je $w \in W$. Definiramo relaciju forsiranja: $u \Vdash p \ \Leftrightarrow \ wRu$, za svaku propozicionalnu varijablu p. Iz definicije relacije $\Vdash$ očito je da $w \Vdash \Box p$. Budući da je formula $\Box p \to p$ valjana, imamo $w \Vdash \Box p \to p$, a onda $w \Vdash p$, pa mora biti wRw. Dakle, relacija R je refleksivna.

Obratno, ako je relacija R refleksivna, tada za proizvoljnu relaciju forsiranja $\Vdash$ i $w \in W$ imamo da ako $w \Vdash \Box p$, tada zbog wRw mora biti $w \Vdash p$. Odnosno, vrijedi $w \Vdash \Box p \to p$. Dakle, formula $\Box p \to p$ je valjana na okviru $\mathcal{F}$. Q.E.D.

Teorem 2.4. Logika **T** je potpuna u odnosu na klasu svih refleksivnih okvira.

Promotrimo još jedan modalni sistem: $\mathbf{KD} = \mathbf{K} \ + \ \Box p \to \Diamond p$

Propozicija 2.3. Za svaki Kripkeov okvir $\mathcal{F}$ vrijedi:

$$\mathcal{F} \vdash \Box p \to \Diamond p \text{ ako i samo ako okvir } \mathcal{F} \text{ je desno neograničen.}$$

Teorem 2.5. Logika **KD** je potpuna u odnosu na klasu svih desno neograničenih okvira.

Sljedeći modalni sistem koji razmatramo je definiran sa $\mathbf{S4} = \mathbf{KT4} = \mathbf{K} \ + \ \Diamond\Diamond p \to \Diamond p \ + \ p \to \Diamond p$.

Teorem 2.6. Logika **S4** je potpuna u odnosu na klasu svih refleksivnih i tranzitivnih okvira.

Sa **K1.1** je označena sljedeća normalna modalna logika: $\mathbf{K1.1} = \mathbf{K} \ + \ \Diamond p \to \Box p$

Teorem 2.7. Logika **K1.1** je adekvatna i potpuna u odnosu na klasu svih okvira (W, R) gdje je R parcijalna funkcija.

Konačno, definiramo: $\mathbf{S4.3} = \mathbf{S4} \ + \ \Diamond p \land \Diamond q \to \Diamond(p \land \Diamond q) \lor \Diamond(p \land q) \lor \Diamond(\Diamond p \land q)$

Teorem 2.8. Logika **S.4.3** je adekvatna i potpuna u odnosu na klasu svih okvira (W, R) gdje je R refleksivna, tranzitivna i nema grananja nadesno.
(Relacija R nema grananja nadesno ako vrijedi:

$$\forall x \forall y \forall z (xRy \land xRz \to yRz \lor y = z \lor zRy \ )$$

Zadatak. Neka je $\mathbf{S5} = \mathbf{KT4B} = \mathbf{K} \ + \ \Diamond\Diamond p \to \Diamond p \ + \ p \to \Diamond p \ + \ p \to \Box\Diamond p$. Odredite klasu okvira za koju je normalna modalna logika **S5** adekvatna i potpuna.

2.3 Nepotpunost

U ovoj točki navest ćemo neke normalne modalne logike koje nisu potpune u odnosu na relacijsku semantiku. Prvo razmatramo logiku dokazivosti **GL**, a onda njeno proširenje **GH**.

Definicija 2.5. *Logika dokazivosti* **GL** (Gödel–Löb) je proširenje modalnog sistema **K** sa shemom aksioma $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ koju nazivamo *Löbova formula.*

Teorem 2.9 (D. de Jongh, S. Kripke, G. Sambin)**.**
Vrijedi $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box p \to \Box\Box p$.

Za Kripkeov okvir $\mathcal{F} = (W, R)$ kažemo da je *inverzno dobro fundiran* ako ne postoji niz svjetova (x_n) tako da vrijedi $x_1 R x_2 R x_3 \ldots$

Propozicija 2.4. Za svaki Kripekov okvir $\mathcal{F} = (W, R)$ vrijedi:

$\mathcal{F} \Vdash \Box(\Box p \to p) \to \Box p$ ako i samo ako
relacija R je tranzitivna i inverzno dobro fundirana

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je formula $\Box\ (\Box\ p \to p) \to \Box\ p$ valjana na okviru $\mathcal{F}$. Tada su i sve instance sheme $\Box\ (\Box\ A \to A) \to \Box\ A$ valjane na tom okviru. Iz toga lako slijedi (indukcijom po duljini dokaza) da su i svi teoremi sistema **GL** valjani na okviru $\mathcal{F}$. Iz de Jongh, Kripke, Sambinovog teorema znamo da vrijedi $\vdash_{\mathbf{GL}} \Box\ p \to \Box\ \Box\ p$. Iz toga slijedi da je formula $\Box\ p \to \Box\ \Box\ p$ valjana na okviru $\mathcal{F}$. Iz propozicije 2.1 slijedi da je relacija R tranzitivna.

Pretpostavimo sada da relacija R nije inverzno dobro fundirana. Tada postoji niz (x_n) u skupu W takav da vrijedi: $x_1 R x_2 R x_3 \ldots$. Definiramo valuaciju $\Vdash$ na okviru (W, R) ovako: $w \Vdash p \iff (\forall n \in \mathbb{N}) w \neq x_n$. Tvrdimo da vrijedi $x_1 \nVdash \Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Neka je $x \in W$ proizvoljan svijet za kojeg vrijedi $x_1 R x$ (takav svijet x postoji, jer smo pretpostavili da vrijedi $x_1 R x_2 R x_3 \ldots$). Ako $x \Vdash p$ tada očito $x \Vdash \Box p \to p$. Ako $x \nVdash p$ tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da $x = x_n$. No, iz $x_n R x_{n+1}$ i $x_{n+1} \nVdash p$ slijedi $x_n \nVdash \Box p$. Time imamo $x \Vdash \Box p \to p$, pa smo dokazali da vrijedi $x_1 \Vdash \Box(\Box p \to p)$. Očito $x_1 \nVdash \Box p$ (jer, primjerice, $x_1 R x_2$ i $x_2 \nVdash p$). Dakle, $x_1 \nVdash \Box(\Box p \to p) \to \Box p$.

Pretpostavimo sada da je okvir $\mathcal{F}$ tranzitivan i inverzno dobro fundiran. Neka je $w \in W$ proizvoljan svijet i $\Vdash$ proizvoljna valuacija. Pretpostavimo da vrijedi $w \Vdash \Box\ (\Box\ p \to p)$. Ako ne postoji svijet $x \in W$ takav da wRx, tada očito $w \Vdash \Box\ p$, pa imamo $w \Vdash \Box\ (\Box\ p \to p) \to \Box\ p$. Promotrimo sada slučaj kada postoji svijet $x \in W$ za kojeg vrijedi wRx. Iz pretpostavke $w \Vdash \Box\ (\Box\ p \to p)$ slijedi $x \Vdash \Box\ p \to p$. Ako za svaki svijet $x \in W$ za kojeg vrijedi wRx, imamo $x \Vdash p$, tada slijedi $w \Vdash \Box\ p$. Tada $w \Vdash \Box\ (\Box\ p \to p) \to \Box\ p$. Promotrimo sada slučaj kada postoji svijet $x \in W$ takav da wRx i $x \nVdash p$. Tada zbog $x \Vdash \Box\ p \to p$ slijedi $x \nVdash \Box p$. Iz toga slijedi da postoji svijet x_1 takav da $x_1 \nVdash p$. Sada iz $wRxRx_1$ i tranzitivnosti relacije R slijedi

wRx_1. Iz pretpostavke $w \Vdash \Box\,(\Box\,p \to p)$ slijedi $x_1 \Vdash \Box\,p \to p$, a onda $x_1 \nVdash \Box\,p$. Analogno dalje. Time dobivamo da relacija R nije inverzno dobro fundirana. Q.E.D.

Definiramo formulu: $H \equiv \Box(A \leftrightarrow \Box A) \to \Box A$. Formula H se naziva *Henkinov aksiom*. Neka je **GH**=**K**+H.

Propozicija 2.5. Ako je formula $\Box(p \leftrightarrow \Box p) \to \Box p$ valjana na okviru $\mathcal{F} = (W, R)$, tada je i formula $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ valjana na okviru $\mathcal{F}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je formula $\Box(p \leftrightarrow \Box p) \to \Box p$ valjana na okviru $\mathcal{F}$. Neka je $\Vdash$ proizvoljna relacija forsiranja na okviru $\mathcal{F}$ i $w \in W$ svijet takav da $w \Vdash \Box(p \to \Box p)$ i wRx. Tvrdimo da tada vrijedi $x \Vdash \Box p$. Definiramo novu relaciju forsiranja $\Vdash'$ ovako: $v \Vdash' p \;\Leftrightarrow\; (\forall n \in \mathbb{N})\, v \Vdash \Box^n p$. Pretpostavimo da je $y \in W$ neki svijet za kojeg vrijedi wRy. Tada

$$y \Vdash \Box p \to p. \tag{2.1}$$

Tada redom vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned} y \Vdash' p &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})\; y \Vdash \Box^n p \\ &\overset{(2.1)}{\Leftrightarrow} (\forall n \geq 1)\; y \Vdash \Box^n p \\ &\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(\forall z \in W)(yRz \Rightarrow z \Vdash \Box^n p) \\ &\Leftrightarrow (\forall z \in W)(yRz \Rightarrow z \Vdash' p) \\ &\Leftrightarrow y \Vdash' \Box p. \end{aligned}$$

Dakle, ako wRy, tada $y \Vdash' p \leftrightarrow \Box p$. Iz toga slijedi $w \Vdash' \Box(p \leftrightarrow \Box p)$, a onda zbog valjanosti formule $\Box(p \leftrightarrow \Box p) \to \Box p$ na okviru $\mathcal{F}$, imamo $w \Vdash' \Box p$. Zbog wRx tada $x \Vdash' p$, pa posebno $x \Vdash \Box p$. Dakle $w \Vdash \Box(\Box p \to p) \to \Box p$, pa je $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ valjana. Q.E.D.

Sada uočimo da ukoliko je (W, R) okvir na kojem su svi teoremi **GH** valjani, tada je relacija R tranzitivna i inverzno dobro fundirana (to slijedi iz prethodne dvije propozicije). Posebno, vidimo da je tada i formula $\Box p \to \Box\Box p$ valjana na (W, R) (propozicija 2.1). Kada bi sistem **GH** bio potpun, iz ovoga bi slijedilo da je $\vdash_{\mathbf{GH}} \Box p \to \Box\Box p$, no pokazat ćemo da to ne vrijedi. Konstruirat ćemo model $\mathfrak{M}^* = (W, R, \Vdash)$ takav da su svi teoremi sistema **GH** valjani na tom modelu, ali formula $\Box p \to \Box\Box p$ nije.

Neka je $\mathbb{N}^* = \{0^*, 1^*, 2^*, \dots\}$ skup ekvipotentan s $\mathbb{N}$ takav da $\mathbb{N}^* \cap \mathbb{N} = \emptyset$ (primjerice, možemo uzeti $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \times \{0\}$). Na skupu $\mathbb{N}^*$ definiramo binarnu relaciju $<$ ovako: $m^* < n^* \;\Leftrightarrow\; m < n$. Neka je $W = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^*$. Neka je $R \subseteq W \times W$ definirana ovako:

$$\begin{aligned} wRx \Leftrightarrow\; &(\exists m, n \in \mathbb{N})(m \leq n + 1 \;\text{ i }\; w = m^* \;\text{ i }\; x = n^*) \\ &\text{ili } (w \in \mathbb{N}^* \;\text{ i }\; x \in \mathbb{N}) \\ &\text{ili } (w, x \in \mathbb{N} \;\text{ i }\; w > x) \end{aligned}$$

Definiramo relaciju forsiranja $\Vdash$ na sljedeći način: $w \Vdash p \quad \Leftrightarrow \quad w \neq 0^*$, za svaki $w \in W$. Označimo $\mathfrak{M}^* = (W, R, \Vdash)$. Za proizvoljnu formulu A označimo $[A] = \{w \in W \mid \mathfrak{M}^*, w \Vdash A\}$.

Lema 2.7. Za svaku formulu A skup $[A]$ je konačan ili kofinitan.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po složenosti formule A.
Baza: Za svaku propozicionalnu varijablu p imamo $[p] = W \setminus \{0^*\}$, što je očito kofinitan skup.
Korak: Neka je $n \in \mathbb{N}$ tako da za svaku formulu B, čija je složenost strogo manja od n, skup $[B]$ je konačan ili kofinitan. Neka je A neka formula složenosti n. Promatramo slučajeve obzirom na oblik formule A (pretpostavljamo da alfabet sadrži samo veznike $\neg$ i $\rightarrow$, te modalni operator $\Box$).

a) $A = \neg B$
Iz pretpostavke indukcije slijedi da je skup B konačan ili kofinitan Tada iz $[A] = W \setminus [B]$ slijedi da je i skup $[A]$ konačan ili kofinitan.

b) $A = B \vee C$
Tada $[A] = [B] \cup [C]$. Iz pretpostavke indukcije slijedi da su skupovi $[B]$ i $[C]$ kofinitni ili konačni. Ako je jedan od skupova $[B]$ i $[C]$ kofinitan, tada je i njihova unija kofinitan skup. Ako su oba skupa $[B]$ i $[C]$ konačna, tada je i njihova unija konačan skup.

c) $A = \Box B$
Pretpostavimo prvo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \notin [B]$. Tada za svaki $w \in \mathbb{N}$, $w > n$, vrijedi $w \notin [\Box B]$ (u suprotnom bi zbog wRn vrijedilo $n \in [B]$). Iz wRn slijedi da za svaki $w \in \mathbb{N}^*$ imamo $w \notin [\Box B]$. Dakle u ovom slučaju je $[A] = [\Box B] \subseteq \{0, \ldots, n\}$, pa je skup $[A]$ konačan.

Promotrimo sada slučaj kada $\mathbb{N} \subseteq [B]$. Kako je iz pretpostavke indukcije skup $[B]$ konačan ili kofinitan, tada zbog pretpostavke $\mathbb{N} \subseteq [B]$ slijedi da je skup $[B]$ kofinitan. Dakle, postoji neki $k \in \mathbb{N}$ takav da je $W \setminus [B] \subseteq \{0^*, \ldots, k^*\}$. Neka je $w \in W \setminus [\Box B]$ proizvoljan svijet. Tada postoji $x \in W \setminus [B]$ takav da je wRx. No, imamo da je tada $x \in \mathbb{N}^*$ i $x \leq k^*$, pa iz definicije relacije R mora biti $w \in \mathbb{N}^*$ i $w \leq (k+1)^*$. Dakle, vrijedi $W \setminus [\Box B] \subseteq \{0^*, \ldots, k^*, (k+1)^*\}$, pa je skup $[A] = [\Box B]$ kofinitan. Q.E.D.

Teorem 2.10. Formula $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ nije teorem sistema **GH**.

Dokaz. Prvo dokažimo da su sve formule oblika $\Box(A \leftrightarrow \Box A) \rightarrow \Box A$ valjane na modelu $\mathfrak{M}^*$. Pretpostavimo da postoji neki svijet $w \in W$ tako da $\mathfrak{M}^*, w \Vdash \Box(A \leftrightarrow \Box A)$ i $\mathfrak{M}^*, w \nVdash \Box A$. Promatramo sljedeća dva slučaja:

(i) postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $\mathfrak{M}^*, n \nVdash A$, tj. skup $\mathbb{N}$ nije podskup skupa $[A]$;
Neka je n najmanji prirodni broj s tim svojstvom. Tada za svaki $m < n$ vrijedi

$\mathfrak{M}^*, m \Vdash A$. Time imamo $\mathfrak{M}^*, n \Vdash \Box A$ i $\mathfrak{M}^*, n \nVdash A \leftrightarrow \Box A$. Uočimo da za sve $y, z \in W$ vrijedi yRz ili $y = z$ ili zRy. Dakle, mora biti nRw (očito nije $n = w$, a kad bi vrijedilo wRn imali bi $\mathfrak{M}^*, n \Vdash A \leftrightarrow \Box A$). Iz ovoga slijedi da je $w \in \mathbb{N}$ i $n > w$. Kako $\mathfrak{M}^*, w \nVdash \Box A$, tada postoji svijet $x \in W$ takav da wRx i $\mathfrak{M}^*, x \nVdash A$. No, onda imamo da je $x \in \mathbb{N}$ i $n > w > x$, pa dobivamo kontradikciju s minimalnošću od n.

(ii) $\mathbb{N} \subseteq [A]$
Iz prethodne leme 2.7 slijedi da je skup $[A]$ konačan ili kofinitan. Budući je $\mathbb{N} \subseteq [A]$ tada je skup A beskonačan. Iz toga slijedi da je skup $W \setminus [A]$ konačan. Budući vrijedi $\mathfrak{M}^*, w \nVdash \Box A$, tada je očito skup $W \setminus [A]$ neprazan.

Neka je $k = \max\{n \in \mathbb{N} \mid n^* \in W \setminus [A]\}$. Očito vrijedi $\mathfrak{M}^*, (k+1)^* \Vdash A$, a zbog $(k+1)^* R k^*$ vrijedi $\mathfrak{M}^*, (k+1)^* \nVdash \Box A$. Tada postoji svijet $x \in W$ takav da wRx i $x \nVdash [A]$. Ovo posljednje i pretpostavka $\mathbb{N} \subseteq [A]$ povlače $x \in \mathbb{N}^*$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da $x = n^*$ i $n \leq k$. Sada iz wRx slijedi $w \in \mathbb{N}^*$, pa postoji $m \leq n+1$ takav da $w = m^*$. No, tada je $m \leq (k+1)+1$, pa $wR(k+1)^*$ iz čega slijedi $\mathfrak{M}^*, (k+1)^* \Vdash A \leftrightarrow \Box A$, što je kontradikcija.

Iz ovoga slijedi da su svi aksiomi sistema **GH** valjani na modelu $\mathfrak{M}^*$. Budući da pravila izvoda modus ponens i nužnost čuvaju valjanost, zaključujemo da su svi teoremi **GH** istiniti na modelu $\mathfrak{M}^*$.

No, uočimo da vrijedi sljedeće: $2^* Rx \Leftrightarrow x \neq 0^*$. Tada $\mathfrak{M}^*, 2^* \Vdash \Box p$. No, $1^* R 0^*$ i $\mathfrak{M}^*, 0^* \nVdash p$ povlači $\mathfrak{M}^*, 1^* \nVdash \Box p$. Iz $2^* R 1^*$ imamo $\mathfrak{M}^*, 2^* \nVdash \Box\Box p$. Dakle, $\mathfrak{M}^*, 2^* \nVdash \Box p \to \Box\Box p$, pa iz prethodnog zaključujemo da $\Box p \to \Box\Box p$ nije teorem sistema **GH**. Q.E.D.

Može se pokazati da logika dokazivosti **GL** nije potpuna u odnosu na svoj kanonski model, jer on nije inverzno dobro fundiran. No, sistem **GL** je slabo potpun u odnosu na klasu svih konačnih tranzitivnih stabala.[2]

Polimodalna logika dokazivosti **GLP** je nepotpuna u odnosnu na relacijsku semantiku.[3]

J. van Benthem je u jednom članku iz 1978. dokazao nepotpunost modalnih sistema L_1 i L_2. Ovdje navodimo aksiome tih sistema.

[2]Dokaz te činjenice možete vidjeti u knjizi C. Smoryński, *Self–reference and modal logic*, Springer, 1985.

[3]Više o tome možete pročitati u nastavnom materijalu T. Perkov, M. Vuković, *Semantike logika dokazivosti i interpretabilnosti*, PMF–MO, Zagreb, 2017.

$$
\begin{array}{ll}
L_1 \; ... & \Box p \to p \\
 & \Box(\Box p \to \Box q) \lor \Box(\Box q \to \Box p) \\
 & (\Diamond p \land \Box(p \to \Box p)) \to p \\
 & \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
L_2 \; ... & \Box p \to p \\
 & \Box(\Box(p \to \Box p) \to \Box\Box\Box p) \to p
\end{array}
$$

Poglavlje 3

Algebarska semantika

3.1 Booleove algebre

Kao uvod u algebarsku semantiku modalnih logika prvo ćemo reći nešto o algebarskoj semantici logike sudova.

Definicija 3.1. Neka je B neprazan skup, $+$ binarna, a $-$ unarna operacija na skupu B, te $0 \in B$. Uvedimo još oznake: $1 = -0$ i $a \cdot b = -((-a) + (-b))$. *Booleova algebra* je uređena četvorka $(B, +, -, 0)$ koja ima sljedeća svojstva:

$$
\begin{array}{ll}
x + y = y + x & x \cdot y = y \cdot x \\
(x + y) + z = x + (y + z) & (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\
x + 0 = x & x \cdot 1 = x \\
x + (-x) = 1 & x \cdot (-x) = 0 \\
x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) & x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)
\end{array}
$$

Primjer 3.1. Ako je A neki skup tada je lako provjeriti da je $(\mathcal{P}(A), \cup, {}^c, \emptyset)$ jedna Booleova algebra. Booloeve algebre čiji nosač je podskup nekog partitivnog skupa nazivaju se *skupovne algebre.*[1]

Označimo **2**$=(\{0,1\}, +, -, 0)$, gdje su operacije definirane ovako: $a+b = \max\{a, b\}$ i $-a = 1 - a$. Lako je provjeriti da je **2** jedna Booleova algebra. Ta algebra se naziva *algebra istinitosnih vrijednosti.*

Primjer 3.2. Neka je Φ neki skup propozicionalnih varijabli (konačan ili beskonačan). Označimo sa $Form(\Phi)$ skup svih propozicionalnih formula nad skupom Φ, pri čemu

[1]Kasnije ćemo dokazati Stoneov teorem reprezentacije koji tvrdi da je svaka Booleova algebra izomorfna nekoj skupovnoj algebri.

alfabet sadrži samo logičku konstantu $\perp$, te veznike $\neg$ i $\vee$. Označimo $\mathcal{F}(\Phi) = (Form(\Phi), +, -, \perp)$, gdje su operacije definirane ovako: $\varphi + \psi = \varphi \vee \psi$ i $-\varphi = \neg\varphi$. To očito nije Booleova algebra, jer primjerice ne vrijedi općenito $\varphi + \psi = \psi + \varphi$. Iz tog razloga za svaku formulu φ definiramo $[\varphi]$ kao skup svih formula koje su logički ekvivalentne sa φ. Na kvocijentom skupu $Form(\Phi)/_{\Leftrightarrow}$ definiramo:

$$[\varphi] + [\psi] = [\varphi \vee \psi], \quad -[\varphi] = [\neg\varphi] \text{ i } 0 = [\perp]$$

Lako je pokazati da prethodne definicije ne ovise o izboru reprezentanata. Zatim, $(Form(\Phi)/_{\Leftrightarrow}, +, -, 0)$ je Booleova algebra

Primjer 3.3. Neka je zadan neki skup propozicionalnih varijabli Φ i RS neki pripadni račun sudova.[2] Na skupu svih formula $Form(\Phi)$ definiramo binarnu relaciju $\equiv_{RS}$ ovako:

$$\varphi \equiv_{RS} \psi \text{ ako i samo ako } \vdash_{RS} \varphi \leftrightarrow \psi$$

Lako je provjeriti da je $\equiv_{RS}$ jedna relacija ekvivalencije. Za svaku formulu $\varphi \in Form(\Phi)$ sa $[\varphi]$ označavamo pripadnu klasu ekvivalencije. Na kvocijentom skupu $Form(\Phi)/_{\equiv_{RS}}$ definiramo:

$$[\varphi] + [\psi] = [\varphi \vee \psi], \quad -[\varphi] = [\neg\varphi] \text{ i } 0 = [\perp]$$

Lako je pokazati da prethodne definicije ne ovise o izboru reprezentanata. Zatim, $(Form(\Phi)/_{\equiv_{RS}}, +, -, 0)$ je Booleova algebra koja se naziva *Lindenbaum–Tarskijeva algebra* i označava sa $\mathcal{L}_C(\Phi)$.

Definicija 3.2. Neka je B neka Booleova algebra. Definiramo binarnu relaciju $\leq$ ovako:

$$a \leq b \text{ ako i samo ako } a + b = b$$

Lako je vidjeti da vrijedi: $a \leq b$ ako i samo ako $a \cdot b = a$, te je relacija $\leq$ refleksivna i tranzitivna.

Propozicija 3.1. Neka je B Booleova algebra. Tada za sve $x, y, z \in B$ vrijedi:

a) ako $x + y = 1$ i $x \cdot y = 0$ tada je $y = -x$

b) $-(-x) = x$

c) $x + x = x$ i $x \cdot x = x$

d) $x \cdot 0 = 0$ i $x + 1 = 1$

e) $x \cdot (x + y) = x$ i $x + (x \cdot y) = x$

[2] Primjerice, u knjizi M. Vuković, *Matematička logika*, Element, 2009., definiran je jedan hilbertovski sistem RS koji je adekvatan i potpun.

f) ako $x \cdot y = x \cdot z$ i $(-x) \cdot y = (-x) \cdot z$ onda $y = z$

g) $-(x \cdot y) = (-x) + (-y)$ i $-(x + y) = (-x) \cdot (-y)$

h) $x \cdot (-y) = 0$ ako i samo ako $x \cdot y = x$

i) $-1 = 0$

j) $x \cdot ((-x) + y) = x \cdot y$ i $x + ((-x) \cdot y) = x + y$

Dokaz. Za ilustraciju dokazujemo idempotentnost zbrajanja i množenja, tj. dokazujemo tvrdnju c).

$$x = x + 0 = x + (x \cdot (-x)) = (x + x) \cdot (x + (-x)) = (x + x) \cdot 1 = x + x$$

$$x = x \cdot 1 = x \cdot (x + (-x)) = (x \cdot x) + (x \cdot (-x)) = x \cdot x + 0 = x \cdot x$$

Q.E.D.

3.2 Stoneov teorem reprezentacije

Sada nam je cilj dokazati da je svaka Booleova algebra izomorfna nekoj skupovnoj algebri.

Definicija 3.3. Neka su B_1 i B_2 Booleove algebre. *Homomorfizam Booleovih algebri* B_1 i B_2 je svaka funkcija $f : B_1 \to B_2$ tako da za sve $x, y \in B_1$ vrijedi:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(-x) = -f(x) \text{ i } f(0) = 0$$

Izomorfizam Booleovih algebri je homomorfizam koji je bijekcija.

Definicija 3.4. Neka je B neka Booleova algebra. Podskup I od B nazivamo *ideal* ako vrijede sljedeći uvjeti:

a) $0 \in I$

b) $(\forall x \in I)(\forall y \in B)(y \leq x \Rightarrow y \in I)$

c) $(\forall x, y \in I)(x + y \in I)$

Primjer 3.4. Neka je A neki skup, te $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(A), \cup, {}^c, \emptyset)$ pripadna Booleova algebra. Očito je skup $\{x : x \subseteq A \text{ i } x \text{ konačan}\}$ jedan ideal u algebri $\mathcal{A}$.

Za svaku Booleovu algebru $(B, +, -, 0)$ su skupovi $\{0\}$ i B ideali (nazivaju se *trivijalni ideali*).

Ako je $f : B_1 \to B_2$ homomorfizam Booleovih algebri tada je jezgra homomorfizma $\{x \in B_1 : f(x) = 0\}$ jedan ideal u algebri B_1.

Ako je $a \neq 0$ neki element Booleove algebre B tada je skup $\{x \in B : x \leq a\}$ jedan ideal. Ideali tog oblika nazivaju se *glavni ideali*.

Po definiciji je ideal zatvoren za zbrajanje. Svaki ideal ne mora biti zatvoren za operaciju -.

Definicija 3.5. Neka je B Booloeova algebra, te neka je I neki ideal u B. Kažemo da je I *prosti ideal* ako za svaki $x \in B$ vrijedi: $x \in I$ ili $-x \in I$. Kažemo da je ideal I *maksimalni ideal* ako nije trivijalan, te ne postoji netrivijalni ideal J tako da vrijedi $I \subsetneqq J \subsetneqq B$.

Lema 3.1. Neka je B Booleova algebra. Ako $x_1 \geq y_1$ i $x_2 \geq y_2$ tada $x_1 \cdot x_2 \geq y_1 \cdot y_2$. Ako je I ideal u B takav da $1 \in I$ tada $I = B$.

Propozicija 3.2. Svaki prosti ideal je maksimalni.

Dokaz. Neka je I prosti ideal, te neka je J ideal tako da vrijedi $I \subsetneqq J$. Neka je $x \in J \setminus I$ proizvoljan. Iz definicije prostog ideala slijedi $-x \in I$. Sada iz $I \subsetneqq J$ slijedi $-x \in J$. Time imamo $x, -x \in J$. Iz definicije ideala slijedi $x + (-x) \in J$. No, iz definicije Booleove algebre znamo da vrijedi $x + (-x) = 1$. Dakle, $1 \in J$, a onda iz leme 3.1 slijedi $J = B$. Time smo dokazali da je jedini ideal koji je pravi nadskup od I, jednak čitavoj algebri B. To znači da je ideal I maksimalan. Q.E.D.

Lema 3.2. Neka je B Booleova algebra, I ideal i $x \in B$. Tada su sljedeći skupovi ideali u B :

$$\begin{aligned} I_x &= \{b \in B : (\exists i \in I)\ b \leq x + i\} \\ I_{-x} &= \{b \in B : (\exists i \in I)\ b \leq (-x) + i\} \end{aligned}$$

Zatim, vrijedi $I \subseteq I_x$ i $I \subseteq I_{-x}$.

Dokaz. Dokazujemo da je I_x ideal. Redom provjeravamo uvjete iz definicije.

Za svaki $i \in I$ očito vrijedi $(x + i) + 0 = x + i$, pa je $0 \leq x + i$. Iz definicije skupa I_x slijedi $0 \in I_x$.

Neka $y \in I_x$ i $z \in B$ takvi da vrijedi $z \leq y$. Tada je $z + y = y$. Iz $y \in I_x$ slijedi da postoji $i \in I$ tako da vrijedi $y \leq x + i$. Time imamo $z \leq y \leq x + i$, a onda iz tranzitivnosti relacije $\leq$ slijedi $z \leq x + i$. Iz definicije skupa I_x slijedi $z \in I_x$.

Neka su $y_1, y_2 \in I_x$ proizvoljni. Tada postoje $i_1, i_2 \in I$ tako da vrijedi: $y_1 \leq x + i_1$ i $y_2 \leq x + i_2$. Tada je $(x + i_1) + y_1 = x + i_1$ i $(x + i_2) + y_2 = x + i_2$. Sada imamo.

$$\begin{aligned} x + (i_1 + i_2) &= (x + x) + (i_1 + i_2) = (x + i_1) + (x + i_2) \\ &= ((x + i_1) + y_1) + ((x + i_2) + y_2) = (x + x + i_1 + i_2) + (y_1 + y_2) \\ &= (x + (i_1 + i_2)) + (y_1 + y_2) \end{aligned}$$

To znači da je $y_1 + y_2 \leq x + (i_1 + i_2)$. Budući da je I ideal tada vrijedi $i_1 + i_2 \in I$. Iz definicije skupa I_x slijedi $y_1 + y_2 \in I_x$.

Pokažimo još da vrijedi $I \subseteq I_x$. Neka je $y \in I$ proizvoljan. Tada imamo: $x + y = x + (y + y) = (x + y) + y$, pa je $y \leq x + y$. Iz definicije skupa I_x slijedi $y \in I_x$. Dakle, vrijedi $I \subseteq I_x$. Q.E.D.

Propozicija 3.3. Svaki maksimalni ideal je prost.

Dokaz. Prepostavimo da je I maksimalni ideal koji nije prost. Tada postoji $x \in B$ tako da vrijedi $x \notin I$ i $-x \notin I$. Definiramo skupove I_x i I_x kao u prethodnoj lemi. Iz prethodne leme znamo da su I_x i I_{-x} ideali, te da vrijedi $I \subseteq I_x$ i $I \subseteq I_{-x}$. Budući da vrijedi $x + 0 = x$ i $0 \in I$, tada imamo $x \in I_x$, te analogno $-x \in I_{-x}$. To znači da vrijedi $I \subsetneqq I_x$ i $I \subsetneqq I_{-x}$.

Iz definicije maksimalnog ideala slijedi da su I_x i I_{-x} trivijalni ideali, tj. vrijedi $I_x = I_{-x} = B$. Tada posebno imamo $1 \in I_x \cap I_{-x}$, pa iz definicije tih skupova slijedi da postoje $a, b \in I$ takvi da vrijedi $1 \leq x + a$ i $1 \leq (-x) + b$. No, tada $1 = x + a$ i $1 = (-x) + b$. Posebno imamo $(a + b) + x = (a + b) + (-x) = 1$. Iz svega toga slijedi sljedeće:

$$a + b = (a + b) + 0 = (a + b) + (x \cdot (-x)) = ((a + b) + x) \cdot ((a + b) + (-x)) = 1 \cdot 1 = 1$$

Iz $a, b \in I$ i uvjeta c) iz definicije ideala slijedi $a + b \in I$, tj. $1 \in I$, a onda iz leme 3.1 slijedi $I = B$. To je u kontradikciji s pretpostavkom da je I maksimalni ideal (a onda i netrivijalni ideal). Q.E.D.

Propozicija 3.4. Neka je B Booleova algebra i $x \in B$ neki element različit od nule. Tada postoji maksimalni ideal I tako da vrijedi $x \notin I$.

Dokaz. Označimo $\mathcal{J} = \{I : I \text{ je ideal takav da } x \notin I\}$. Budući da je $I = \{0\}$ ideal i $x \notin I$, tada $I \in \mathcal{J}$, tj. $\mathcal{J} \neq \emptyset$. Promotrimo parcijalno uređen skup $(\mathcal{J}, \subsetneqq)$. Neka je $\mathcal{L}$ neki neprazni lanac u $\mathcal{J}$. Lako je provjeriti da je $\cup\mathcal{L} \in \mathcal{J}$, tj. da je $\cup\mathcal{L}$ jedna gornja međa za lanac $\mathcal{L}$ u skup $\mathcal{J}$. Iz Zornove leme slijedi da postoji $I \in \mathcal{J}$ koji je maksimalni element u tom parcijalno uređenom skupu.

Tvrdimo da je I maksimalni ideal u Booleovoj algebri B. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji ideal J tako da vrijedi $I \subsetneqq J \subsetneqq B$. Očito vrijedi $x \in J$ (jer inače $J \in \mathcal{J}$, a I je maksimalni element u $\mathcal{J}$).

Tvrdimo da vrijedi $-x \in I$. Neka je skup I_{-x} definiran kao u lemi 3.2. Iz navedene leme znamo da je I_{-x} ideal, te vrijedi $I \subseteq I_{-x}$. Dokažimo da vrijedi $x \notin I_{-x}$. Pretpostavimo suprotno, tj. $x \in I_{-x}$. Iz definicije ideala I_{-x} slijedi da postoji $i \in I$ tako da vrijedi $(-x) + i \geq x$. Očito vrijedi:

$$i = 0 + i = (x \cdot (-x)) + i = (x + i) \cdot ((-x) + i) \geq x \cdot x = x$$

(tu smo koristili nejednakost $x + i \geq x$ koju je lako provjeriti, te smo primijenili lemu 3.1). Time imamo $i \in I$ i $i \geq x$. Iz definicije pojma ideala slijedi $x \in I$, što nije. Dakle, pretpostavka $x \in I_{-a}$ vodi na kontradikciju, pa mora vrijediti $x \notin I_{-x}$. Sada iz $x \notin I_{-x}$ i definicije skupa $\mathcal{J}$ slijedi $I_{-x} \in \mathcal{J}$. Budući da je $I \subseteq I_{-x}$, te je ideal I maksimalni element parcijalno uređenog skupa $(\mathcal{J}, \subsetneqq)$, tada $I = I_{-x}$. Za proizvoljni $i \in I$ vrijedi $(-x) + i \geq -x$, a onda iz definicije ideala I_{-x} slijedi $-x \in I_{-x}$. Sada $I = I_{-x}$ povlači konačno $-x \in I$.

Time imamo: $x \in J$, $I \subsetneqq J$ i $-x \in I$. Dakle, $x, -x \in J$, a onda $1 = x + (-x) \in J$. Iz leme 3.1 slijedi $J = B$, što je u suprotnosti s početnom pretpostavkom. Q.E.D.

Za proizvoljnu Booleovu algebru B označimo sa $M(B)$ skup svih njenih maksimalnih ideala. Definiramo preslikavanje $F : B \to \mathcal{P}(M(B))$ ovako:

$$F(x) = \{I \in M(B) : x \notin I\}$$

Primijetimo da iz propozicije 3.4 slijedi da za svaki $x \in B \setminus \{0\}$ vrijedi $F(x) \neq \emptyset$. Zatim, vrijedi $F(0) = \emptyset$.

Lema 3.3. Neka je B proizvoljna Booleova algebra. Prethodno definirana funkcija $F : B \to \mathcal{P}(M(B))$ je injektivni homomorfizam Booleovih algebri B i $\mathcal{P}(M(B))$.

Dokaz. Dokažimo prvo da je funkcija F injekcija. Neka su $a, b \in B$ takvi da je $a \neq b$. Tada posebno slijedi da nije $a \leq b$ ili nije $b \leq a$ (jer je relacija $\leq$ antisimetrična). Radi određenosti neka vrijedi da nije $a \leq b$. Tada posebno $a \cdot b \neq a$. Ako bi vrijedilo $a \cdot (-b) = 0$, tada bi imali redom sljedeće jednakosti:

$$a = a \cdot 1 = a \cdot (b + (-b)) = (a \cdot b) + (a \cdot (-b)) = (a \cdot b) + 0 = a \cdot b$$

Dakle, pretpostavka $a \cdot (-b) = 0$ povlači $a = a \cdot b$, a to smo bili pretpostavili da ne vrijedi. To znači da mora vrijediti $a \cdot (-b) \neq 0$.

Iz propozicije 3.4 slijedi da postoji maksimalni ideal I tako da vrijedi $a \cdot (-b) \notin I$. Lako je vidjeti da $a \cdot (-b) \notin I$ povlači $a \notin I$ i $-b \notin I$. Iz propozicije 3.3 slijedi da je ideal I prosti ideal. Posebno, iz $-b \notin I$ slijedi $b \in I$. Iz $a \notin I$ slijedi $I \in F(a)$, a $b \in I$ povlači $I \notin F(b)$. To znači da vrijedi $F(a) \neq F(b)$.

Dokažimo sada da za sve $a, b \in B$ vrijedi $F(a + b) = F(a) \cup F(b)$. U tu svrhu dokazujemo obje inkluzije. Neka je $I \in F(a + b)$ proizvoljan maksimalni ideal. Tada vrijedi $a + b \notin I$. Želimo dokazati da vrijedi $I \in F(a) \cup F(b)$, tj. $I \in F(a)$ ili $I \in F(b)$, što je ekvivalentno sa $a \notin I$ ili $b \notin I$. Pretpostavimo suprotno, tj. $a \in I$ i $b \in I$. Tada iz zatvorenosti ideala na zbrajanje slijedi $a + b \in I$, što je u suprotnosti s početnom pretpostavkom. Dokažimo obratnu inkluziju. Neka je I maksimalni ideal tako da vrijedi $I \notin F(a + b)$. Tada $a + b \in I$. Lako je vidjeti da vrijedi $a \leq a + b$ i $b \leq a + b$. Tada iz definicije ideala slijedi $a, b \in I$, a onda $I \notin F(a)$ i $I \notin F(b)$, tj. $I \notin F(a) \cup F(b)$.

Dokažimo još na kraju da za svaki $a \in B$ vrijedi $F(-a) = [F(a)]^c$. U tu svrhu opet dokazujemo obje inkluzije. Neka je $I \in F(-a)$ proizvoljan maksimalni ideal. Tada iz definicije funkcije F slijedi $-a \notin I$. Iz propozicije 3.3 slijedi da je ideal I prost, a onda imamo $a \in I$. Iz definicije funkcije F tada slijedi $I \notin F(a)$, tj. $I \in [F(a)]^c$. Dokažimo obratnu inkluziju. Neka je $I \in [F(a)]^c$ proizvoljan maksimalni ideal. Tada imamo $I \notin F(a)$, a iz toga slijedi $a \in I$. Budući da je I maksimalni ideal, posebno je netrivijalni, pa imamo $-a \notin I$ (inače, $a, -a \in I$, a onda $a + (-a) \in I$, tj. $1 \in I$; iz leme 3.1 slijedi $I = B$). Iz definicije funkcije F slijedi $I \in F(-a)$. Q.E.D.

Definicija 3.6. Neka je B Booleova algebra. Za neprazan podskup P od B kažemo da je *podalgebra* ako je i P Booleova algebra (s istim operacijama).

Lema 3.4. Neka su B_1 i B_2 Booleove algebre, te $F : B_1 \to B_2$ neki homomorfizam. Tada je $F[B_1]$ podalgebra od B_2.

Iz prethodnih dviju lema odmah slijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.1 (Stoneov teorem reprezentacije)**.** Svaka Booleova algebra je izomorfna nekoj skupovnoj algebri.

Zadaci (filtri u Booleovoj algebri)

1. Neka je B proizvoljna Booleova algebra. Za neprazan podskup F od B kažemo da je *filter* u algebri B ako vrijedi:

   $$(\forall x, y \in F)(x \cdot y \in F) \quad \text{i} \quad (\forall x \in F)(\forall y \in B)(x \leq y \text{ povlači } \ y \in F)$$

   Kažemo da je filter F *pravi filter* ako je $F \neq B$. Dokažite da je filter F pravi ako i samo ako $0 \notin F$.

2. Pravi filtri koji su maksimalni obzirom na relaciju podskupa nazivaju se *ultrafiltri* Boolove algebre. Dokažite *teorem o ultrafiltru*, tj. da se svaki pravi filter može proširiti do ultrafiltra.

3. Neka je B Booleova algebra, te $A \subseteq B$. Kažemo da skup A ima *svojstvo konačnih produkata* ako za proizvoljan konačan podskup $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A$ vrijedi $x_1 \cdots x_n \neq 0$. Dokažite da se svaki podskup Boolove algebre koji ima svojstvo konačnih produkata može proširiti do ultrafiltra.

4. Dokažite da za svaki element različit od nule proizvoljne Boolove algebre postoji ultrafilter koji ga sadrži.

5. Neka je F pravi filter u Booleovoj algebri B. Na skupu B definiramo binarnu relaciju $\sim_F$ ovako:

   $$x \sim_F y \qquad \text{ako i samo ako} \qquad \text{postoji } \ z \in F \ \text{ tako da vrijedi } \ x \cdot z = y \cdot z$$

   Lako je provjeriti da je $\sim_F$ relacija ekvivalencije na skupu B. Za svaki $x \in B$ sa $|x|$ označavamo pripadnu klasu ekvivalencije. Na kvocijentnom skupu $B/\sim_F$ definiramo binarnu operaciju $\bigoplus$ i unarnu operaciju $\bigotimes$ ovako: $|x| \bigoplus |y| = |x+y|$ i $\bigotimes |x| = |-x|$. Lako je provjeriti da prethodne definicije ne ovise o izboru reprezentanata. Zatim definiramo $\mathbf{0} = |0|$. Dokažite da je $(B/\sim_F, \bigoplus, \bigotimes, \mathbf{0})$ Booleova algebra. Nazivamo je *kvocijentna algebra* od B u odnosu na filter F.

3.3 Teorem potpunosti za logiku sudova

Označimo sa $\mathfrak{B}$ klasu svih Booleovih algebri. Ako je $B \in \mathfrak{B}$ tada svaku funkciju $\theta : \{P_0, P_1, \ldots\} \to B$ nazivamo *valuacija*. Svaka valuacija θ može se na jedinstven način proširiti na skup svih formula logike sudova, pri čemu za sve formule φ i ψ vrijedi:

$$\theta(\top) = 1,\ \theta(\neg\varphi) = -\theta(\varphi) \text{ i } \theta(\varphi \vee \psi) = \theta(\varphi) + \theta(\psi)$$

(Proširenje valuacije θ smo također označili sa θ.)

Ako su φ i ψ formule logike sudova i B neka Booleova algebra, tada pišemo $B \models \varphi \approx \psi$ ako za svaku valuaciju θ vrijedi $\theta(\varphi) = \theta(\psi)$.

U primjeru 3.1 definirali smo Booleovu algebru $\mathbf{2}$. Ako je I neki neprazni skup tada sa 2^I označavamo skup svih funkcija s domenom I i kodomenom $\{0, 1\}$. Na skupu 2^I definiramo operacije $+$ i $-$ ovako: $f + g$ je funkcija definirana sa $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, a $-f$ je funkcija definirana sa $(-f)(x) = -f(x)$ (f i g su proizvoljne funkcije iz 2^I). Lako je provjeriti da je struktura $(2^I, +, -, 0)$ Booleova algebra (s 0 smo označili nul–funkciju). Tu Booleovu algebru označavamo sa $\mathbf{2}^I$ i nazivamo je *potencija algebre* $\mathbf{2}$. Tvrdnja sljedeće propozicije jednostavno slijedi iz definicija.

Propozicija 3.5. Neka je I neki neprazni skup, A neka podalgebra od $\mathbf{2}^I$, te neka je φ neka formula logike sudova. Ako $\mathbf{2} \models \varphi \approx \top$ tada $A \models \varphi \approx \top$.

Propozicija 3.6. Svaka skupovna algebra izomorfna je nekoj podalgebri potencije algebre $\mathbf{2}$, i obratno.

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = (B, \cup, ^c, \emptyset)$ neka skupovna algebra pri čemu je $B \subset \mathcal{P}(A)$, za neki skup A. Neka je $F : B \to 2^A$ zadana sa $F(X) = \chi_X$, za svaki $X \in B$ (sa χ_X je označena karakteristična funkcija skupa X.) Lako je provjeriti da je funkcija F homomorfizam i injekcija. Tada je algebra $\mathcal{A}$ izomorfna algebri $F[B]$. Slično se dokaže obrat, tj. da je svaka podalgebra potencije algebre $\mathbf{2}$ izomorfna nekoj skupovnoj algebri. Q.E.D.

Iz definicije algebre $\mathbf{2}$ i relacije $\approx$ lako slijedi tvrdnja sljedećeg teorema.

Teorem 3.2. Formula φ logike sudova je tautologija ako i samo ako $\mathbf{2} \models \varphi \approx \top$.

Označimo sa Set klasu svih skupovnih algebri.

Teorem 3.3. Formula φ logike sudova je tautologija ako i samo ako $Set \models \varphi \approx \top$.

Dokaz. Pretpostavimo da je φ tautologija i neka je B proizvoljna skupovna algebra. Iz teorema 3.2 slijedi $\mathbf{2} \models \varphi \approx \top$. Iz propozicije 3.6 slijedi da je skupovna algebra B izomorfna nekoj podalgebri A potencije algebre $\mathbf{2}$.

Iz propozicije 3.5 slijedi $A \models \varphi \approx \top$. Budući su algebre A i B izomorfne tada vrijedi $B \models \varphi \approx \top$. Skupovna algebra B je bila proizvoljna, pa vrijedi $Set \models \varphi \approx \top$.

Dokažimo sada obrat. Pretpostavimo $Set \models \varphi \approx \top$. Neka je A proizvoljan jednočlan skup. Označimo $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(A), \cup, ^c, \emptyset)$. Očito $\mathcal{A} \in Set$, pa vrijedi $\mathcal{A} \models \varphi \approx \top$. Algebra $\mathcal{A}$ izomorfna je algebri $\mathbf{2}$, pa vrijedi $\mathbf{2} \models \varphi \approx \top$. Iz teorema 3.2 slijedi da je formula φ tautologija. Q.E.D.

Propozicija 3.7. Za svaku formulu φ logike sudova vrijedi:

$$\vdash_{RS} \varphi \text{ ako i samo ako } \mathcal{L}_C(\Phi) \models \varphi \approx \top,$$

gdje je Φ skup propozicionalnih varijabli takav da $Var(\varphi) \subseteq \Phi$. (Lindenbaum–Tarskijeva algebra $\mathcal{L}_C(\Phi)$ je definirana u primjeru 3.7).

Dokaz. Pretpostavimo prvo da vrijedi $\mathcal{L}_C(\Phi) \models \varphi \approx \top$ i $\not\vdash_{RS} \varphi$. Tada očito $\not\vdash_{RS} \varphi \leftrightarrow \top$, a onda $[\varphi] \neq [\top]$. Definiramo valuaciju $\theta : \{P_0, P_1, \ldots\} \to Form(\Phi)/_{\equiv_{RS}}$ sa $\theta(p) = [p]$. Indukcijom po složenosti formule lako je dokazati da za svaku formulu ψ, za koju vrijedi $Var(\psi) \subseteq \Phi$, imamo $\theta(\psi) = [\psi]$. Iz pretpostavke $\mathcal{L}_C(\Phi) \models \varphi \approx \top$ posebno slijedi $\theta(\varphi) = \theta(\top)$. Po drugoj strani imamo: $\theta(\varphi) = [\varphi] \neq [\top] = \theta(\top)$, pa je dobivena kontradikcija.

Dokažimo sada drugi smjer. Neka je φ formula takva da $\vdash_{RS} \varphi$. Neka je θ proizvoljna valuacija na $\mathcal{L}_C(\Phi)$. Za svaku propozicionalnu varijablu p iz klase ekvivalencije $\theta(p)$ izaberemo jednu formulu koju označimo sa $\sigma(p)$. Tada očito vrijedi $\theta(p) = [\sigma(p)]$. Za proizvoljnu formulu logike sudova $\psi(p_{i_1}, \ldots, p_{i_n})$, tako da vrijedi $\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}\} \subseteq \Phi$, neka je $\sigma(\psi) \equiv \psi(\sigma(p_{i_1})/p_{i_1}, \ldots, \sigma(p_{i_n})/p_{i_n})$. Lako je vidjeti da vrijedi $\theta(\psi) = [\sigma(\psi)]$. Budući da je skup svih teorema sistema RS zatvoren za uniformnu supstituciju, tada iz pretpostavke $\vdash_{RS} \varphi$ slijedi $\vdash_{RS} \sigma(\phi)$. To znači da posebno vrijedi $[\sigma(\varphi)] = [\top]$. Budući da je $\theta(\varphi) = [\sigma(\varphi)]$, tada imamo $\theta(\varphi) = [\top] = \theta(\top)$. Q.E.D.

Teorem 3.4. Za svaku formulu φ logike sudova vrijedi:

$$\vdash_{RS} \varphi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{B} \models \varphi \approx \top.$$

(Podsjetimo se da je s $\mathfrak{B}$ označena klasa svih Boolevih algebri.)

Dokaz. Za formulu φ logike sudova kažemo da je n–dokaziva ako postoji barem jedan dokaz duljine n za nju u sistemu RS. Indukcijom po n dokazujemo da za svaku n–dokazivu formulu φ i svaku Booleovu algebru B vrijedi $B \models \varphi \approx \top$. Neka je B proizvoljna Booleova algebra i θ neka valuacija na B. Ako je φ neka 1–dokaziva formula, tada je φ instanca neke sheme aksioma sistema RS. Za ilustraciju dokazujemo da za instancu $A \to (B \to A)$ sheme aksioma (A1) imamo $\theta(A \to (B \to A)) = 1$. U tu svrhu redom računamo:

$$\begin{aligned}
\theta(A \to (B \to A)) &= \theta(\neg A \vee (\neg B \vee A)) = \theta(\neg A) + \theta(\neg B) + \theta(A) \\
&= -\theta(A) + (-\theta(B)) + \theta(A) \\
&= (\theta(A) + (-\theta(A))) + (-\theta(B)) = 1 + (-\theta(B)) = 1
\end{aligned}$$

Sasvim analogno bi provjerili da za ostala dvije sheme aksioma sistema RS tvrdnja također vrijedi. U koraku indukcije treba samo provjeriti da $\theta(A) = \theta(A \to B) = 1$ povlači $\theta(B) = 1$.

Dokažimo sada obrat. Neka je φ formula logike sudova takva da vrijedi $B \models \varphi \approx \top$, za svaku Booleovu algebru B. Označimo sa Φ skup svih propozicionalnih varijabli koje se pojavljuju u formuli φ. Budući da je Lindenbaum–Tarskijeva algebra $\mathcal{L}_C(\Phi)$ jedna Booloeva algebra, tada posebno vrijedi $\mathcal{L}_C(\Phi) \models \varphi \approx \top$. Iz propozicije 3.7 tada slijedi $\vdash_{RS} \varphi$. Q.E.D.

Korolar 3.1. Za svaku formulu φ logike sudova vrijedi:

$$\varphi \text{ je tautologija ako i samo ako } \vdash_{RS} \varphi$$

Dokaz. Adekvatnost se lako dokaže indukcijom po duljini dokaza. Pretpostavimo da je formula φ tautologija. Iz teorema 3.3 tada slijedi $Set \models \varphi \approx \top$. Neka je $\Phi = Var(\varphi)$. Iz Stoneovog teorema reprezentacije slijedi da postoji skupovna algebra B koja je izomorfna Booleovoj algebri $\mathcal{L}_C(\Phi)$. Iz $Set \models \varphi \approx \top$ tada slijedi $B \models \varphi \approx \top$, a onda i $\mathcal{L}_C(\Phi) \models \varphi \approx \top$. Iz propozicije 3.7 tada slijedi $\vdash_{RS} \varphi$. Q.E.D.

3.4 Algebre

Kako bismo mogli neke važne teoreme iskazati u općenitijem obliku (a ne samo za Booleove algebre), ovdje definiramo pojam algebre u općem smislu.

Definicija 3.7. *Algebarski tip* je uređeni par $\mathcal{T} = (T, \rho)$ gdje je $T \neq \emptyset$ skup čije elemente nazivamo funkcijski simboli, a $\rho : T \to \mathbb{N}$ je proizvoljna funkcija koja se naziva *mjesnost*.

Definicija 3.8. Neka je $\mathcal{T}$ algebarski tip. *Algebra tipa* $\mathcal{T}$ je uređeni par $\mathcal{A} = (A, I)$ gdje je $A \neq \emptyset$ koji nazivamo *nosač algebre*, a I je funkcija koja svakom funkcijskom simbolu $f \in \mathcal{T}$ mjesnosti n pridružuje neku n–mjesnu funkciju $f_{\mathcal{A}}$ na A. Često pišemo $\mathcal{A} = (A, f_{\mathcal{A}})_{f \in T}$.

Definicija 3.9. Neka su $\mathcal{A} = (A, f_{\mathcal{A}})_{f \in T}$ i $\mathcal{B} = (B, f_{\mathcal{B}})_{f \in T}$ dvije algebre istog tipa. Preslikavanje $\eta \colon A \to B$ je *homomorfizam* ako za svaku funkcijski simbol $f \in T$ mjesnosti n i sve $a_1, \ldots a_n \in A$ vrijedi:

$$\eta(f_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f_{\mathcal{B}}(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)).$$

Homomorfizam koji je bijekcija zovemo *izomorfizam.* Kažemo da je $\mathcal{B}$ *homomorfna slika* od $\mathcal{A}$ ako postoji surjektivni homomorfizam sa $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$. Ako je C klasa algebri, sa $\mathbf{H}\mathsf{C}$ označavamo klasu homomorfnih slika algebri iz C.

Definicija 3.10. Neka je $\mathcal{A} = (A, f_{\mathcal{A}})_{f\in T}$ algebra i $B \subseteq A$. Ako je skup B zatvoren za svaku funkciju $f_{\mathcal{A}}$, tada $\mathcal{B} = (B, (f_{\mathcal{A}})\restriction B)_{f\in T}$ zovemo *podalgebra* algebre $\mathcal{A}$. Kažemo da je algebru $\mathcal{A}$ *moguće smjestiti* u algebru $\mathcal{B}$ ako je algebra $\mathcal{A}$ izomorfna nekoj podalgebri algebre $\mathcal{B}$. Ako je C klasa algebri tada sa $\mathbf{S}\mathsf{C}$ označavamo klasu izomomorfnih slika podalgebri algebri iz C.

Definicija 3.11. Neka je $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ familija algebri istog tipa $\mathcal{T} = (T, \rho)$. *Produkt* te familije je algebra $\mathcal{A} = (A, f_{\mathcal{A}})_{f\in T}$, pri čemu je $A = \prod\limits_{i\in I} A_i$, a funkcija $f_{\mathcal{A}} : A^n \to A$ je definirana ovako:

$$(f_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n))(i) = f_{\mathcal{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i)).$$

Produkt familije algebri označavamo sa $\prod\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Ako je C klasa algebri tada sa $\mathbf{P}\mathsf{C}$ označavamo klasu izomomorfnih slika produkata algebri iz C.

Definicija 3.12. Klasu algebri nazivamo *mnogostrukost* ako je zatvorena na podalgebre, homomorfizme i produkte. Za klasu C sa $\mathbb{V}\mathsf{C}$ označavamo mnogostrukost generiranu sa C.

Definicija 3.13. Neka je $\mathcal{T}$ algebarski tip i Φ neki skup čije elemente nazivamo *varijable*. Skup svih $\mathcal{T}$*–terma nad* Φ je najmanji skup S koji sadrži sve konstantske simbole iz T i sve varijable iz Φ, te ako su $t_1, \ldots, t_n \in S$ onda je $f(t_1, \ldots, t_n) \in S$. Skup svih $\mathcal{T}$–terma označavamo sa $Ter_{\mathcal{T}}(\Phi)$. *Jednakost* je uređeni par terma (s, t). Umjesto (s, t) pišemo $s \approx t$.

Definicija 3.14. Neka je $\mathcal{T}$ algebarski tip, X skup varijabli i $\mathcal{A}$ neka $\mathcal{T}$–algebra. *Valuacija* na algebri $\mathcal{A}$ je svala funkcija $\theta \colon X \to A$.

Svaku valuaciju θ možemo proširiti na jedinstveni način na skup svih terma $Ter_{\mathcal{T}}(X)$ tako da vrijedi:

$$\begin{aligned} \theta(c) &= c_{\mathcal{A}}, \quad \text{za svaki konstanski simbol } c \in T \\ \theta(f(t_1, \ldots, t_n)) &= f_{\mathcal{A}}(\theta(t_1), \ldots, \theta(t_n)), \quad \text{za svaki funkcijski simbol } f \in T. \end{aligned}$$

Jedinstveno proširenje valuacije θ na skup svih terma također označavamo sa θ.

Definicija 3.15. Kažemo da je jednakost $s \approx t$ *istinita* na algebri $\mathcal{A}$, ili da je algebra $\mathcal{A}$ *model za jednakost* $s \approx t$, ako za svaku valuaciju θ vrijedi $\theta(s) = \theta(t)$. To označavamo sa $\mathcal{A} \models s \approx t$. Kažemo da je skup jednakosti E istinit na algebri $\mathcal{A}$, ili da je algebra $\mathcal{A}$ jedan *model za skup jednakosti* E, ako je svaka jednakost iz E istinita na $\mathcal{A}$. To kratko označavamo sa $\mathcal{A} \models E$.

Definicija 3.16. Kažemo da je klasa algebri C *jednakosno definabilna* ako postoji skup jednakosti E takav da C sadrži točno one algebre koje su model za E, tj. za svaku algebru $\mathcal{A}$ vrijedi:

$$\mathcal{A} \in \mathsf{C} \ \text{ ako i samo ako } \ \mathcal{A} \models E$$

Teorem 3.5 (G. Birkhoff).
Klasa algebri je jednakosno definabilna ako i samo ako je mnogostrukost.

Skica dokaza Birkhoffovog teorema. Neka je $\mathbb{V}$ neka mnogostrukost, tj. klasa algebri istog tipa koja je zatvorena za podalgebre, homomorfizme i produkte. Označimo sa $Equ(\mathbb{V})$ skup svih jednakosti koje su istinite na svakoj algebri iz klase $\mathbb{V}$, a sa $Mod(Equ(\mathbb{V}))$ klasu svih algebri na kojima su istinite jednakosti iz $Equ(\mathbb{V})$. Tvrdimo da vrijedi $\mathbb{V} = Mod(Equ(\mathbb{V}))$. Očito vrijedi $\mathbb{V} \subseteq Mod(Equ(\mathbb{V}))$. Dokažimo da vrijedi i druga inkluzija. Neka je $\mathcal{A} \in Mod(Equ(\mathbb{V}))$ proizvoljna algebra. Tada postoji skup varijabli X tako da je algebra $\mathcal{A}$ homomorfna slika algebre $\mathcal{F}_{\overline{X}}(\mathbb{V})$. Znamo da vrijedi $\mathcal{F}_{\overline{X}}(\mathbb{V}) \in \mathbf{SP}\mathbb{V}$. Iz posljednje dvije činjenice slijedi $\mathcal{A} \in \mathbf{HSP}\mathbb{V}$. Budući da iz definicije mnogostrukosti očito slijedi $\mathbf{HSP}\mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}$, tada imamo $\mathcal{A} \in \mathbb{V}$. Q.E.D.

Teorem 3.6 (A. Tarski).
Za svaku mnogustrukost $\mathbb{V}$ vrijedi $\mathbb{V} = \mathbf{HSP}\mathbb{V}$.

Dokaz. Očito vrijedi $\mathbf{HSP}\mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}$, jer je po definiciji mnogustrukost zatvorena za homomorfizme, podalgebre i produkte.

Dokažimo da vrijedi i obratna inkluzija. Iz Birkhoffovog teorema slijedi da postoji skup jednakosti E tako da vrijedi $\mathbb{V} = Mod(E)$. Budući da homomorfizmi, podalgebre i produkti čuvaju istinitost jednakosti, tada vrijedi $\mathbf{HSP}\mathbb{V} \subseteq Mod(E)$, a onda i $\mathbf{HSP}\mathbb{V} \subseteq \mathbb{V}$. Q.E.D.

3.5 Algebra i modalna logika

Do sada smo razmatrali osnovnu modalnu logiku čiji alfabet sadrži samo jedan unarni modalni operator $\Diamond$. Sada ćemo razmatrati opći slučaj.

Definicija 3.17. *Modalni tip* τ je uređeni par (O, ρ), gdje je O neprazan skup čije elemente nazivamo *modalnim operatorima* i označavamo $\triangle_0$, $\triangle_1, \dots$, a ρ je funkcija s domenom O i kodomenom $\mathbb{N}$. Za modalni operator $\triangle$ iz O pripadnu funkcijsku vrijednost $\rho(\triangle)$ nazivamo *mjesnost modalnog operatora* $\triangle$. Sa τ_0 označavamo modalni tip koji sadrži samo jedan unarni modalni operator koji označavamo sa $\Diamond$.

Definicija 3.18. Neka je τ modalni tip. Pripadni algebarski tip $\mathcal{T}_\tau$ sadrži kao funkcijske simbole sve modalne operatore, te booleovske simbole $\vee$ (binaran), $\neg$ (unaran) i $\bot$ (konstantski simbol).

Primjer 3.5. Promotrimo kako bi trebala izgledati neka algebra $\mathcal{A}$ za modalni tip τ_0. Budući da pripadni algebarski tip $\mathcal{T}_{\tau_0}$ sadrži simbole $\bot, \neg$ i $\vee$, tada algebra $\mathcal{A}$ treba biti proširenje neke Booleove algebre $(B, +, -, 0)$. Zatim, algebarski tip $\mathcal{T}_{\tau_0}$ sadrži i jedan unarni funkcijski simbol f (koji je pridružen unarnom modalnom operatoru $\Diamond$). Prisjetimo se da za svaka valuaciju θ na Booleovu algebru razmatramo jedinstveno proširenje (koje također označavamo sa θ) tako da za sve formule φ i ψ vrijedi sljedeće:

$$\theta(\neg\varphi) = -\theta(\varphi) \quad \text{i} \quad \theta(\varphi \vee \psi) = \theta(\varphi) + \theta(\psi)$$

Interpretaciju funkcijskog simbola f na Booleovoj algebri B označimo također sa f. Tada proširenje valuacije θ za svaku modalnu formulu φ treba zadovoljavati i sljedeće:

$$\theta(\Diamond\varphi) = f(\theta(\varphi))$$

Želimo da funkcija f "komutira s bulovskim veznicima" pa zahtijevamo da funkcija f ima i sljedeća dva svojstva:

$$f(0) = 0 \ \text{ i } f(a+b) = f(a) + f(b)$$

Definicija 3.19. Neka je τ modalni tip. *Booleova algebra s τ–operatorima* je algebra $\mathcal{A} = (A, +, -, 0, f_\Delta)_{\Delta\in\tau}$, gdje je $(A, +, -, 0)$ Booleova algebra, te za svaki $\triangle \in \tau$ imamo da je f_Δ operator mjesnosti $\rho(\Delta)$ koji zadovoljava sljedeća dva uvjeta:

(normalnost) ako je $a_i = 0$ za neki i $(0 \le i \le \rho(\Delta))$, tada

$$f_\Delta(a_1, \dots, a_{\rho(\Delta)}) = 0$$

(aditivnost) za svaki i $(0 \le i \le \rho(\Delta))$

$$\begin{aligned} &f_\Delta(a_1, \dots, a_i + a_i', \dots, a_{\rho(\Delta)}) = \\ &\qquad f_\Delta(a_1, \dots, a_i, \dots, a_{\rho(\Delta)}) + f_\Delta(a_1, \dots, a_i', \dots, a_{\rho(\Delta)}) \end{aligned}$$

Boolove algebre s operatorima kratko označavamo sa BAO.

Ovdje nećemo posebno isticati definiciju homomorfizma između dvije BAO, jer se nadamo da je taj pojam jasan. Sada prvo dajemo definiciju potpune kompleksne algebre za osnovni modalni jezik. Nakon toga ćemo dati definiciju za proizvoljni modalni tip.

Definicija 3.20. Neka je $\mathcal{F} = (W, R)$ neki Kripkeov okvir za osnovni modalni jezik, tj. promatramo osnovni modalni tip τ_0. Neka je $m_\Diamond : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W)$ funkcija definirana sa:

$$m_\Diamond(X) = \{w \in W : \text{ postoji } \ x \in X \ \text{ takav da } \ wRx\}$$

Tada uređenu petorku $(\mathcal{P}(W), \cup, {}^c, \emptyset, m_\Diamond)$ nazivamo *potpuna kompleksna algebra* i označamo je sa $\mathcal{F}^+$.

Propozicija 3.8. Za svaki Kripkeov okvir $\mathcal{F}$ pripadna potpuna kompleksna algebra $\mathcal{F}^+$ je jedna BAO.

Dokaz. Dovoljno je vidjeti da je operator $m_\Diamond$ normalan i aditivan. Očito vrijedi $m_\Diamond(\emptyset) = \emptyset$. Za proizvoljne $X, Y \subseteq W$ imamo redom:

$$\begin{aligned} m_\Diamond(X \cup Y) &= \{w \in W : \text{ postoji } x \in X \cup Y \text{ takav da } wRx\} \\ &= \{w \in W : \text{ postoji } x \in X \text{ takav da } wRx\} \\ &\quad \cup \{w \in W : \text{ postoji } x \in Y \text{ takav da } wRx\} \\ &= m_\Diamond(X) \cup m_\Diamond(Y) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Do sada smo razmatrali samo Kripkeove okvire za osnovni modalni jezik, tj. razmatrali smo samo τ_0–okvire. Za proizvoljni modalni tip τ strukutra $(W, R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ je *τ–okvir* ako je W neki neprazan skup, a za svaki modalni operator $\triangle \in \tau$ mjesnosti n vrijedi $R_\triangle \subseteq W^{n+1}$, tj. $R_\triangle$ je $(n+1)$–mjesna relacija na W.

Definicija 3.21. Za danu $(n+1)$–mjesnu relaciju R na skupu W definiramo n–mjesni operator m_R na podskupovima od W ovako:

$$m_R(X_1, \ldots, X_n) = \{w \in W \mid \begin{array}{l} \text{postoje } w_1 \in X_1, \ldots, w_n \in X_n \\ \text{tako da } (w, w_1, \ldots, w_n) \in R\} \end{array}$$

Neka je τ modalni tip i $\mathcal{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ neki τ–okvir. *Puna kompleksna algebra $\mathcal{F}^+$ pridružena okviru $\mathcal{F}$* je proširenje skupovne algebre $(\mathcal{P}(W), \cup, {}^c, \emptyset)$ s operatorima $m_{R_\triangle}$ za svaki $\triangle \in \tau$. *Kompleksna algebra* je svaka podalgebra potpune kompleksne algebre.

Propozicija 3.9. Neka je τ modalni tip i $\mathcal{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ neki τ–okvir. Tada je $\mathcal{F}^+$ jedna BAO.

Neka je $\mathcal{F}$ neki τ–okvir, te neka je Φ neki skup propozicionalnih varijabli. Svako preslikavanje $V : \Phi \to \mathcal{P}(W)$ nazivamo *valuacija* (na okviru $\mathcal{F}$). Za svaku valuaciju V na nekom τ–okviru $\mathcal{F}$ postoji jedinstveno proširenje $\widetilde{V}$ na skup svih formula koje ima sljedeća svojstva:

$$\begin{array}{ll} \widetilde{V}(\bot) = \emptyset, & \widetilde{V}(\neg\varphi) = W \setminus \widetilde{V}(\varphi) \\ \widetilde{V}(\varphi \vee \psi) = \widetilde{V}(\varphi) \cup \widetilde{V}(\psi) & \\ \widetilde{V}(\triangle(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) = m_{R_\triangle}(\widetilde{V}(\varphi_1), \ldots, \widetilde{V}(\varphi_n)), & \end{array}$$

za sve formule $\varphi, \psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, te svaki modalni operator $\triangle \in \tau$ (mjesnosti n). Nadalje ćemo jedinstveno proširenje $\widetilde{V}$ valuacije V također označavati sa V. Ako je $\mathcal{F}$ neki τ–okvir i V neka valuacija tada uređeni par $\mathfrak{M} = (\mathcal{F}, V)$ nazivamo *τ–model*. Na svakom modelu $\mathfrak{M} = (\mathcal{F}, V)$ definirana je relacija forsiranja $\Vdash$ koja za svaki svijet $w \in W$ ima sljedeća svojstva:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash p \;\Leftrightarrow\; w \in V(p), \quad \text{za svaku varijablu } \; p \in \Phi;$$

$$\mathfrak{M}, w \nVdash \bot;$$

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\varphi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{M}, w \nVdash \varphi;$$

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \vee \psi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \;\text{ ili }\; \mathfrak{M}, w \Vdash \psi;$$

$$\begin{array}{l} \mathfrak{M}, w \Vdash \triangle(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \;\Leftrightarrow\; (\exists v_1, \ldots v_n)(\mathfrak{M}, v_1 \Vdash \varphi_1, \;\ldots,\; \mathfrak{M}, v_n \Vdash \varphi_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \& \; (w, v_1, \ldots, v_n) \in R_\triangle) \end{array}$$

Ako je $\mathfrak{M} = (\mathcal{F}, V)$ neki τ–model tada očito za svaku formulu φ vrijedi: $w \in V(\varphi)$ ako i samo ako $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$. Iz tog razloga često ćemo i uređeni par $(\mathcal{F}, \Vdash)$ također nazivati τ–model.

Definicija 3.22. Neka je τ neki modalni tip, Φ skup varijabli i neka je $\mathcal{A} = (A, +, -, 0, f_\triangle)_{\triangle \in \tau}$ neka BAO. *Valuacija* je proizvoljna funkcija $\theta \colon \Phi \to A$.

Svaku valuaciju θ možemo na jedinstven način proširiti na skup svih terma, tj. do funkcije $\tilde{\theta} \colon Ter_\tau(\Phi) \to A$ na sljedeći način:

$$\tilde{\theta}(\bot) = 0, \qquad \tilde{\theta}(\neg s) = -\tilde{\theta}(s)$$
$$\tilde{\theta}(s \vee t) = \tilde{\theta}(s) + \tilde{\theta}(t)$$
$$\tilde{\theta}(\triangle(s_1, \ldots, s_n)) = f_\triangle(\tilde{\theta}(s_1), \ldots, \tilde{\theta}(s_n))$$

Nadalje ćemo jedinstveno proširenje $\tilde{\theta}$ valuacije θ također označavati sa θ.

Primijetimo da je svaka valuacija na algebri $\mathcal{F}^+$ ujedno i valuacija na okviru $\mathcal{F}$, i obratno.

Propozicija 3.10. Neka je τ neki modalni tip, φ i ψ neke τ–formule, $\mathcal{F}$ neki τ–okvir, θ valuacija i $w \in \mathcal{F}$. Tada vrijedi:

a) $(\mathcal{F}, \theta), w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $w \in \theta(\varphi)$;

b) $\mathcal{F} \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathcal{F}^+ \models \varphi \approx \top$;

c) $\mathcal{F} \Vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ako i samo ako $\mathcal{F}^+ \models \varphi \approx \psi$.

Prvo tvrdnju je lako dokazati indukcijom po složenosti formule, a druge dvije tvrdnje odmah slijede iz prve.

Za danu klasu K okvira modalnog tipa τ sa $\mathbf{Cm}\,\mathsf{K}$ označavat ćemo klasu punih kompleksnih algebri koji su pridruženi okvirima iz klase K. Iz prethodne propozicije odmah slijedi tvrdnja sljedećeg teorema.

Teorem 3.7. Neka je τ neki modalni tip, φ i ψ neke τ–formule, te neka je K neka klasa τ–okvira. Tada vrijedi:

a) $\mathsf{K} \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathbf{Cm}\,\mathsf{K} \models \varphi \approx \top$;

b) $\mathsf{K} \Vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ ako i samo ako $\mathbf{Cm}\,\mathsf{K} \models \varphi \approx \psi$.

Sada želimo istaknuti teorem potpunosti normalnih modalnih logika u odnosu na algebarsku semantiku, tj. u odnosu na Booleove algebre s operatorima. Neka je τ modalni tip i Σ neki skup τ–formula. Označimo $\Sigma^{\approx} = \{\varphi \approx \top : \varphi \in \Sigma\}$. Definiramo:

$$\mathsf{V}_\Sigma = \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ je BAO takva da } \mathcal{A} \models \Sigma^{\approx}\}$$

Za zadani skup τ–formula Σ s $\mathbf{K}_\tau\Sigma$ označavamo najmanju normalnu modalnu logiku čiji skup aksioma sadrži skup Σ.

Teorem 3.8. Neka je τ modalni tip i Σ neki skup τ–formula. Vrijedi:

$$\vdash_{\mathbf{K}_\tau\Sigma} \varphi \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathsf{V}_\Sigma \models \varphi \approx \top.$$

Skica dokaza. Adekvatnost se lako dokazuje indukcijom po duljini dokaza u sistemu $\mathbf{K}_\tau\Sigma$. Navodimo glavne dijelove dokaza potpunosti. Promatramo samo osnovni modalni tip τ_0. Neka je φ neka modalna formula za koju vrijedi $\not\vdash_{\mathbf{K}_\tau\Sigma} \varphi$. Algebru modalnih formula $Form(\Phi)$ proširimo s operatorom f koji je definiran sa: $f(\varphi) = \Diamond\varphi$. Zatim, na proširenoj algebri $Form(\Phi)$ definiramo relaciju $\equiv_{\mathbf{K}_\tau\Sigma}$ ovako:

$$\varphi \equiv_{\mathbf{K}_\tau\Sigma} \psi \;\; \text{ako i samo ako} \;\; \vdash_{\mathbf{K}_\tau\Sigma} \varphi \leftrightarrow \psi$$

Lako je pokazati da je $\equiv_{\mathbf{K}_\tau\Sigma}$ jedna relacija ekvivalencije. Za svaku modalnu formulu φ sa $[\varphi]$ označavamo pripadnu klasu ekvivalencije. Na skupu $Form(\Phi)/_{\equiv_{\mathbf{K}_\tau\Sigma}}$ definiramo operacije: $[\varphi] + [\psi] = [\varphi \vee \psi]$, $-[\varphi] = [\neg\varphi]$ i $f_\Diamond[\varphi] = [\Diamond\varphi]$. Lako je pokazati da prethodne definicije ne ovise o izboru reprezentanata. Tada je $\mathcal{L}_{\mathbf{K}_\tau\Sigma}(\Phi) = (Form(\Phi)/_{\equiv_{\mathbf{K}_\tau\Sigma}}, +, -, \bot, f_\Diamond)$ jedna BAO, te vrijedi:

a) $\vdash_{\mathbf{K}_\tau\Sigma} \psi$ ako i samo ako $\mathcal{L}_{\mathbf{K}_\tau\Sigma}(\Phi) \models \psi \approx \top$, za svaku modalnu formulu ψ

b) $\mathcal{L}_{\mathbf{K}_\tau\Sigma}(\Phi) \in \mathsf{V}_\Sigma$

Iz pretpostavke $\not\vdash_{\mathbf{K}_\tau\Sigma} \varphi$ slijedi $\mathsf{V}_\Sigma \not\models \varphi \approx \top$. Q.E.D.

Dakle, svaka normalna modalna logika je potpuna u odnosu na klasu svih BAO gdje su joj aksiomi istiniti. To je svakako interesantan rezultat (sjetimo se nepotpunosti u odnosu na Kripkeovu semantiku), ali nije baš sasvim ono što bismo željeli. Željeli bismo potpunost normalnih modalnih logika u odnosu na kompleksne algebre. To omogućava Jónsson–Tarskijev teorem: svaka BAO je izomorfna nekoj kompleksnoj algebri. Kako bismo mogli dati skicu dokaza Jónsson–Tarskijevog teorema moramo prvo definirati neke pojmove. Pojam filtra u Booleovoj algebri već smo definirali u zadatku 1 na strani 45. No, budući da nam je taj pojam jako važan u sljedećim razmatranjima, ovdje ponavljamo njegovu definiciju.

Definicija 3.23. *Filter Booleove algebre* $\mathcal{A} = (A, +, -, 0)$ je svaki podskup G od A koji zadovoljava sljedeće uvjete:

(F1) $1 \in G$

(F2) ako $a, b \in G$ tada $a \cdot b \in G$

(F3) ako $a \in G$ i $a \leq b$ tada $b \in G$

Pojam ultrafiltra u Booloevoj algebri definirali smo u zadatku 2 na strani 45 kao maksimalni pravi filter. U sljedećoj definiciji dajemo jednu ekvivalentnu karakterizaciju tog pojma.

Definicija 3.24. *Ultrafilter Booleove algebre* $\mathcal{A} = (A, +, -, 0)$ je svaki podskup F od A koji zadovoljava sljedeće uvjete:

(F1) $1 \in F$

(F2) ako $a, b \in F$ tada $a \cdot b \in F$

(F3) ako $a \in F$ i $a \leq b$ tada $b \in F$

(F4) $F \neq A$

(F5) za svaki $a \in A$ vrijedi $a \in F$ ili $-a \in F$.

Skup svih ultrafiltera Booleove algebre $\mathcal{A}$ označavamo sa $Uf\mathcal{A}$.

Uočimo: ultrafilter *nad* skupom W (u smislu definicije 1.21 na strani 17) je ultrafilter skupovne algebre $\mathcal{P}(W)$.

Svojstvo konačnih produkata definirali smo u zadatku 3 na strani 45. Ovdje ponavljamo tu definiciju.

Definicija 3.25. Neka je $\mathcal{A} = (A, +, -, 0)$ neka Booleova algebra. Kažemo da neprazni podskup S od A ima *svojstvo konačnih produkata* ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $s_1, \ldots, s_n \in S$ vrijedi $s_1 \cdots s_n \neq 0$.

Podskupovi Booleove algebre koji imaju svojstvo konačnih produkata mogu se proširiti do ultrafiltra. O tome govori sljedeća propozicija. Dokaz propozicije je sličan dokazu propozicije 3.4 o egzistenciji maksimalnog ideala. Zatim, na strani 17 je dokazana analogna propozicija 1.6 o svojstvu konačnih presjeka.

Propozicija 3.11. Neka je $\mathcal{A} = (A, +, -, 0)$ neka Booleova algebra i $\emptyset \neq S \subseteq A$ koji ima svojstvo konačnih produkata. Tada postoji ultrafilter F Booleove algebre $\mathcal{A}$ takav da $S \subseteq F$.

Definicija 3.26. Neka je $\mathcal{A} = (A, +, -, 0, f_\triangle)_{\triangle \in \tau}$ neka BAO. Za svaku funkciju $g : A^n \to A$ ($n \in \mathbb{N}$) definiramo $(n+1)$–mjesnu relaciju Q_g na skupu $Uf\mathcal{A}$ ovako:

$$\begin{aligned}(u, u_1, \ldots, u_n) \in Q_g \quad & \text{ako i samo ako} \\ & g(a_1, \ldots, a_n) \in u \text{ za sve } a_1 \in u_1, \ldots, a_n \in u_n\end{aligned}$$

Posebno, za svaki n–mjesni modalni operator $\triangle \in \tau$ definirana je $(n+1)$–mjesna relacija $Q_{f_\triangle}$ na skupu svih ultrafiltera $Uf\mathcal{A}$. Tada okvir $(Uf\mathcal{A}, Q_{f_\triangle})_{\triangle \in \tau}$ nazivamo *ultrafilter okvir* algebre $\mathcal{A}$ i označavamo ga sa $\mathcal{A}_+$.

Kompleksnu algebru $(\mathcal{A}_+)^+$ zovemo *kanonska algebra smještenja* algebre $\mathcal{A}$, te je označavamo sa $Em\,\mathcal{A}$.

Pojam ultrafilterskog proširenja modela definiran je na strani 18. Smatramo da je jasan pojam ultrafilterskog proširenja okvira $\mathcal{F}$. Označavamo ga sa $\mathfrak{ue}\,\mathcal{F}$. Nije teško provjeriti da za svaki okvir $\mathcal{F}$ vrijedi $\mathfrak{ue}\,\mathcal{F} = (\mathcal{F}^+)_+$.

Lema 3.5. Neka je $\mathcal{A}$ neka Booleova algebra, te f neka n–mjesna funkcija na algebri $\mathcal{A}$. Neka su $u, u_1, \ldots, , u_n$ proizvoljni ultrafiltri algebre $\mathcal{A}$. Tada vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$(u, u_1, \ldots, u_n) \in Q_f \text{ ako i samo ako } \quad \begin{array}{l} -f(-a_i, \ldots, -a_n) \in u \text{ povlači} \\ \text{da postoji } i \text{ tako da vrijedi } \ a_i \in u_i \end{array}$$

Dokaz. Pretpostavimo prvo da su $u, u_1, \ldots, u_n$ ultrafiltri algebre $\mathcal{A}$ tako da vrijedi $(u, u_1, \ldots, u_n) \in Q_f$. Zatim, neka su $a_1, \ldots, a_n \in A$ tako da je $-f(-a_1, \ldots, -a_n) \in u$. Pretpostavimo da za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ imamo $a_i \notin u_i$. Budući da su $u_1, \ldots, u_n$ ultrafiltri, tada imamo $-a_i \in u_i$, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sada iz pretpostavke $(u, u_1, \ldots, u_n) \in Q_f$ i definicije relacije Q_f slijedi $f(-a_1, \ldots, -a_n) \in u$. Time imamo $-f(-a_1, \ldots, -a_n) \in u$ i $f(-a_1, \ldots, -a_n) \in u$, što je nemoguće jer je u ultrafilter.

Dokažimo sada obratni smjer. U tu svrhu pretpostavimo da za sve $a_1, \ldots, a_n \in A$ takve da je $-f(-a_1, \ldots, -a_n) \in u$ postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ tako da vrijedi $a_i \in u_i$. Zatim, pretpostavimo da ne vrijedi $(u, u_1, \ldots, u_n) \in Q_f$. Iz definicije relacije Q_f slijedi da postoje $b_1, \ldots, b_n \in A$ tako da $b_i \in u_i$, te $f(b_1, \ldots, b_n) \notin u$. Budući da je u ultrafilter tada $-f(b_1, \ldots, b_n) \in u$. Iz početne pretpostavke slijedi da postoji $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tako da vrijedi $-b_{i_0} \in u_{i_0}$. Time imamo $b_{i_0} \in u$ i $-b_{i_0} \in u$, što je nemoguće. Q.E.D.

Teorem 3.9 (Jónsson–Tarski)**.** Neka je τ modalni tip i neka je $\mathcal{T}_\tau$–algebra $\mathcal{A} = (A, +, -, 0, f_\triangle)_{\triangle \in \tau}$ neka BAO. Neka je funkcija $r\colon A \to \mathcal{P}(Uf\mathcal{A})$ definirana sa $r(a) = \{u \in Uf\mathcal{A} \mid a \in u\}$. Funkcija r je injektivni homomorfizam između BAO $\mathcal{A}$ i kompleksne algebre $Em\mathcal{A}$.

Dokaz. Iz Stoneovog teorema reprezentacije slijedi da je funkcija r injektivni homomorfizam pripadnih Booleovih algebri. (Mi smo prilikom dokaza Stoneovog teorema promatrali ideale umjesto filtera, te smo funkciju r definirali na sljedeći način:

$$r(a) = \{I : I \text{ je maksimalni ideal i } a \notin I\} \text{).}$$

Treba još samo dokazati da za svaki modalni operator $\triangle \in \tau$ i $a_1, \ldots, a_n \in A$ vrijedi sljedeća jednakost skupova:

$$r(f_\triangle(a_1, \ldots, a_n)) = m_{Q_{f_\triangle}}(r(a_1), \ldots, r(a_n)).$$

Neka je $\triangle \in \tau$ proizvoljan modalni operator, te $a_1, \ldots, a_n \in A$ proizvoljni. Kako bi dokazali željenu skupovnu jednakost, dokazujemo obje inkluzije.

Neka je $u \in m_{Q_{f_\triangle}}(r(a_1), \ldots, r(a_n))$ proizvoljan ultrafilter. Iz definicije funkcije $m_{Q_{f_\triangle}}$ (vidi definiciju 3.21) slijedi da postoje ultrafiltri $u_1, \ldots, u_n$ takvi da $u_1 \in r(a_1), \ldots u_n \in r(a_n)$ i vrijedi $(u, u_1, \ldots, u_n) \in Q_{f_\triangle}$. Sada iz $u_1 \in r(a_1), \ldots, u_n \in r(a_n)$

i definicije funkcije r slijedi da za svaki $i = 1, \dots, n$ vrijedi $a_i \in u_i$. Iz činjenice $(u, u_1, \dots, u_n) \in Q_{f_\triangle}$ i $a_i \in u_i$, te definicije relacije $Q_{f_\triangle}$ (vidi definiciju 3.26) slijedi $f_\triangle(a_1, \dots, a_n) \in u$. Konačno, definicija funkcije r povlači $u \in r(f_\triangle(a_1, \dots, a_n))$.

Dokažimo sada obratnu inkluziju, tj. da vrijedi sljedeće:

$$r(f_\triangle(a_1, \dots, a_n)) \subseteq m_{Qf_\triangle}(r(a_1), \dots, r(a_n)).$$

U tu svrhu prvo indukcijom po n dokazujemo sljedeću pomoćnu tvrdnju:

$$(*) \begin{cases} \text{za svaki normalnu i aditivnu } n\text{–mjesnu funkciju } f \text{ na algebri } \mathcal{A} \text{ vrijedi da} \\ f(a_1, \dots, a_n) \in u \text{ povlači da postoje ultrafiltri } u_1, \dots, u_n \text{ takvi da vrijedi} \\ (u, u_1, \dots, u_n) \in Q_f, \text{ te za svaki } i = 1, \dots, n \text{ vrijedi } a_i \in u_i. \end{cases}$$

Primijetimo prvo da prethodna pomoćna tvrdnja povlači traženu inkluziju:

> Ako je $u \in r(f_\triangle(a_1, \dots, a_n))$ tada definicija funkcije r povlači da vrijedi $f_\triangle(a_1, \dots, a_n) \in u$. Budući je funkcija $f_\triangle$ normalna i aditivna tada pomoćna tvrdnja povlači $(u, u_1, \dots, u_n) \in Q_{f_\triangle}$, te $a_i \in u_i$, za svaki $i = 1, \dots, n$. Tada iz definicije funkcije r slijedi $u_i \in r(a_i)$, za svaki $i = 1, \dots, n$. Iz definicije funkcije $m_{Q_{f_\triangle}}$ tada konačno slijedi $u \in m_{Q_{f_\triangle}}(r(a_1), \dots, r(a_n))$.

Sada indukcijom dokazujemo prethodno navedenu pomoćnu tvrdnju. Neka je $n = 1$, te neka je $f : A \to A$ neka jednomjesna funkcija koja je normalna i aditivna. Neka je u neki ultrafilter na algebri $\mathcal{A}$, te $a_1 \in A$ tako da vrijedi $f(a_1) \in u$. Želimo dokazati da postoji ultrafilter u_1 algebre $\mathcal{A}$ tako da vrijedi $(u, u_1) \in Q_f$ i $a_1 \in u_1$. Iz leme 3.5 slijedi da bi za traženi ultrafilter u_1 trebalo vrijediti da za svaki $y \in A$ činjenica $-f(-y) \in u$ povlači $y \in u_1$. To nam daje ideju za definiciju skupova F i G kojima će traženi ultrafilter u_1 biti nadskup. Neka je $F = \{y \in A : -f(-y) \in u\}$, te $G = F \cup \{a_1\}$.

Dokažimo prvo da je skup F zatvoren za konačne produkte. Neka su $x, y \in F$ proizvoljni. Tada iz definicije skupa F slijedi $-f(-x), -f(-y) \in u$. Budući da je u ultrafilter, tada imamo $(-f(-x)) \cdot (-f(-y)) \in u$. Redom imamo:

$$\begin{aligned} -f(-(x \cdot y)) &= -f((-x) + (-y)) = -(f(-x) + f(-y)) \\ &= (-f(-x)) \cdot (-f(-y)) \end{aligned}$$

Time imamo $-f(-(x \cdot y)) \in u$, a onda iz definicije skupa F slijedi $x \cdot y \in F$.

Budući da je po pretpostavci funkcija f normalna, tada imamo $f(0) = 0$. Ako bi vrijedilo $0 \in F$ tada $-f(0) \in u$, tj. $0 \in u$, što je nemoguće. Dakle, $0 \notin F$, pa zatvorenost na konačne produkte povlači u ovom slučaju da skup F ima svojstvo konačnih produkata.

Dokažimo sada da skup G ima svojstvo konačnih produkata. Budući da smo dokazali da skup F ima svojstvo konačnih produkata, dovoljno je dokazati da za svaki $y \in F$ vrijedi $a_1 \cdot y \neq 0$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $y \in F$ tako da vrijedi $a_1 \cdot y = 0$. Lako je vidjeti da vrijedi redom:

$$a_1 = a_1 \cdot 1 = a_1 \cdot (y + (-y)) = a_1 \cdot y + a_1 \cdot (-y) = a_1 \cdot (-y)$$

Činjenica $a_1 = a_1 \cdot (-y)$ povlači $a_1 \leq -y$. Lako je vidjeti da je aditivna funkcija f monotona, pa imamo $f(a_1) \leq f(-y)$. Sada ovo posljednje i $f(a_1) \in u$ povlače $f(-y) \in u$. No, budući je $y \in F$ tada je $-f(-y) \in u$, pa imamo $-f(-y), f(-y) \in u$, što je nemoguće.

Budući da skup G ima svojstvo konačnih produkata, tada iz propozicije 3.11 slijedi da postoji ultrafilter u_1 tako da $G \subseteq u_1$. Time je tvrdnja u bazi indukcije dokazana.

Dokažimo da vrijedi i tvrdnja u koraku indukcije. Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takav da za svaku n–mjesnu normalnu i aditivnu funkciju g na algebri $\mathcal{A}$ vrijedi tvrdnja. Neka je f neka $(n+1)$–mjesna normalna i aditivna funkcija na algebri $\mathcal{A}$. Zatim, neka su $a_1, \ldots, a_{n+1} \in A$ tako da vrijedi $f(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in u$. Želimo dokazati da postoje ultrafiltri $u_1, \ldots, u_{n+1}$ algebre $\mathcal{A}$ tako da vrijedi $(u, u_1, \ldots, u_{n+1}) \in Q_f$ i $a_i \in u_i$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Definiramo funkciju $g : A^n \to A$ sa

$$g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n, a_{n+1})$$

Očito je g n–mjesna normalna i aditivna funkcija, te vrijedi $g(a_1, \ldots, a_n) \in u$. Iz pretpostavke indukcije slijedi da postoje ultrafiltri $u_1, \ldots, u_n$ algebre $\mathcal{A}$ takvi da $a_1 \in u_1, \ldots, a_n \in u_n$, te za sve $b_1, \ldots, b_n \in A$ za koje je vrijedi $b_1 \in u_1, \ldots, b_n \in u_n$, imamo $g(b_1, \ldots, b_n) \in u$. Budući da je $g(b_1, \ldots, b_n) = f(b_1, \ldots, b_n, a_{n+1})$, tada imamo da za sve $b_1, \ldots, b_n \in A$ takve da $b_1 \in u_1, \ldots, b_n \in u_n$ vrijedi $f(b_1, \ldots, b_n, a_{n+1}) \in u$. Preostalo je dokazati da postoji ultrafilter u_{n+1} tako da vrijedi $a_{n+1} \in u_{n+1}$ i $(u, u_1, \ldots, u_{n+1}) \in Q_f$. Radi kraćeg zapisa umjesto $b_1 \in u_1, \ldots, b_n \in u_n$ pisat ćemo $\vec{b} \in \vec{u}$ (pri čemu su $b_1, \ldots, b_n$ proizvoljni elementi algebre $\mathcal{A}$.) Lako je vidjeti da vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned}
(u, u_1, \ldots, \ & u_{n+1}) \in Q_f \\
& \Leftrightarrow (\forall \vec{b} \in \vec{u})(\forall y \in A)(y \in u_{n+1} \text{ povlači } f(\vec{b}, y) \in u) \\
& \Leftrightarrow (\forall \vec{b} \in \vec{u})(\forall y \in A)(f(\vec{b}, y) \notin u \text{ povlači } y \notin u_{n+1}) \\
& \Leftrightarrow (\forall \vec{b} \in \vec{u})(\forall y \in A)(-f(\vec{b}, y) \in u \text{ povlači } -y \in u_{n+1}) \\
& \Leftrightarrow (\forall \vec{b} \in \vec{u})(\forall z \in A)(-f(\vec{b}, -z) \in u \text{ povlači } z \in u_{n+1})
\end{aligned}$$

To znači da traženi ultrafilter u_{n+1} mora sadržavati sljedeći skup:

$$F = \{z \in A : (\exists \vec{b} \in \vec{u})(-(f(\vec{b}, -z) \in u))\}$$

Neka je $G = F \cup \{a_{n+1}\}$.

Dokažimo prvo da je skup F zatvoren na konačne produkte. Neka su $y, z \in F$ proizvoljni. Iz definicije skupa F slijedi da postoje konačni nizovi $\vec{b}, \vec{c} \in \vec{u}$ tako da vrijedi $-f(\vec{b}, -y), -f(\vec{c}, -z) \in u$. Neka je $\vec{d} = (b_1 \cdot c_1, \ldots, b_n \cdot c_n)$. Očito je $\vec{d} \in \vec{u}$. Iz $d_i = b_i \cdot c_i$ posebno slijedi $d_i \leq b_i$, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ (zašto?). Budući da je f aditivna, onda je i monotona funkcija. Tada posebno vrijedi $f(\vec{d}, -y) \leq f(\vec{b}, -y)$, a onda $-f(\vec{b}, -y) \leq -f(\vec{d}, -y)$. Sada iz ovog posljednjeg, te činjenice da je u ultrafilter i vrijedi $-f(\vec{b}, -y) \in u$, slijedi $-f(\vec{d}, -y) \in u$. Sasvim analogno bi dokazali da vrijedi $-f(\vec{d}, -z) \in u$. Sada iz $-f(\vec{d}, -y) \in u$ i $-f(\vec{d}, -z) \in u$ slijedi $[-f(\vec{d}, -y)] \cdot [-f(\vec{d}, -z)] \in u$. Lako je vidjeti da redom vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} -f(\vec{d}, -(y \cdot z)) &= -f(\vec{d}, (-y) + (-z)) = -[f(\vec{d}, -y) + f(\vec{d}, -z)] \\ &= [-f(\vec{d}, -y)] \cdot [-f(\vec{d}, -z)] \end{aligned}$$

Tada imamo $-f(\vec{d}, -(y \cdot z)) \in u$, a onda iz definicije skupa F slijedi $y \cdot z \in F$. Time je dokazano da je skup F zatvoren na konačne produkte.

Iz definicije skupa F (odnosno, iz normalnosti funkcije f) slijedi da $0 \notin F$. To znači da zatvorenost skupa F na konačne produkte povlači da skup F ima svojsvo konačnih produkata.

Dokažimo sada da skup G ima svojstvo konačnih produkata. U tu svrhu je dovoljno dokazati da za svaki $z \in F$ vrijedi $a_{n+1} \cdot z \neq 0$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $z \in F$ tako da vrijedi $a_{n+1} \cdot z = 0$. Iz činjenice $z \in F$ i definicije skupa F slijedi da postoji $\vec{b} \in \vec{u}$ tako da vrijedi $-f(\vec{b}, -z) \in u$. Iz $a_{n+1} \cdot z = 0$ posebno slijedi $a_{n+1} \leq -z$ (zašto?). Budući je po pretpostavci funkcija f aditivna, tada je i monotona u svakom argumentu. Iz monotonosti funkcije f tada slijedi $f(\vec{b}, a_{n+1}) \leq f(\vec{b}, -z)$, a onda i $-f(\vec{b}, -z) \leq -f(\vec{b}, a_{n+1})$. Sada posljednja nejednakost, te $-f(\vec{b}, -z) \in u$, povlače $-f(\vec{b}, a_{n+1}) \in u$ (budući da je u ultrafilter). No, znamo $f(\vec{b}, a_{n+1}) \in u$, pa je dobivena kontradikcija.

Budući da skup G ima svojstvo konačnih produkata, tada iz propozicije 3.11 slijedi da postoji ultrafilter $u_{n+1} \supseteq G$. Tada vrijedi $a_{n+1} \in u_{n+1}$ i $(u, u_1, \ldots, u_{n+1}) \in Q_f$. Time je pomoćna tvrdnja $(*)$ dokazana. Q.E.D.

3.6 Teorija dualnosti

Do sada smo naučili konstruirati okvire iz algebri i algebre iz okvira. No, u logici postoje metode za konstruiranje novih okvira iz starih (primjerice, ograničeni morfizmi, generirani podokviri i disjunktne unije). U algebri se susrećemo s homomorfizmima, podalgebrama i direktnim produktima. Postavlja se pitanje jesu li te konstrukcije nekako povezane. Odgovor nam daje *teorija dualnosti* koju ćemo sada proučavati.

Prije su bili definirani pojmovi disjunktne unije modela (vidi definiciju 1.15 na strani 10), generiranog podmodela (vidi definiciju 1.16 na strani 11), ograničenog morfizma između modela (vidi definiciju 1.17 na strani 12), te ultrafilterskog proširenja modela (vidi definiciju 1.23 na strani 18) osnovnog modalnog jezika. Sada te konstukcije definiramo za τ_0–okvire. Smatramo da je lako napisati definicije za proizvoljan modalni tip τ.

Definicija 3.27. Neka je $(\mathfrak{F}_i = (W_i, R_i) : i \in I)$ neka familija τ_0–okvira čiji su nosači međusobno disjunktni. Njihova *disjunktna unija* je okvir $\biguplus_i \mathfrak{F}_i = (W, R)$, gdje je $W = \bigcup_i W_i$ i $R = \bigcup_i R_i$.

Disjunktna unija okvira čiji nosači nisu disjunktni definira se tako da se promatraju disjunktne kopije. Primjerice, umjesto okvira $\mathfrak{F}_i = (W_i, R_i)$ promatramo okvir s nosačem $\{(w, i) : w \in W_i\}$, te se nadamo da je jasno kako definirati relaciju dostiživosti.

Definicija 3.28. Kažemo da je τ_0–okvir $\mathfrak{F}' = (W', R')$ *podokvir* τ_0–okvira $\mathfrak{M} = (W, R)$ ako je $W' \subseteq W$ i $R' = R \cap (W' \times W')$.

Kažemo da je $\mathfrak{F}' = (W'R')$ *generirani podokvir* okvira $\mathfrak{F}$ ako je $\mathfrak{F}'$ podokvir od $\mathfrak{F}$ i za sve $w, v \in W$ vrijedi da wRv i $w \in W'$ povlači $v \in W'$.

Definicija 3.29. Neka su $\mathfrak{F}$ i $\mathfrak{F}'$ neki τ_0–okviri. Funkciju $f : W \to W'$ zovemo *ograničeni morfizam* ako za sve $w, v \in W$, te $v' \in W'$ vrijedi:

(forth) ako wRv tada $f(w)R'f(v)$

(back) ako $f(w)R'v'$ tada postoji $v \in W$ tako da vrijedi wRv i $f(v) = v'$

Definicija 3.30. *Ultrafiltersko proširenje* τ_0–okvira $\mathfrak{F} = (W, R)$ je τ_0–okvir $\mathfrak{ue}\,\mathcal{F} = (Uf(W), R^{\mathfrak{ue}})$, gdje je:

a) $Uf(W)$ skup svih ultrafiltera nad skupom W

b) $uR^{\mathfrak{ue}}v$ ako i samo ako za svaki $X \in v$ vrijedi $m_\Diamond(X) \in u$

Sada uvodimo neke oznake, a zatim ćemo izreći dva osnovna teorema teorije dualnosti koja ćemo kasnije i dokazati.

Definicija 3.31. Neka je τ modalni tip, $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ τ–okviri, te $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ Booleove algebre s τ–operatorima. Uvodimo sljedeće oznake:

a) $\mathcal{F} \rightarrowtail \mathcal{G}$ za činjenicu da je okvir $\mathcal{F}$ je izomorfan nekom generiranom podokviru okvira $\mathcal{G}$;

b) $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{G}$ za činjenicu da je okvir $\mathcal{G}$ slika okvira $\mathcal{F}$ za neki ograničeni morfizam;

c) $\mathcal{A} \rightarrowtail \mathcal{B}$ za činjenicu da je algebra $\mathcal{A}$ izomorfna nekoj podalgebri algebre $\mathcal{B}$;

d) $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$ za činjenicu da je algebra $\mathcal{B}$ homomorfna slika algebre $\mathcal{A}$.

Teorem 3.10. Neka je τ modalni tip, $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ neki τ–okviri, te $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ Booleove algebre s τ–operatorima. Tada vrijedi:

(i) ako $\mathcal{F} \rightarrowtail \mathcal{G}$ tada $\mathcal{G}^+ \twoheadrightarrow \mathcal{F}^+$

(ii) ako $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{G}$ tada $\mathcal{G}^+ \rightarrowtail \mathcal{F}^+$

(iii) ako $\mathcal{A} \rightarrowtail \mathcal{B}$ tada $\mathcal{B}_+ \twoheadrightarrow \mathcal{A}_+$

(iv) ako $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$ tada $\mathcal{B}_+ \rightarrowtail \mathcal{A}_+$

Dokaz slijedi iz Propozicija 3.12 i 3.13 koje navodimo malo kasnije.

Teorem 3.11. Neka je τ modalni tip i $(\mathcal{F}_i = (W_i, R_{i\triangle})_{\triangle\in\tau},\ i \in I)$ neka familija τ–okvira. Tada vrijedi:

$$\left(\biguplus_{i\in I} \mathcal{F}_i\right)^+ \cong \prod_{i\in I} \mathcal{F}_i^+$$

Dokaz. Uvedimo prvo oznake:

$$\mathcal{A} = \left(\biguplus_{i\in I} \mathcal{F}_i\right)^+, \qquad \mathcal{B}_i = \mathcal{F}_i^+ \qquad \text{i} \qquad \mathcal{B} = \prod_{i\in I} \mathfrak{B}_i$$

Kako bi dokazali teorem, trebamo konstruirati izomorfizam između algebri $\mathcal{A}$ i $\mathfrak{B}$. To znači da nam treba neka funkcija η kojoj će domena biti partitivni skup disjunktne unije nosača naših okvira, tj. $\mathcal{P}(\biguplus_{i\in I} W_i)$, a kodomena će biti produkt partitivnih skupova nosača okvira, tj. $\prod_{i\in I} \mathcal{P}(W_i)$. Elementi domene su skupovi $X \in \mathcal{P}(\biguplus_{i\in I} W_i)$, a elementi kodomene su funkcije σ takve da je $\sigma(i) \in \mathcal{P}(W_i)$, za svaki $i \in I$. Znači, za svaki $X \in \mathcal{P}(\biguplus_{i\in I} W_i)$ vrijedi da je $\eta(X)$ neka funkcija s domenom I. Za svaki $X \in \mathcal{P}(\biguplus_{i\in I} W_i)$ definiramo funkciju $\eta(X) : I \to \cup W_i$ sa $\eta(X)(i) = X \cap W_i$.

Neka je $\triangle \in \tau$ proizvoljan n–mjesni modalni operator. Neka je $R_\triangle = \cup_{i\in I} R_{i\triangle}$. Označimo s $f_\mathcal{A}$ funkciju na algebri $\mathcal{A}$ koja je pridružena operatoru $\triangle$ (primijetimo $f_\mathcal{A} = m_{R_\triangle}$). Zatim, neka je s $f_\mathcal{B}$ označena funkcija na algebri $\mathcal{B}$ koja je pridružena operatoru $\triangle$. Za svaki $j \in I$ neka je sa $f_{\mathcal{B}_j}$ označena funkcija na algebri $\mathcal{B}_j$ priđužena operatoru $\triangle$ (primijetimo $f_{\mathcal{B}_j} = m_{R_{j\triangle}}$).

Tvrdimo da je funkcija η bijekcija i da za sve podskupove $X_1, \ldots, X_n$ od $\biguplus_{i\in I} W_i$ vrijedi sljedeće:

$$\eta(f_\mathcal{A}(X_1, \ldots, X_n)) = f_\mathcal{B}(\eta(X_1), \ldots, \eta(X_n)) \tag{3.1}$$

Neka su $X_1, \ldots, X_n$ proizvoljni podskupovi od $\biguplus_{i\in I} W_i$. Tada za svaki $j \in I$ očito vrijedi:

$$\begin{aligned}
\eta(f_\mathcal{A}(X_1, \ldots, X_n))(j) &= \eta(m_{R_\triangle}(X_1, \ldots, X_n))(j) = m_{R_\triangle}(X_1, \ldots, X_n) \cap W_j \\
&= \{w \in \textstyle\biguplus_{i\in I} W_i : \text{tako da postoje } w_1 \in X_1, \ldots, w_n \in X_n, \\
&\quad \text{za koje vrijedi } (w, w_1, \ldots, w_n) \in R_\triangle\} \bigcap W_j
\end{aligned}$$

Ako je $w \in \eta(m_{R_\triangle}(X_1, \ldots, X_n))(j)$ tada $w \in W_j$. Tada $(w, w_1, \ldots, w_n) \in R_\triangle$ povlači $w_1, \ldots, w_n \in W_j$ (jer su relacije $R_{i\triangle}$ disjuktne). Tada imamo:

$$\begin{aligned}
\eta(m_{R_\triangle}(X_1, \ldots, X_n))(j) = \quad & \{w \in \biguplus_{i\in I} W_i : \text{tako da postoje} \\
& w_1 \in X_1 \bigcap W_j, \ldots, w_n \in X_n \bigcap W_j, \\
& \text{za koje vrijedi } (w, w_1, \ldots, w_n) \in R_{j\triangle}\} \\
= \quad & \{w \in \biguplus_{i\in I} W_i : \text{tako da postoje} \\
& w_1 \in \eta(X_1), \ldots, w_n \in \eta(X_n), \\
& \text{za koje vrijedi } (w, w_1, \ldots, w_n) \in R_{j\triangle}\} \\
= \quad & m_{R_{j\triangle}}(\eta(X_1), \ldots, \eta(X_n)) = f_{\mathcal{B}_j}(\eta(X_1), \ldots, \eta(X_n))
\end{aligned}$$

Iz definicije produkta algebri slijedi da vrijedi sljedeća jednakost:

$$f_{\mathcal{B}}(\eta(X_1), \ldots, \eta(X_n))(j) = f_{\mathcal{B}_j}(\eta(X_1), \ldots, \eta(X_n)),$$

pa dobivamo traženu jednakost (3.1), tj. η je homomorfizam.

Pokažimo da je funkcija η injekcija. Neka su $X, Y \in \mathcal{P}(\biguplus_{i\in I} W_i)$ takvi da $X \neq Y$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da postoje $i \in I$ i $w \in W_i$ takvi da $w \in X$ i $w \notin Y$. No, tada je $\eta(X)(i) = X \cap W_i \neq Y \cap W_i = \eta(Y)(i)$, pa vrijedi i $\eta(X) \neq \eta(Y)$.

Dokažimo na kraju da je funkcija η surjekcija. Neka je $g \in \prod_{i\in I} \mathcal{F}_i^+$ proizvoljna funkcija. Tada je $g\colon I \to \cup_{i\in I}\mathcal{P}(W_i)$ i za svaki $i \in I$ vrijedi $g(i) \in \mathcal{P}(W_i)$. Neka je $X = \cup_{i\in I} g(i)$. Očito je $X \in \mathcal{P}(\biguplus_{i\in I} W_i)$, i imamo $\eta(X)(i) = X \cap W_i = g(i)$, tj. $\eta(X) = g$. Q.E.D.

Uočimo da Teorem 3.11 daje vezu od okvira prema algebrama. Prirodno se postavlja pitanje vrijedi li (kao u Teoremu 3.10) i obratan smjer, tj. vrijedi li općenito

$$\left(\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i\right)_+ \cong \biguplus_{i\in I} (\mathcal{A}_i)_+, \text{za proizvoljnu familiju algebri } (\mathcal{A}_i : i \in I) \text{ istog tipa.}$$

Odgovor je — ne! Navodimo jedan primjer za to. Neka je $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ poizvoljna prebrojiva familija konačnih netrivijalnih algebri. Nosač od $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_i$ je Kartezijev produkt nosača od $\mathcal{A}_i$. Kako su po pretpostavci algebre $\mathcal{A}_i$ netrivijalne, svaki nosač ima bar 2 elementa, pa njihov produkt ima neprebrojivo mnogo elemenata. S druge strane, ultrafilter okvir konačne algebre je konačan, pa je prebrojiva unija konačnih okvira prebrojiva. To znači da između okvira $\left(\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i\right)_+$ i $\biguplus_{i\in I} (\mathcal{A}_i)_+$ ne možemo uspostaviti bijekciju, pa oni nisu izomorfni.

Sada nam je cilj dokazati teorem 3.10. Za to nam trebaju prvo sljedeće definicije.

Definicija 3.32. Neka su $\mathcal{A} = (A, +, -, 0, f_{\mathcal{A}})_{f\in\tau}$ i $\mathcal{B} = (B, +, -, 0', f'_{\mathcal{B}})_{f\in\tau}$ dvije BAO istog tipa, i neka je $\eta\colon A \to B$ proizvoljna funkcija. Kažemo da je funkcija η *Booleov homomorfizam* ako je η homomorfizam pripadnih Booleovih algebri $(A, +, -, 0)$ i $(B, +, -, 0')$. Kažemo da je funkcija η *modalni homomorfizam* ako za svaki n–mjesni modalni operator $f \in \tau$ vrijedi $\eta(f_{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f_{\mathcal{B}}(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n))$. Kažemo da je funkcija η BAO*–homomorfizam* ako je istovremeno Booleov i modalni homomorfizam.

Definicija 3.33. Neka su W i W' proizvoljni skupovi i $\theta\colon W \to W'$ neka funkcija. Neka je $\theta^+\colon \mathcal{P}(W') \to \mathcal{P}(W)$ funkcija definirana sa $\theta^+(Y) = \{u \in W \mid \theta(u) \in Y\}$. Funkciju θ^+ nazivamo *dual* funkcije θ.

Sljedeću propoziciju koristit ćemo u dokazu teorema 3.10.

Propozicija 3.12. Neka su $\mathcal{F} = (W, R_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ i $\mathcal{F}' = (W', R'_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ τ–okviri, te neka je $\theta\colon W \to W'$ proizvoljna funkcija. Neka je $\triangle \in \tau$ neki n–mjesni modalni operator. Pripadnu relaciju dostiživosti $R_\triangle$ označavat ćemo sa R, a umjesto $R'_\triangle$ pisat ćemo R'. Vrijede sljedeće tvrdnje:

(i) θ^+ je Booleov homomorfizam algebri $(\mathcal{F}')^+$ i $\mathcal{F}^+$;

(ii) ako funkcija θ zadovoljava (forth) uvjet (vidi definiciju 3.29) tada vrijedi:
$$m_R(\theta^+(Y_1), \ldots, \theta^+(Y_n)) \subseteq \theta^+(m_{R'}(Y_1, \ldots, Y_n));$$

(iii) ako funkcija θ zadovoljava (back) uvjet (vidi definiciju 3.29) tada vrijedi:
$$m_R(\theta^+(Y_1), \ldots, \theta^+(Y_n)) \supseteq \theta^+(m_{R'}(Y_1, \ldots, Y_n))$$

(iv) ako je funkcija θ ograničeni morfizam tada je funkcija θ^+ BAO–homomorfizam algebri $\mathcal{F}'^+$ i $\mathcal{F}^+$;

(v) ako je funkcija θ injekcija tada je funkcija θ^+ surjekcija;

(vi) ako je funkcija θ surjekcija tada je funkcija θ^+ injekcija.

Dokaz.

(i) Trebamo pokazati da je θ^+ homomorfizam s obzirom na Booleove operatore. Ako bi postojao $x \in \theta^+(\emptyset)$ tada bi imali $\theta(x) \in \emptyset$. Dakle, $\theta^+(\emptyset) = \emptyset$.

Pogledajmo sada komplementiranje:
$$x \in \theta^+(Y^c) \;\Leftrightarrow\; \theta(x) \in Y^c \;\Leftrightarrow\; \theta(x) \notin Y \;\Leftrightarrow\; x \notin \theta^+(Y),$$
što znači da vrijedi $\theta^+(Y^c) = (\theta^+(Y))^c$.

Na kraju, provjerimo zatvorenost na uniju:
$$\begin{aligned} x \in \theta^+(Y_1 \cup Y_2) \;&\Leftrightarrow\; \theta(x) \in Y_1 \cup Y_2 \;\Leftrightarrow\; \theta(x) \in Y_1 \text{ ili } \theta(x) \in Y_2 \\ &\Leftrightarrow\; x \in \theta^+(Y_1) \text{ ili } x \in \theta^+(Y_2) \;\Leftrightarrow\; x \in \theta^+(Y_1) \cup \theta^+(Y_2), \end{aligned}$$
iz čega dobivamo $\theta^+(Y_1 \cup Y_2) = \theta^+(Y_1) \cup \theta^+(Y_2)$.

(ii) Pretpostavimo da funkcija θ zadovoljava (forth) uvjet, tj. da iz pretpostavke $(w, v_1, \ldots, v_n) \in R$ slijedi $(\theta(w), \theta(v_1), \ldots, \theta(v_n)) \in R'$. Neka je x proizvoljan element skupa $m_R(\theta^+(Y_1), \ldots, \theta^+(Y_n))$. Iz definicije funkcije m_R slijedi da postoje $y_1, \ldots, y_n$ takvi da za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $y_i \in \theta^+(Y_i)$, te imamo $(x, y_1, \ldots y_n) \in R$. Koristeći definiciju funkcije θ^+ dobivamo da za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $\theta(y_i) \in Y_i$. Iz činjenice $(x, y_1, \ldots y_n) \in R$ primjenom (forth) uvjeta dobivamo da vrijedi $(\theta(x), \theta(y_1), \ldots, \theta(y_n)) \in R'$, što povlači $\theta(x) \in m_{R'}(Y_1, \ldots, Y_n)$, odnosno $x \in \theta^+(m_{R'}(Y_1, \ldots, Y_n))$.

(iii) Pretpostavimo sada da funkcija θ zadovoljava (back) uvjet, tj. ako imamo da vrijedi $(\theta(w), v_1, \ldots, v_n) \in R'$ tada postoje $w_1, \ldots, w_n \in W$ takvi da je ispunjeno $(w, w_1, \ldots, w_n) \in R$, te za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $\theta(w_i) = v_i$. Neka je $w \in \theta^+(m_{R'}(Y_1, \ldots, Y_n))$ proizvoljan. Tada vrijedi $\theta(w) \in m_{R'}(Y_1, \ldots, Y_n)$, pa postoje $y_1, \ldots, y_n \in W'$ takvi da za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $y_i \in Y_i$, te imamo $(\theta(w), y_1, \ldots y_n) \in R'$. Budući da po pretpostavci funkcija θ zadovoljava (back) uvjet, tada postoje $w_1, \ldots, w_n \in W$ takvi da za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $\theta(w_i) = y_i$, te imamo $(w, w_1, \ldots, w_n) \in R$. Iz činjenice $y_i \in Y_i$ slijedi $w_i \in \theta^+(Y_i)$, a onda konačno $w \in m_R(\theta^+(Y_1), \ldots, \theta^+(Y_n))$.

(iv) Ova tvrdnja je direktna posljedica upravo dokaznih tvrdnji (i), (ii) i (iii).

(v) Pretpostavimo da je funkcija θ injekcija, te neka je $X \subseteq W$ proizvoljan. Trebamo dokazati da postoji $Y \subseteq W'$ tako da vrijedi $\theta^+(Y) = X$. Neka je $\theta[X] := \{\theta(x) \mid x \in X\}$. Tvrdimo da vrijedi $\theta^+(\theta[X]) = X$. Ako je $x \in X$ tada je $\theta(x) \in \theta[X]$. Iz definicije funkcije θ^+ imamo $x \in \theta^+(\theta[X])$. To znači da vrijedi $X \subseteq \theta^+(\theta[X])$. Dokažimo obratnu inkluziju. Neka je $x \in \theta^+(\theta[X])$ proizvoljan. Tada je po definiciji $\theta(x) \in \theta[X]$, pa postoji $y \in X$ takav da je $\theta(x) = \theta(y)$. Kako je θ injekcija tada imamo $x = y$, a onda i $x \in X$.

(vi) Neka je funkcija θ surjekcija i neka su Y_1 i Y_1 različiti podskupovi od W'. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da postoji $y \in W'$ takav da je $y \in Y_1$ i $y \notin Y_2$. Budući da je funkcija θ surjekcija, tada postoji $x \in W$ takav da je $\theta(x) = y$. Tada iz definicije θ^+ imamo $x \in \theta^+(Y_1)$ i $x \notin \theta^+(Y_2)$. Prema tome, $\theta^+(Y_1) \neq \theta^+(Y_2)$, pa je funkcija θ^+ injekcija. Q.E.D.

Definicija 3.34. Neka su $\mathcal{A} = (A, +, -, 0, f_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ i $\mathcal{A}' = (A', +, -, 0', f'_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ dvije BAO istog tipa, te neka je $\eta : A \to A'$ neka funkcija. *Dual* funkcije η je funkcija $\eta_+ : \mathcal{P}(A') \to \mathcal{P}(A)$ koja je definirana sa $\eta_+(Y) = \{a \in A : \eta(a) \in Y\}$.

Propozicija 3.13. Neka su $\mathcal{A} = (A, +, -, 0, f_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ i $\mathcal{A}' = (A', +, -, 0', f'_\triangle)_{\triangle\in\tau}$ dvije BAO istog tipa τ, te neka je $\eta\colon A \to A'$ proizvoljna funkcija. Neka je $\triangle \in \tau$ proizvoljan n–mjesni modalni operator. Umjesto $f_\triangle$ pisat ćemo f, a umjesto $f'_\triangle$ pisat ćemo f'. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

(i) ako je funkcija η Booleov homomorfizam, tada funkcija η_+ preslikava ultrafiltre u ultrafiltre;

(ii) ako za sve $a_1, \ldots, a_n \in A$ vrijedi $f'(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)) \leq \eta(f(a_1, \ldots, a_n))$, tada funkcija η_+ zadovoljava (forth) uvjet;

(iii) ako za sve $a_1, \ldots, a_n \in A$ vrijedi $f'(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)) \geq \eta(f(a_1, \ldots, a_n))$ i funkcija η je Booleov homomorfizam, tada funkcija η_+ zadovoljava (back) uvjet;

(iv) ako je funkcija η BAO–homomorfizam, tada je funkcija $\eta_+ \colon Uf\mathcal{A}' \to Uf\mathcal{A}$ ograničeni morfizam;

(v) ako je funkcija η injektivni Booleov homomorfizam, tada je funkcija $\eta_+ \colon Uf\mathcal{A}' \to Uf\mathcal{A}$ surjekcija;

(vi) ako je η surjektivni Booleov homomorfizam, tada je funkcija $\eta_+ \colon Uf\mathcal{A}' \to Uf\mathcal{A}$ injekcija.

Dokaz.

(i) Dokazujemo da svaki Booleov homomorfizam η preslikava svaki ultrafilter u neki ultrafilter. Neka je u' neki ultrafilter algebre $\mathcal{A}'$. Trebamo pokazati da je skup $\eta_+(u') = \{a \in A \mid \eta(a) \in u'\}$ također ultrafilter. Provjerit ćemo svih 5 uvjeta iz definicije ultrafiltera.

(F1) Funkcija η je Booleov homomorfizam, pa vrijedi $\eta(1) = 1'$, a onda posebno imamo $1' \leq \eta(1)$. Budući da je u' ultrafilter tada $1' \in u'$, a onda $\eta(1) \in u'$. Iz definicije funkcije η_+ slijedi $1 \in \eta_+(u')$.

(F2) Neka su $a, b \in \eta_+(u')$. Tada $\eta(a), \eta(b) \in u'$. Budući da je u' ultrafilter i η je Booleov homomorfizam, tada je $\eta(a \cdot b) = \eta(a) \cdot \eta(b) \in u'$, što povlači $a \cdot b \in \eta_+(u')$.

(F3) Neka je $a \in \eta_+(u')$, i neka je $a \leq b$ (tj. $a \cdot b = a$). Tada imamo $\eta(a) \cdot \eta(b) = \eta(a \cdot b) = \eta(a)$, tj. $\eta(a) \leq \eta(b)$, pa je $\eta(b) \in u'$. Iz toga slijedi $b \in \eta_+(u')$.

(F4) Pretpostavimo $0 \in \eta_+(u')$. Tada $\eta(0) \in u'$. Budući je funkcija η Booleov homomorfizam, tada vrijedi $\eta(0) = 0'$. Time imamo $0' \in u'$, što je nemoguće jer je u' ultrafilter. Dakle, $0 \notin \eta_+(u')$.

(F5) Neka je $a \in A$ proizvoljan. Budući da je u' ultrafilter, tada je $\eta(a) \in u'$ ili $\eta(-a) = -\eta(a) \in u'$. To povlači $a \in \eta_+(u')$ ili $-a \in \eta_+(u')$.

(ii) Pretpostavimo da za sve $a_1, \ldots, a_n \in A$ vrijedi

$$f'(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)) \leq \eta(f(a_1, \ldots, a_n)),$$

te dokažimo da funkcija η_+ zadovoljava (forth) uvjet.

Neka su $u', u'_1, \ldots, u'_n$ ultrafiltri okvira $\mathcal{A}'_+$ za koje vrijedi $(u', u'_1, \ldots, u'_n,) \in Q_{f'}$. (Prisjetimo se definicije relacije $Q_{f'}$:

$$(u', u'_1, \quad \ldots, u'_n) \in Q_{f'} \text{ ako i samo ako}$$
$$\text{za sve } a_1 \in u'_1, \ldots, a_n \in u'_n \text{ vrijedi } f'(a_1, \ldots, a_n) \in u'. \text{)}$$

Trebamo dokazati da na okviru $\mathcal{A}_+$ vrijedi:

$$(\eta_+(u'), \eta_+(u'_1), \dots, \eta_+(u'_n)) \in Q_f$$

To je ekvivalentno sa činjenicom da za sve $a_1 \in \eta_+(u'_1), \dots, a_n \in \eta_+(u'_n)$ vrijedi $f(a_1, \dots, a_n) \in \eta_+(u')$. Neka su $a_1 \in \eta_+(u'_1), \dots, a_n \in \eta_+(u'_n)$ proizvoljni. Tada iz definicije funkcije η_+ slijedi $\eta(a_i) \in u'_i$, za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$. Sada ovo posljednje i pretpostavka $(u', u'_1, \dots, u'_n,) \in Q_{f'}$ povlače $f'(\eta(a_1), \dots, \eta(a_n)) \in u'$. Budući da je u' ultrafilter, tada iz pretpostavljene nejednakosti ove tvrdnje (iii), tj. iz $f'(\eta(a_1), \dots, \eta(a_n)) \leq \eta(f(a_1, \dots, a_n))$, slijedi $\eta(f(a_1, \dots, a_n)) \in u'$, a onda i $f(a_1, \dots, a_n) \in \eta_+(u')$.

(iv) Tvrdnja je direktna posljedica dokazanih tvrdnji (i), (ii) i (iii) ove propozicije. Raspisujemo detalje. Neka je $\eta : A \to A'$ neki BAO–homomorfizam. Posebno je funkcija η jedan Booleov homomorfizam. Iz dokazane tvrdnje (i) znamo da funkcija η_+ preslikava ultrafiltre u ultrafiltre, pa možemo pomatrati restrikciju funkcije η_+ sa $Uf\mathcal{A}'$ u $Uf\mathcal{A}$. Budući je funkcija η i modalni homomorfizam, tada za sve $a_1, \dots, a_n \in A$ vrijedi:

$$\eta(f(a_1, \dots, a_n)) = f'(\eta(a_1), \dots, \eta(a_n))$$

Iz dokaznih tvrdnji (ii) i (iii) slijedi da je η_+ ograničeni morfizam.

(v) Neka je funkcija η injekcija i Booleov homomorfizam. Tvrdimo da je funkcija η_+ surjekcija (točnije, tvrdimo da je restrikcija $\eta_+ : Uf\mathcal{A}' \to Uf\mathcal{A}$ surjekcija). Neka je u neki ultrafilter algebre $\mathcal{A}$. Trebamo dokazati da postoji ultrafilter u' tako da vrijedi $\eta_+(u') = u$. Neka je $\eta[u] := \{\eta(a) \mid a \in u\}$. Skup $\eta[u]$ općenito nije ultrafilter pa $\eta_+(\eta[u])$ neće uvijek biti definirano. Problem je u tome što skup $\eta[u]$ nije nužno zatvoren nagore, tj. ako $a \in u$ i $b \in A'$ takvi da $\eta(a) \leq b$ tada ne mora vrijediti $b \in \eta[u]$. Zato prvo definiramo skup $F' := \{a' :$ ako postoji $a \in u$ tako da vrijedi $\eta(a) \leq a'\}$. (Primijetimo da iz refleksivnosti relacije $\leq$ slijedi $\eta[u] \subseteq F'$.) Pokažimo da je F' pravi filter (tj. da zadovoljava uvjete (F1)–(F5) iz definicije ultrafiltra).

Budući je funkcija η Booleov homomorfizam, tada posebno vrijedi $\eta(1) = 1'$. Uvjeti (F1) je ispunjen jer imamo $1 \in u$, pa je $\eta(1) = 1' \in F'$.

Kako bi provjerili uvjet (F2) iz definicije ultrafiltra pretpostavimo da su $a', b' \in F'$. Tada postoje $a, b \in u$ takvi da $\eta(a) \leq a'$ i $\eta(b) \leq b'$. Iz toga imamo $\eta(a \cdot b) = \eta(a) \cdot \eta(b) \leq a' \cdot b'$, pa zbog $a \cdot b \in u$ vrijedi $a' \cdot b' \in F'$.

Uvjet (F3) očito vrijedi zbog definicije skupa F'.

Za uvjet (F4) dovoljno je dokazati da vrijedi $0' \notin F'$. Pretpostavimo suprotno, tj. $0' \in F'$. Tada postoji $a \in u$ takav da je $\eta(a) \leq 0'$, a budući je $0'$ najmanji element, imamo $\eta(a) = 0'$. Budući je $0' = \eta(0)$ i η je injekcija, imamo $a = 0$, pa je $0 \in u$. To je nemoguće jer je u ultrafilter.

Dokazali smo da je skup F' pravi filter, pa iz propozicije 3.11 slijedi da ga možemo proširiti do nekog ultrafiltra u'.

Tvrdimo da je $u = \eta_+(u')$. U tu svrhu dokazujemo obje inkluzije. Neka je $a \in u$ proizvoljan. Tada je $\eta(a) \in u'$ pa je $a \in \eta_+(u')$. Za obratnu inkluziju je dovoljno pokazati da iz $a \notin u$ slijedi $a \notin \eta_+(u')$. Neka je $a \in A$ proizvoljan element za kojeg vrijedi $a \notin u$. Tada je $-a \in u$, pa imamo $-\eta(a) = \eta(-a) \in \eta[u] \subseteq u'$. No, $-\eta(a) \in u'$ povlači $\eta(a) \notin u'$, a onda iz definicije duala η_+ imamo $a \notin \eta_+(u')$.

(vi) Neka je funkcija η Booleov homomorfizam i surjekcija. Želimo dokazati da je funkcija $\eta_+ : Uf\mathcal{A}' \to Uf\mathcal{A}$ injekcija. Neka su u' i v' različiti ultrafilteri algebre $\mathcal{A}'$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da postoji $a' \in A'$ takav da $a' \in u'$ i $a' \notin v'$. Budući da je funkcija η surjekcija, tada postoji $a \in A$ tako da vrijedi $\eta(a) = a'$. Iz definicije funkcije η_+ tada slijedi $a \in \eta_+(u')$ i $a \notin \eta_+(v')$. Time imamo $\eta_+(u') \neq \eta_+(v')$, pa je η_+ injekcija. Q.E.D.

Sada dajemo dokaz teorema 3.10. Ponovimo pretpostavke tog teorema: neka je τ modalni tip, $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ neki τ–okviri, te $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ Booleove algebre s τ–operatorima.

Teorem 3.10 ima 6 tvrdnji. Redom svaku tvrdnju iskazujemo, a onda dokazujemo.

(i) Tvrdnja: ako $\mathcal{F} \rightarrowtail \mathcal{G}$
(tj. okvir $\mathcal{F}$ je izomorfan nekom generiranom podokviru okvira $\mathcal{G}$)
tada $\mathcal{G}^+ \twoheadrightarrow \mathcal{F}^+$
(tj. algebra $\mathcal{F}^+$ je homomorfna slika algebre $\mathcal{G}^+$)

Dokaz tvrdnje (i). Neka je okvir $\mathcal{F}$ izomorfan generiranom podokviru $\mathcal{G}'$ okvira $\mathcal{G}$. Uvedimo prvo neke oznake:

$$\mathcal{F} = (W, R_{\mathcal{F}\triangle})_{\triangle\in\tau}, \quad \mathcal{G} = (V, R_{\mathcal{G}\triangle})_{\triangle\in\tau} \quad \text{i} \quad \mathcal{G}' = (V', R'_{\mathcal{G}'\triangle})_{\triangle\in\tau}$$

Kako je $\mathcal{G}'$ generirani podokvir od $\mathcal{G}$ tada za svaki $w \in V'$ i sve $v_1, \ldots, v_n \in V$ takve da je $(w, v_1, \ldots, v_n) \in R_{\mathcal{G}\triangle}$ vrijedi $v_1, \ldots, v_n \in V'$. Neka je $\theta \colon W \to V'$ neki izomorfizam okvira $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}'$. To znači da je funkcija θ bijekcija i da za sve $w_0, w_1, \ldots, w_n \in W$ vrijedi:

$$(w_0, w_1, \ldots, w_n) \in R_{\mathcal{F}\triangle} \quad \text{ako i samo ako} \quad (\theta(w_0), \theta(w_1), \ldots, \theta(w_n)) \in R_{\mathcal{G}'\triangle}$$

Za dokaz tvrdnje (i) dovoljno je dokazati da je funkcija $\theta \colon W \to V$ ograničeni morfizam jer tada iz tvrdnje (iv) propozicije 3.12 slijedi da je $\theta^+ \colon \mathcal{G}^+ \to \mathcal{F}^+$ jedan BAO–homomorfizam (iz tvrdnje (v) slijedi da je surjekcija).

Budući je funkcija θ izomorfizam, tada ta funkcija θ očito zadovoljava uvjet (forth). Provjerimo još da vrijedi (back) uvjet. Neka je $w \in W$, te $v_1', \ldots, v_n' \in V$ takvi da vrijedi $(\theta(w), v_1', \ldots, v_n') \in R_{\mathcal{G}\triangle}$. No, θ je izomorfizam s kodomenom V', pa je $\theta(w) \in V'$. Kako je $\mathcal{G}'$ generirani podokvir od $\mathcal{G}$, tada iz $\theta(w) \in$

V' i $(\theta(w), v_1', \ldots, v_n') \in R_{\mathcal{G}\triangle}$ slijedi $v_1', \ldots, v_n' \in V'$. Budući da je funkcija θ surjekcija tada postoje $w_1, \ldots, w_n \in W$ takvi da je $\theta(w_1) = v_1', \ldots, \theta(w_n) = v_n'$. Sada iz $(\theta(w), \theta(w_1), \ldots, \theta(w_n)) \in R_{\mathcal{G}\triangle}$, i činjenice da je funkcija θ izomorfizam okvira $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}'$, slijedi $(w, w_1, \ldots, w_n) \in R_{\mathcal{F}\triangle}$. Dakle, funkcija θ^+ je BAO–homomorfizam. Budući je po pretpostavci funkcija θ injekcija, tada iz tvrdnje (v) propozicije 3.12 slijedi da je funkcija θ^+ surjekcija.

(ii) Tvrdnja: ako $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{G}$
(tj. okvir $\mathcal{G}$ je slika okvira $\mathcal{F}$ za neki ograničeni morfizam)
tada $\mathcal{G}^+ \rightarrowtail \mathcal{F}^+$
(tj. algebra $\mathcal{G}^+$ je izomorfna nekoj podalgebri od $\mathcal{F}^+$)

Dokaz tvrdnje (ii). Neka je $\theta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ograničeni morfizam koji je surjekcija. Iz tvrdnje (iv) propozicije 3.12 slijedi da je funkcija $\theta^+ \colon \mathcal{G}^+ \to \mathcal{F}^+$ jedan BAO–homomorfizam. Budući da je funkcija θ surjekcija, tada iz tvrdnje (vi) propozicije 3.12 slijedi da je funkcija θ^+ injekcija. Lako je provjeriti da je $\theta^+[\mathcal{G}^+]$ podalgebra od $\mathcal{F}^+$. Time imamo da je algebra $\mathcal{G}^+$ izomorfna podalgebri $\theta^+[\mathcal{G}^+]$ algebre $\mathcal{F}^+$.

(iii) Tvrdnja: ako $\mathcal{A} \rightarrowtail \mathcal{B}$
(tj. algebra $\mathcal{A}$ je izomorfna nekoj podalgebri algebre $\mathcal{B}$)
tada $\mathcal{B}_+ \twoheadrightarrow \mathcal{A}_+$
(tj. okvir $\mathcal{A}_+$ je slika okvira $\mathcal{B}_+$ za neki ograničeni morfizam)

Dokaz tvrdnje (iii). Neka je $\mathcal{B}'$ podalgebra od $\mathcal{B}$ koja je izomorfna algebri $\mathcal{A}$. Neka je $\eta \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}'$ neki izomorfizam. To posebno znači da je funkcija $\eta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ jedan BAO–homomorfizam i injekcija. Iz tvrdnje (iv) propozicije 3.13 tada slijedi da je funkcija $\eta_+ \colon \mathcal{B}_+ \to \mathcal{A}_+$ ograničeni morfizam. Iz tvrdnje (v) propozicije 3.13 slijedi da je funkcija η^+ surjekcija. Dakle, okvir $\mathcal{A}_+$ je slika okvira $\mathcal{B}_+$ pri ograničenom morfizmu η^+.

(iv) Tvrdnja: ako $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$
(tj. algebra $\mathcal{B}$ je homomorfna slika algebre $\mathcal{A}$)
tada $\mathcal{B}_+ \rightarrowtail \mathcal{A}_+$
(tj. okvir $\mathcal{B}_+$ je izomorfan nekom generiranom podokviru od $\mathcal{A}_+$)

Dokaz tvrdnje (iv). Pretpostavimo da je algebra $\mathcal{B}$ homomorfna slika algebre $\mathcal{A}$. Tada postoji BAO–homomorfizam $\eta \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ koji je surjekcija. Iz tvrdnje (iv) propozicije 3.13 slijedi da je funkcija $\eta_+ \colon \mathcal{B}_+ \to \mathcal{A}_+$ ograničeni morfizam, a iz tvrdnje (vi) iste propozicije slijedi da je injekcija. Označimo sa $\mathcal{A}_+'$ podokvir od $\mathcal{A}_+$ koji je slika funkcije η_+.

Tvrdimo da je $\mathcal{A}_+'$ generirani podokvir od $\mathcal{A}_+$. Uvedimo prvo oznake:

$$\mathcal{A}_+ = (W, R_{\mathcal{A}\triangle})_{\triangle\in\tau}, \qquad \mathcal{A}_+' = (W', R_{\mathcal{A}'\triangle})_{\triangle\in\tau} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{B}_+ = (V, R_{\mathcal{B}\triangle})_{\triangle\in\tau}$$

Neka je $w \in W'$, te $w_1, \ldots, w_n \in w$ takvi da vrijedi $(w, w_1, \ldots, w_n) \in R_{\mathcal{A}\triangle}$. Kako je funkcija $\eta_+ : \mathcal{B}_+ \to \mathcal{A}'_+$ bijekcija, tada postoji $v \in W$ tako da $\eta_+(v) = w$. Budući je funkcija η_+ ograničeni morfizam, tada zbog (back) uvjeta slijedi da postoje $v_1, \ldots, v_n \in V$ tako da vrijedi

$$\eta_+(v_1) = w_1, \ldots, \eta_+(v_n) = w_n \text{ i } (v, v_1, \ldots, v_n) \in R_{\mathcal{B}\triangle}.$$

No, funkcija η_+ je izomorfizam, pa vrijedi:

$$\eta_+(v), \eta_+(v_1), \ldots, \eta_+(v_n) \in V \quad \text{i} \quad (\eta_+(v), \eta_+(v_1), \ldots, \eta_+(v_n)) \in R_{\mathcal{B}\triangle},$$

tj. $v, v_1, \ldots, v_n \in W'$ i $(v, v_1, \ldots, v_n) \in R_{\mathcal{A}'\triangle}$, što je i trebalo pokazati. Q.E.D.

Sada kad smo povezali osnovne konstrukcije okvira s algebrama, možemo to iskoristiti da dokažemo neke važne tvrdnje iz modalne logike. Prvo ćemo, koristeći činjenicu da je jednakosna valjanost očuvana na podalgebrama, homomorfnim slikama i produktima algebri, dokazati propoziciju o očuvanju modalne valjanosti. Želimo naglasiti da je već prije istaknuta očuvanost istinitosti na modelima (vidi propozicije 1.1, 1.2, 1.3 i 1.8 na stranama 11–18). Zatim, u propoziciji 1.11 na strani 20 je istaknuto da se čuva valjanost pri osnovnim konstrukcijama na okvirima.

Propozicija 3.14. Neka je τ modalni tip, φ neka τ–formula, te neka su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ neki τ–okviri. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

(i) Ako postoji ograničeni morfizam između okvira $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ tada iz $\mathcal{F} \Vdash \varphi$ slijedi $\mathcal{G} \Vdash \varphi$;

(ii) Ako je $\mathcal{G}$ generirani podokvir od $\mathcal{F}$ tada iz $\mathcal{F} \Vdash \varphi$ slijedi $\mathcal{G} \Vdash \varphi$;

(iii) Neka je familija okvira $\{\mathcal{F}_i \mid i \in I\}$. Ako za svaki $i \in I$ vrijedi $\mathcal{F}_i \Vdash \varphi$ tada $\biguplus_{i \in I} \mathcal{F}_i \Vdash \varphi$;

(iv) Ako $\mathfrak{ue}\mathcal{F} \Vdash \varphi$ tada $\mathcal{F} \Vdash \varphi$.

Dokaz.

(i) Pretpostavimo da postoji ograničeni morfizam između okvira $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$. Tada postoji podokvir $\mathcal{G}'$ od $\mathcal{G}$ tako da je $\mathcal{G}'$ slika okvira $\mathcal{F}$ pri ograničenom morfizmu. Neka je φ modalna formula za koju vrijedi $\mathcal{F} \Vdash \varphi$. Tada iz propozicije 3.10 slijedi $\mathcal{F}^+ \models \varphi \approx \top$. Iz tvrdnje (ii) teorema 3.10 slijedi da je algebra $\mathcal{G}^+$ izomorfna nekoj podalgebri od $\mathcal{F}^+$. No, tada vrijedi $\mathcal{G}^+ \models \varphi \approx \top$. Iz propozicije 3.10 slijedi $\mathcal{G} \Vdash \varphi$.

(ii) Neka je $\mathcal{G}$ generirani podokvir o $\mathcal{F}$. Tada posebno vrijedi $\mathcal{G} \rightarrowtail \mathcal{F}$ ("okvir $\mathcal{G}$ je izomorfan nekom generiranom podokviru od $\mathcal{F}$"). Neka je φ formula takva da vrijedi $\mathcal{F} \Vdash \varphi$. Tada iz propozicije 3.10 slijedi $\mathcal{F}^+ \models \varphi \approx \top$. Iz tvrdnje (i) teorema 3.10 slijedi $\mathcal{F}^+ \twoheadrightarrow \mathcal{G}^+$, tj. algebra $\mathcal{G}^+$ je homomorfna slika algebre $\mathcal{F}^+$. No, kako je valjanost očuvana na homomorfizme algebri, tada imamo $\mathcal{G}^+ \models \varphi \approx \top$. Iz propozicije 3.10 slijedi $\mathcal{G} \Vdash \varphi$.

(iii) Neka je $\mathcal{F} = \biguplus_{i\in I} \mathcal{F}_i$ i neka za svaki $i \in I$ vrijedi $\mathcal{F}_i \Vdash \varphi$. Iz propozicije 3.10 slijedi $\mathcal{F}_i^+ \models \varphi \approx \top$, za svaki $i \in I$. Valjanost je očuvana na produktu algebri, pa imamo $\prod_{i\in I} \mathcal{F}_i^+ \models \varphi \approx \top$. Iz teorema 3.11 slijedi $\left(\biguplus_{i\in I} \mathcal{F}_i\right)^+ \models \varphi \approx \top$, a onda iz propozicije 3.10 slijedi $\mathcal{F} \Vdash \varphi$.

(iv) Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{ue}\mathcal{F} \Vdash \varphi$. Iz $\mathfrak{ue}\,\mathcal{F} = (\mathcal{F}^+)_+$ slijedi

$$(\mathfrak{ue}\,\mathcal{F})^+ = ((\mathcal{F}^+)_+)^+ = Em\mathcal{F}^+$$

(Prije smo bili uveli oznaku $Em\mathcal{A}$ za $(\mathcal{A}_+)^+$, gdje je $\mathcal{A}$ proizvoljna BAO.) Iz propozicije 3.10 slijedi $(\mathfrak{ue}\,\mathcal{F})^+ \models \varphi \approx \top$, tj. $Em\mathcal{F}^+ \models \varphi \approx \top$.

Iz teorema 3.9 slijedi da postoji homomorfizam između BAO $\mathcal{F}^+$ i kompleksne algebre $Em\mathcal{F}^+$ (to zapravo slijedi iz dokaza Jónsson–Tarskijevog teorema). Tada vrijedi $\mathcal{F}^+ \models \varphi \approx \top$. Iz propozicije 3.10 tada slijedi $\mathcal{F} \Vdash \varphi$. Q.E.D.

Prije Goldblatt–Thomasonovog teorema dokazujemo još jedan teorem koji nam je potreban.

Teorem 3.12. Neka je τ modalni tip i $\mathcal{F}$ neki τ–okvir. Tada postoji ultrafilter U tako da vrijedi $\prod_U \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathfrak{ue}\,\mathcal{F}$, tj. postoji ograničeni morfizam $f : \prod_U \mathcal{F} \to \mathfrak{ue}\,\mathcal{F}$ koji je surjekcija.

Skica dokaza. Radi jednostavnosti zapisa razmatramo samo osnovni modalni tip τ_0. Neka je $\mathcal{F} = (W, R)$ proizvoljan Kripkeov okvir. Neka modalni jezik za svaki podskup A od W sadrži propozicionalnu varijablu p_A. Štoviše, neka jezik ne sadrži druge propozicionalne varijable. Na okviru $\mathcal{F}$ definiramo valuaciju V sa: $V(p_A) = A$, za svaki $A \subseteq W$. Dobiveni model $(\mathcal{F}, V)$ označimo sa $\mathfrak{M}$. Neka je U neki prebrojivo nepotpun ultrafilter nas skupom $\mathbb{N}$ (vidi definiciju 1.21 na strani 17; takav ultrafilter postoji; to je bilo koji ultrafilter koji sadrži Fréchetov filter). Tada je ultrapotencija $\prod_U \mathfrak{M}$ jedan ω–saturirani model.[3] Svaki ω–saturirani model je m–saturirani (pojam m–saturiranog modela je dan u definiciji 1.22 na strani 17). Definiramo preslikavanje $f : \prod_U \mathfrak{M} \to \mathfrak{ue}\,\mathfrak{M}$ sa:

$$f(s) = \{A : A \subseteq W \text{ i } \prod_U \mathfrak{M}, s \Vdash p_A\}$$

Dokažimo da je funkcija f dobro definirana, tj. da je za svaki $s \in \prod_U \mathfrak{M}$ skup $f(s)$ ultrafilter. Neka je $s \in \prod_U \mathfrak{M}$ proizvoljan.

Dokažimo prvo da je skup $f(s)$ zatvoren na konačne presjeke. Neka su $A, B \in f(s)$ proizvoljni. Tada vrijedi $\prod_U \mathfrak{M}, s \Vdash p_A$ i $\prod_U \mathfrak{M}, s \Vdash p_B$, a onda imamo i $\prod_U \mathfrak{M}, s \Vdash$

[3]Definiciju ω–saturiranog modela, te dokaz navedene tvrdnje možete pogledati u nastavnom materijalu *M. Vuković, Primijenjena logika*, na web–adresi https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/applog-skripta-2011_0.pdf .

$p_A \wedge p_B$. Iz definicije valuacije V lako slijedi da vrijedi $\mathfrak{M} \Vdash p_A \wedge p_B \leftrightarrow p_{A\cap B}$. Lako je vidjeti da za svaku modalnu formulu φ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M} \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \prod_U \mathfrak{M} \Vdash \varphi \tag{3.2}$$

Iz svega toga slijedi $\prod_U \mathfrak{M} \Vdash p_A \wedge p_B \leftrightarrow p_{A\cap B}$. Ovo posljednje i $\prod_U \mathfrak{M}, s \Vdash p_A \wedge p_B$ povlače $\prod_U \mathfrak{M}, s \Vdash p_{A\cap B}$. Iz definicije funkcije f tada slijedi $A \cap B \in f(s)$.

Dokažimo da je za svaki $s \in \prod_U \mathfrak{M}$ skup $f(s)$ zatvoren za nadskupove. Neka $A \in f(s)$ i $B \subseteq W$ takav da vrijedi $A \subseteq B$. Lako je provjeriti da vrijedi $\mathfrak{M} \Vdash p_A \to p_B$. Iz (3.2) tada slijedi $\prod_U \mathfrak{M} \Vdash p_A \to p_B$. No, iz pretpostavke $A \in f(s)$ slijedi $\prod_U \mathfrak{M}, s \Vdash p_A$. Time smo dobili $\prod_U \mathfrak{M}, s \Vdash p_B$, a onda i $B \in f(S)$.

Očito za svaki $s \in \prod_U \mathfrak{M}$ vrijedi $W \in f(s)$ i $\emptyset \notin f(s)$.

Neka je $A \subseteq W$ i $s \in \prod_U \mathfrak{M}$ takvi da $A \in f(s)$. Lako je vidjeti da vrijedi $\mathfrak{M} \Vdash \neg p_A \leftrightarrow p_{W\setminus A}$. Tada imamo posebno $\prod_U \mathfrak{M}, s \Vdash \neg p_{W\setminus A}$, a onda i $W \setminus A \notin f(s)$. Sasvim analogno bi dokazali i obrat, tj. da pretpostavka $A \notin f(s)$ povlači $W \setminus A \in f(s)$.

Time smo dokazali da je skup $f(s)$ ultrafilter, za svaki $s \in \prod_U \mathfrak{M}$.

Preostalo je dokazati da je funkcija f ograničeni morfizam i surjekcija. Kako bi dokazali da je funkcija f ograničeni morfizam prvo dokazujemo da za svaki ultrafilter u nad skupom W i svaki $s \in \prod_U \mathfrak{M}$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$u = f(s) \text{ ako i samo ako } \mathfrak{ue}\,\mathcal{M}, u \equiv \prod_U \mathfrak{M}, s \tag{3.3}$$

Pretpostavimo prvo da vrijedi $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{M}, u \equiv \prod_U \mathfrak{M}, s$. Tada posebno za svaki $A \subseteq W$ vrijedi:

$$A = V(p_A) \in u \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{ue}\,\mathfrak{M}, u \Vdash p_A \;\Leftrightarrow\; \prod_U \mathfrak{M}, s \Vdash p_A \;\Leftrightarrow\; A \in f(s)$$

To znači da vrijedi $f(s) = u$. Pretpostavimo sada da vrijedi $u = f(s)$, te dokažimo da vrijedi $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{M}, u \equiv \prod_U \mathfrak{M}, s$. Neka je φ proizvoljna modalna formula za koju vrijedi $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$. Tada vrijedi $V(\varphi) \in u$, a onda iz $u = f(s)$ slijedi $V(\varphi) \in f(s)$. Iz definicije funkcije f tada slijedi $\prod_U \mathfrak{M}, s \Vdash p_{V(\varphi)}$. Očito vrijedi $\mathfrak{M} \Vdash \varphi \leftrightarrow p_{V(\varphi)}$. Iz (3.2) tada slijedi $\prod_U \mathfrak{M} \Vdash \varphi \leftrightarrow p_{V(\varphi)}$. Sada to, te $\prod_U \mathfrak{M}, s \Vdash p_{V(\varphi)}$, povlači $\prod_U \mathfrak{M}, s \Vdash \varphi$. Sasvim analogno se može dokazati obrat, tj. da $\prod_U \mathfrak{M}, s \Vdash \varphi$ povlači $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$.

Već smo bili istaknuli da je model $\prod_U \mathfrak{M}$ m–saturiran. Iz propozicije 1.9 na strani 19 znamo da je model $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{M}$ također m–saturiran. Iz propozicije 1.7 na strani 17 slijedi da je $\{\prod_U \mathfrak{M}, \mathfrak{ue}\,\mathfrak{M}\}$ Hennessy–Milnerova klasa modela. Iz dokazane pomoćne tvrdnje

(3.3) slijedi da $u = f(s)$ povlači $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{M}, u \equiv \prod_U \mathfrak{M}, s$. Tada vrijedi $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{M}, u \underline{\leftrightarrow} \prod_U \mathfrak{M}, s$. Bisimuliranost povlači da je funkcija f ograničeni morfizam.

Dokažimo još da je funkcija f surjekcija. Neka je u proizvoljan ultrafilter nad skupom W. Tada je skup formula $\Sigma = \{p_A : A \in u\}$ konačno ispunjiv na modelu $\mathfrak{M}$, a onda iz (3.2) slijedi da je konačno ispunjiv na ultrapotenciji $\prod_U \mathfrak{M}$. Budući je model $\prod_U \mathfrak{M}$ m–saturiran, tada je skup Σ ispunjiv na tom modelu. To znači da postoji $s \in \prod_U \mathfrak{M}$ tako da vrijedi $\prod_U \mathfrak{M}, s \Vdash \Sigma$. Dokažimo da vrijedi $f(s) = u$. U tu svrhu dokažimo obje inkluzije. Neka je $A \in u$ proizvoljan. Tada je $p_A \in \Sigma$, a onda vrijedi $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{M} u \Vdash p_A$. Iz definicije funkcije f tada slijedi $A \in f(s)$. Dokažimo obratnu inkluziju. Neka je $A \in f(s)$. Ako $A \notin u$ tada je $W \setminus A \in u$ pošto je u ultrafiltar. Iz prethodno dokazane inkluzije $u \subseteq f(s)$ tada slijedi $W \setminus A \in f(s)$. No, $A \in f(s)$ i $W \setminus A \in f(s)$ povlači $A \cap (W \setminus A) \in f(s)$, budući je $f(s)$ ultrafiltar. No, time smo dobili $\emptyset \in f(s)$ što je nemoguće jer je $f(s)$ ultrafiltar. Dakle, mora vrijediti $A \in u$. Q.E.D.

Goldblatt–Thomasonov teorem govori o modalnoj definabilnosti klasa Kripkeovih okvira. Pojam modalne definabilnosti klase okvira dan je u definiciji 1.24 na strani 20.

Prije samog teorema, još malo terminologije: kažemo da klasa okvira K *reflektira ultrafilter proširenja* ako $\mathfrak{ue}\mathcal{F} \in \mathsf{K}$ povlači $\mathcal{F} \in \mathsf{K}$.

Teorem 3.13 (Goldblatt–Thomason)**.** Neka je τ modalni tip, i K klasa τ–okvira koja je zatvorena na ultrapotencije. Klasa K je modalno definabilna ako i samo ako je zatvorena na ograničene morfizme, generirane podokvire i disjunktne unije, te reflektira ultrafilter proširenja.

Dokaz. Ako je klasa okvira K modalno definabilna tada je lako provjeriti da je tada klasa K zatvorena na ograničene morfizme, generirane podokvire i disjunktne unije, i da reflektira ultrafilter proširenja (u dokazu se može iskoristiti prethodna propozicija 3.14).

Dokažimo obrat. Neka je klasa K zatvorena na ultrapotencije, ograničene morfizme, generirane podokvire i disjunktne unije, i reflektira ultrafilter proširenja. Neka $\Sigma = \{\varphi : \mathsf{K} \Vdash \varphi\}$. Tvrdimo da skup formula Σ definira klasu K. Trebamo pokazati da se svaki okvir, na kojem je svaka formula iz Σ valjana, nalazi u K. Neka je $\mathcal{F}$ neki τ–okvir za kojeg vrijedi $\mathcal{F} \Vdash \Sigma$. Želimo dokazati da vrijedi $\mathcal{F} \in \mathsf{K}$.

Bili smo već uveli oznaku $\mathbf{Cm}\,\mathsf{K}$, ali ćemo ipak ovdje ponoviti: $\mathbf{Cm}\,\mathsf{K} = \{\mathcal{G}^+ : \mathcal{G} \in \mathsf{K}\}$ (to je skup svih potpunih kompleksnih algebri koje su pridružene okvirima iz klase K).

Iz propozicije 3.10 slijedi $Equ(\mathbf{Cm}\,\mathsf{K}) = \{\varphi \approx \top : \varphi \in \Sigma\}$ ($Equ(\mathbf{Cm}\,\mathsf{K})$ je skup svih jednakosti koje su istinite na svakoj algebri iz klase $\mathbf{Cm}\,\mathsf{K}$). Označimo sa V klasu svih algebri koje definira skup jednakosti $Equ(\mathbf{Cm}\,\mathsf{K})$. Iz pretpostavke $\mathcal{F} \Vdash \Sigma$ i propozicije 3.10 slijedi $\mathcal{F}^+ \models Equ(\mathbf{Cm}\,\mathsf{K})$, tj. $\mathcal{F}^+ \in \mathsf{V}$. Iz Birkhoffovog teorema slijedi da je jednakosno definabilna klasa algebri V mnogostrukost. Iz teorema Tarskog 3.6 slijedi

$\mathsf{V} = \mathbf{HSP}(\mathbf{Cm}\,\mathsf{K})$, a onda iz toga $\mathcal{F}^+ \in \mathbf{HSP}(\mathbf{Cm}\,\mathsf{K})$. Činjenica $\mathcal{F}^+ \in \mathbf{HSP}(\mathbf{Cm}\,\mathsf{K})$ povlači da postoji algebra $\mathcal{A} \in \mathbf{SP}(\mathbf{Cm}\,\mathsf{K})$ tako da je $\mathcal{F}^+$ homomorfna slika algebre $\mathcal{A}$, tj. vrijedi $\mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{F}^+$. Sada iz $\mathcal{A} \in \mathbf{SP}(\mathbf{Cm}\,\mathsf{K})$ slijedi da postoji algebra $\mathcal{B} \in \mathbf{P}(\mathbf{Cm}\,\mathsf{K})$ tako da je algebra $\mathcal{A}$ izomorfna nekoj podalgebri od $\mathcal{B}$. To znači da vrijedi sljedeće:

$$\mathcal{B} \hookleftarrow \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{F}^+$$

Iz $\mathcal{B} \in \mathbf{P}(\mathbf{Cm}\,\mathsf{K})$ slijedi da postoji familija okvira $(\mathcal{G}_i : i \in I)$ iz klase K tako da vrijedi $\mathcal{B} = \prod_{i\in I} \mathcal{G}_i^+$, pa imamo:

$$\prod_{i\in I} \mathcal{G}_i^+ \hookleftarrow \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{F}^+$$

Iz teorema 3.11 znamo da vrijedi $\prod_{i\in I} \mathcal{G}_i^+ \cong \left(\biguplus_{i\in I} \mathcal{G}_i\right)^+$. Time dobivamo da vrijedi sljedeće:

$$\left(\biguplus_{i\in I} \mathcal{G}_i\right)^+ \hookleftarrow \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{F}^+$$

Iz ovog posljednjeg i teorema 3.10 slijedi

$$\left(\left(\biguplus_{i\in I} \mathcal{G}_i\right)^+\right)_+ \twoheadrightarrow \mathcal{A}_+ \hookleftarrow (\mathcal{F}^+)_+$$

Označimo $\mathcal{G} = \biguplus_{i\in I} \mathcal{G}_i$. Tada imamo:

$$(\mathcal{G}^+)_+ \twoheadrightarrow \mathcal{A}_+ \hookleftarrow (\mathcal{F}^+)_+$$

Budući da je po pretpostavci klasa K zatvorena na disjunktne unije tada imamo $\mathcal{G} \in \mathsf{K}$. Iz teorema 3.12 slijedi da postoji ultrafilter U tako da vrijedi $\prod_U \mathcal{G} \twoheadrightarrow \mathfrak{ue}\,\mathcal{G}$. Iz $\mathcal{G} \in \mathsf{K}$, i zatvorenosti klase K na ultrapotencije, slijedi $\prod_U \mathcal{G} \in \mathsf{K}$. Sada iz $\prod_U \mathcal{G} \in \mathsf{K}$, $\prod_U \mathcal{G} \twoheadrightarrow \mathfrak{ue}\,\mathcal{G}$ i pretpostavke o zatvorenosti klase K na ograničene morfizme, slijedi $\mathfrak{ue}\,\mathcal{G} \in \mathsf{K}$. Budući da vrijedi $\mathfrak{ue}\,\mathcal{G} = (\mathcal{G}^+)_+$ tada imamo $(\mathcal{G}^+)_+ \in \mathsf{K}$. Iz $(\mathcal{F}^+)_+ \rightarrowtail \mathcal{A}_+ \twoheadleftarrow (\mathcal{G}^+)_+$ posebno slijedi $\mathcal{A}_+ \twoheadleftarrow (\mathcal{G}^+)_+$. Iz ovog posljednjeg i činjenice $(\mathcal{G}^+)_+ \in \mathsf{K}$, te pretpostavke o zatvorenosti klase K na ogranične morfizme, slijedi $\mathcal{A}_+ \in \mathsf{K}$. Činjenice $(\mathcal{F}^+)_+ \rightarrowtail \mathcal{A}_+$ i $\mathcal{A}_+ \in \mathsf{K}$, te pretpostavka o zatvorenosti klase K na generirane podokvire, povlače $(\mathcal{F}^+)_+ \in \mathsf{K}$. Sada iz $(\mathcal{F}^+)_+ = \mathfrak{ue}\,\mathcal{F}$ i pretpostavke da klasa K reflektira ultrafilter proširenja, konačno dobivamo i $\mathcal{F} \in \mathsf{K}$. Q.E.D.

Napomena 3.1. Na strani 21 je iskazana verzija Goldblatt–Thomasonovog teorema u kojoj se umjesto pretpostavke da je klasa okvira zatvorena na ultrapotencije zahtijeva da je K elementarna klasa. Lako je vidjeti da je svaka elementarna klasa okvira zatvorena na ultrapotencije. Dakle, verzija teorema koju smo upravo dokazali je općenitija od one koje je prije iskazana.

Primjerice, klasa okvira definirana McKinseyovom formulom $\Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$ nije elementarna ali je modalno definabilna, pa je onda i zatvorena na ultrapotencije. Isto je i s klasom okvira definiranih Löbovom formulom $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Dakle, dokazani teorem zaista donosi nešto novo u odnosu na onaj iskazan prije.

Postoje i nealgebarski dokazi Goldblatt–Thomasonovog teorema. Jedan takav dokaz možete vidjeti u diplomskom radu Marka Horvata koji se nalazi na sljedećoj web–adresi: https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/horvat-goldblatt-thomasonov_teorem.pdf

Poglavlje 4

Opći okviri

Pojam općeg okvira je definiran već prije (vidi definiciju 1.8). Prije navedene definicije je dana i motivacija zašto se razmatraju opći okviri, pa to nećemo ovdje ponavljati. Prvo ćemo istaknuti neka osnovna svojstva općih okvira, a onda ćemo dokazati potpunost svake normalne modalne logike u odnosu na odgovarajuću klasu općih okvira. Ovdje je osnovni cilj dokazati sljedeća dva rezultata u vezi općih okvira:

a) Booleove algebre i deskriptivni opći okviri su isti objekti;

b) Sahlqvistov teorem potpunosti: *Svaka Sahlqvisotva formula je d–perzistentna, a onda i kanonska.*

U ovom poglavlju promatramo samo osnovni modalni tip τ_0.

4.1 Osnovna svojstva općih okvira

Ponovimo definiciju operacije $m_\diamond$. Neka je (W, R) Kripkeov okvir. Tada je $m_\diamond : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W)$ funkcija koja je definirana ovako:

$$m_\diamond(X) = \{w \in W \ : \ \exists x \in X \ \text{ takav da } \ wRx\}.$$

Ponavljamo i definiciju općeg okvira.

Definicija 4.1. *Opći okvir* je uređeni par $(\mathcal{F}, A)$, gdje je $\mathcal{F}$ Kripkeov okvir, a A je neprazan skup podskupova od W koji je zatvoren za sljedeće operacije:

a) uniju: ako su $X, Y \in A$ tada je i $X \cup Y \in A$

b) komplement: ako je $X \in A$ tada je $W \setminus X \in A$

c) operaciju $m_\diamond$: ako je $X \in A$ tada $m_\diamond(X) \in A$

Primjer 4.1. Sada navodimo neke primjere općih okvira.

a) Ako je $\mathcal{F} = (W, R)$ Kripkeov okvir tada je lako provjeriti da su $(\mathcal{F}, \emptyset)$ i $(\mathcal{F}, \mathcal{P}(W))$ opći okviri.

b) Neka je $\mathcal{F} = (\mathbb{N}, <)$ Kripkeov okvir. Neka je zatim, A skup svih konačnih i kofinitnih podskupova od $\mathbb{N}$. Tada je $(\mathcal{F}, A)$ opći okvir.

c) Neka je A skup svih konačnih i kofinitnih podskupova skupa $\mathbb{N}$. Definiramo tromjesnu relaciju C ovako:

$$(x, y, z) \in C \text{ ako i samo ako } x \leq y \text{ i } y \leq z \text{ i } z \leq x + y$$

Ako je C relacija dostiživosti za neki dvomjesni modalni operator, tada je $(\mathbb{N}, C, A)$ opći okvir.

Propozicija 4.1. Neka je $\mathcal{F} = (W, R)$ proizvoljan Kripkeov okvir, te B proizvoljni skup valuacija na W. Tada postoji opći okvir $(\mathcal{F}, A)$ takav da za sve opće okvire $(\mathcal{F}', A')$ koji imaju svojstvo $B \subseteq A'$ vrijedi $A \subseteq A'$.

Dokaz. Označimo sa $\mathcal{B}$ skup svih općih okvira $(\mathcal{F}, A')$ za koje vrijedi $B \subseteq A'$. Tada je $\mathcal{B} \neq \emptyset$, jer $(\mathcal{F}, \mathcal{P}(W)) \in \mathcal{B}$. Označimo $A = \bigcap_{(\mathcal{F}, A') \in \mathcal{B}} A'$. Lako je provjeriti da je $(\mathcal{F}, A)$ opći okvir. Q.E.D.

Definicija 4.2. *Model baziran na općem okviru* $(\mathcal{F}, A)$ je uređena trojka $(\mathcal{F}, A, V)$, gdje je V valuacija takva da za svaku propozicionalnu varijablu p vrijedi $V(p) \in A$. Valuacije s navedenim svojstvom nazivamo *dopustive valuacije* za dani opći okvir.

Sljedeću propoziciju je lako dokazati indukcijom po složenosti formule.

Propozicija 4.2. Neka je (W, R, A, V) model definiran na općem okviru. Tada za sve formule φ vrijedi $V(\varphi) \in A$.

Propozicija 4.3. Neka je $(\mathcal{F}, V)$ neki Kripkeov model. Definiramo $A = \{V(\varphi) : \varphi \text{ je formula}\}$. Tada je $(\mathcal{F}, A)$ opći okvir.

Napomena 4.1. Ako je $(\mathcal{F}, A)$ opći okvir tada općenito ne mora postojati valuacija V tako da vrijedi $A = \{V(\varphi) : \varphi \text{ je formula}\}$. U tu svrhu promotrimo sljedeći primjer. Neka je dan opći okvir $(\mathbb{N}, <, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Budući je skup $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ neprebrojiv, a skup svih modalnih formula prebrojiv (bili smo pretpostavili da je skup propozicionalnih varijabli prebrojiv), tada niti za jednu valuaciju V ne može vrijediti $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{V(\varphi) : \varphi \text{ je formula}\}$.

Definicija 4.3. Kažemo da je formula φ *valjana na svijetu* w općeg okvira $(\mathcal{F}, A)$ ako je φ istinita na w za svaku dopustivu valuaciju V. Oznaka: $(\mathcal{F}, A), w \Vdash \varphi$.

Kažemo da je formula φ *valjana na općem okviru* $(\mathcal{F}, A)$ ako je φ valjana na svakom svijetu $w \in W$. Oznaka: $(\mathcal{F}, A) \Vdash \varphi$.

Kažemo da je formula φ *g–valjana* ako je φ valjana na svakom općem okviru $(\mathcal{F}, A)$. Oznaka: $\Vdash_g \varphi$.

Propozicija 4.4. Neka je $\mathcal{F}$ Kripkeov okvir, te φ neka formula za koju vrijedi $\mathcal{F} \Vdash \varphi$. Tada za svaki opći okvir $(\mathcal{F}, A)$ vrijedi $(\mathcal{F}, A) \Vdash \varphi$.

Korolar 4.1. Ako je φ valjana formula tada je φ također i g–valjana formula.

Napomena 4.2. Obrat prethodne propozicije ne vrijedi, tj. valjanost formule na nekom općem okviru ne povlači valjanost na pripadnom Kripkeovom okviru. Jedan protuprimjer je McKinseyeva formula $\varphi \equiv \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p$. Neka je $\mathcal{F} = (\mathbb{N}, <)$, te neka je A skup svih konačnih i kofinitnih podskupova od $\mathbb{N}$. Bili smo već istaknuli da je tada $(\mathcal{F}, A)$ opći okvir. Lako je provjeriti da vrijedi $(\mathcal{F}, A) \Vdash \varphi$. Dokažimo sada da ne vrijedi $\mathcal{F} \Vdash \varphi$. U tu svrhu definiramo $V(p) = \{0, 2, 4, \ldots\}$. Tada očito za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \Vdash \Diamond p$, a onda i $n \Vdash \Box\Diamond p$. No, očito i $0 \nVdash \Diamond\Box p$. To znači $0 \nVdash \varphi$.

Teorem 4.1. Ako je formula je g–valjana tada je i valjana.

4.2 Potpunost u odnosu na opće okvire

U definiciji 2.4 definirali smo pojam kanonskog modela za danu normalnu modalnu logiku. Kako bismo mogli definirati pojam kanonskog općeg okvira za danu normalnu modalnu logiku Λ ovdje ćemo ponoviti tu defiiniciju. Neka je W^Λ skup svih maksimalno Λ–konzistentnih skupova formula. Zatim, neka je $R^\Lambda \subseteq W^\Lambda \times W^\Lambda$ binarna relacija definirana ovako:

$$\begin{array}{ll} wR^\Lambda u & \text{ako i samo ako} \\ & \text{za svaku formulu } \varphi \text{ vrijedi da } \Box\varphi \in w \text{ povlači } \varphi \in u \end{array}$$

Okvir (W^Λ, R^Λ) nazivamo *kanonski Kripkeov okvir* za logiku Λ, te ga označavamo s $\mathcal{F}_\Lambda$.

Prisjetimo se da postoje normalne modalne logike koje nisu potpune u odnosu na svoj kanonski okvir (takve su, primjerice, logika dokazivosti **GL**, te logika **K**+McKinseyev aksiom). Ta činjenica je bitna razlika Kripkeovih okvira i općih okvira.

Ovdje navodimo i definiciju kanonskog Kripkeovog modela za proizvoljnu normalnu logiku Λ. U tu svrhu na kanonskom Kripkeovom okviru $\mathcal{F}_\Lambda$ definiramo valuaciju $V^\Lambda : \{p_0, p_1, \ldots\} \to \mathcal{P}(W)$ sa $V^\Lambda(p) = \{w \in W^\Lambda : p \in w\}$ (obično se V^Λ naziva *kanonska valuacija*). Tada se uređena trojka $\mathfrak{M}^c_\Lambda = (W^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$ naziva *kanonski Kripkeov model* za normalnu modalnu logiku Λ.

Sada dajemo definiciju kanonskog općeg okvira za proizvoljnu normalnu modalnu logiku. Za svaku formulu φ označimo $\hat{\varphi} = \{w \in W^\Lambda : \varphi \in w\}$. Zatim neka je $A^\Lambda = \{\hat{\varphi} : \varphi \text{ je formula}\}$.

Lema 4.1. Za svaku normalnu modalnu logiku Λ je $f^c_\Lambda = (W^\Lambda, R^\Lambda, A^\Lambda)$ opći okvir. Nazivamo ga *kanonski opći okvir* za Λ.

Lema 4.2. Za svaku normalnu modalnu logiku Λ vrijedi $f^c_\Lambda \Vdash \Lambda$.

Dokaz. Neka je $\varphi \in \Lambda$ proizvoljna formula. Želimo dokazati da vrijedi $f^c_\Lambda \Vdash \varphi$. U tu svrhu uzmimo proizvoljnu dopustivu valuaciju V na okviru f^c_Λ. Neka su $p_1, \ldots, p_n$ sve propozicionalne varijable koje se pojavljuju u formuli φ. Budući da za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi $V(p_i) \in A^\Lambda$, tada iz definicije skupa A^Λ slijedi da postoje formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tako da vrijedi $V(p_i) = \hat{\varphi}_i$. Neka je $\varphi' := \varphi(\varphi_1/p_1, \ldots, \varphi_n/p_n)$.

Pomoćna tvrdnja: $V(\varphi) = V^\Lambda(\varphi')$.

Dokaz pomoćne tvrdnje provodimo indukcijom po složenosti formule φ. Promotrimo prvo slučaj kada je $\varphi = p$, tj. φ je neka propozicionalna varijabla. Tada postoji formula φ_0 takva da je $V(p) = \hat{\varphi}_0$. Iz $\varphi = p$ očito slijedi $\varphi' = \varphi(\varphi_0/p) = \varphi_0$. Tada imamo: $V(\varphi) = V(p) = \hat{\varphi}_0 = \{w \in W^\Lambda : \varphi_0 \in w\} = V^\Lambda(\varphi_0) = V^\Lambda(\varphi')$. Pretpostavimo sada da za neki $n \in \mathbb{N}$ i svaku formulu ψ čija je složenost strogo manja od n vrijedi $V(\psi) = V^\Lambda(\psi')$. Neka je φ proizvoljna formula čija je složenost jednaka n. Promatramo slučajeve obzirom na oblik formule φ.

a) $\varphi = \neg\psi$.
Tada je očito $\varphi' = \neg\psi'$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= V(\neg\psi) = W^\Lambda \setminus V(\psi) = \quad \text{(pret. indukcije)} \\ &= W^\Lambda \setminus V^\Lambda(\psi') = V^\Lambda(\neg\psi') = V^\Lambda(\varphi') \end{aligned}$$

b) $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$.
Tada je očito $\varphi' = \psi_1' \vee \psi_2'$, te je po pretpostavci indukcije

$$V(\psi_1) = V^\Lambda(\psi_1') \ \text{ i } V(\psi_2) = V^\Lambda(\psi_2')$$

Tada imamo:

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= V(\psi_1 \vee \psi_2) = V(\psi_1) \cup V(\psi_2) = V^\Lambda(\psi_1') \cup V^\Lambda(\psi_2') \\ &= V^\Lambda(\psi_1' \vee \psi_2') = V^\Lambda(\varphi') \end{aligned}$$

c) $\varphi = \Diamond\psi$.
Tada je očito $\varphi' = \Diamond\psi'$. Redom vrijede sljedeće ekvivalencije

$$\begin{aligned} w \in V(\varphi) &\Leftrightarrow w \in V(\Diamond\psi) \Leftrightarrow \exists v(wR^\Lambda v \ \& \ v \in V(\psi)) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{(pret. indukcije)} \ \exists v(wR^\Lambda v \ \& \ v \in V^\Lambda(\psi')) \\ &\Leftrightarrow w \in V^\Lambda(\Diamond\psi') \Leftrightarrow w \in V^\Lambda(\varphi') \end{aligned}$$

Time smo dokazali da vrijedi $V(\Diamond\psi) = V^\Lambda(\Diamond\psi')$.

Iz upravo dokazane pomoćne tvrdnje $V(\varphi) = V^\Lambda(\varphi')$ odmah slijedi sljedeća ekvivalencija:

$$f^c_\Lambda, V \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } f^c_\Lambda, V^\Lambda \Vdash \varphi' \tag{4.1}$$

Budući je Λ normalna modalna logika, tada je zatvorena za uniformnu supstituciju. To znači da iz $\varphi \in \Lambda$ slijedi $\varphi' \in \Lambda$. Znamo da za svaki maksimalno Λ–konzistentan skup formula w vrijedi $\Lambda \subseteq w$. Time imamo da za svaki $w \in W^\Lambda$ vrijedi $\varphi' \in w$, tj. $V^\Lambda(\varphi') = W^\Lambda$. Sada iz definicije relacije forsiranja slijedi da za svaki $w \in W^\Lambda$ vrijedi $(f^c_\Lambda, V^\Lambda), w \Vdash \varphi'$, a onda i $(f^c_\Lambda, V^\Lambda) \Vdash \varphi'$. Iz (4.1) slijedi da je ovo posljednje ekvivalentno sa $f^c_\Lambda, V \Vdash \varphi$. Q.E.D.

Koristeći prethodne dvije leme lako je indukcijom po složenosti formule dokazati sljedeću lemu.

Lema 4.3 (Lema o istinitosti u odnosu na kanonski opći okvir)**.**
Neka je Λ normalna modalna logika, te $w \in W^\Lambda$ i φ neka formula. Tada vrijedi:

$$f^c_\Lambda, w \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \varphi \in w$$

Teorem 4.2. Svaka normalna modalna logika je adekvatna i jako potpuna u odnosu na svoj kanonski opći okvir.

Skica dokaza. Adekvatnost slijedi iz leme 4.2.

Dokažimo jaku potpunost. Neka je Σ skup formula i φ neka formula tako da vrijedi $\Sigma \nvdash_\Lambda \varphi$. Tada je skup formula $\Sigma \cup \{\varphi\}$ Λ–konzistentan. Iz Lindenbaumove leme slijedi da postoji maksimalno Λ–konzistentan skup w koji je nadskup od $\Sigma \cup \{\varphi\}$. Iz prethodne leme 4.3 slijedi $f^c_\Lambda, w \Vdash \Sigma \cup \{\varphi\}$. Time imamo $\Sigma \nVdash \varphi$. Q.E.D.

Teorem 4.3. Svaka normalna modalna logika Λ je adekvatna i jako potpuna u odnosu na klasu svih Λ–općih okvira.

4.3 Posebne vrste općih okvira

Definicija 4.4. Neka je W neki skup, te $A_0 \subseteq \mathcal{P}(A)$. Kažemo da *skup* A_0 *ima svojstvo konačnih presjeka* ako za svaki konačan podskup $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A_0$ vrijedi $a_1 \cap \ldots \cap a_n \neq \emptyset$.

Definicija 4.5. Za opći okvir (W, R, A) kažemo da je:

a) *diferencirani* ako vrijedi $(\forall x, y \in W)(x = y \Leftrightarrow (\forall X \in A)(x \in X \Leftrightarrow y \in X))$

b) *uzak* ako vrijedi $(\forall x, y \in W)(xRy \Leftrightarrow (\forall X \in A)(y \in X \Rightarrow x \in m_\Diamond(X)))$

c) *kompaktan* ako za svaki podskup A_0 od A koji ima svojstvo konačnih presjeka vrijedi $\bigcap A_0 \neq \emptyset$;

d) *deskriptivan* ako je diferenciran, uzak i kompaktan.

Propozicija 4.5. Vrijedi:

a) opći okvir $(\mathcal{F}, A)$ je deferenciran ako i samo ako za sve $x, y \in W$ takve da je $x \neq y$ postoji $X \in A$ tako da vrijedi $x \in X$ i $y \notin X$.

b) opći okvir $(\mathcal{F}, A)$ je uzak ako i samo ako za sve $x, y \in W$ takve da xRy postoji $X \in A$ takav da je $y \in X$ i $x \notin m_\Diamond(X)$

Propozicija 4.6. Za svaku normalnu modalnu logiku Λ je kanonski opći okvir f^c_Λ deskriptivan.

Dokaz. Iz leme 4.1 znamo da je f^c_Λ opći okvir. Dokažimo da je diferenciran, uzak i kompkatan. Dokažimo prvo da je diferenciran. Iz propozicije 4.5 slijedi da je dovoljno dokazati da vrijedi $(\forall x, y \in W^\Lambda)(x \neq y \;\Rightarrow (\exists X \in A^\Lambda)(x \in X \;\text{ i }\; y \notin X))$. Neka su x i y različiti maksimalno Λ–konzistentni skupovi formula. Tada postoji formula φ tako da vrijedi $\varphi \in x$ i $\varphi \notin y$ (ili obratno). Tada imamo $x \in \hat{\varphi}$ i $y \notin \hat{\varphi}$. Iz definicije skupa A^Λ znamo $\hat{\varphi} \in A^\Lambda$, pa je ispunjen uvjet diferenciranosti.

Dokažimo da je opći okvir f^c_Λ uzak. Ponovimo uvjet uskosti općeg okvira:

$$(\forall x, y \in W^\Lambda)(xR^\Lambda y \Leftrightarrow (\forall X \in A^\Lambda)(y \in X \Rightarrow x \in m_\Diamond(X)))$$

Neka su x i y maksimalno Λ–konzistentni skupovi formula. Pretpostavimo prvo da vrijedi $xR^\Lambda y$. Neka je $X \in A^\Lambda$ takav da $y \in X$. Budući je $A^\Lambda = \{\hat{\varphi} : \varphi \text{ je formula}\}$, tada postoji formula φ tako da vrijedi $X = \hat{\varphi}$. Iz $y \in \hat{\varphi}$ slijedi $\varphi \in y$. Sada $xR^\Lambda y$ i $\varphi \in y$ (te definicija relacije R^Λ) povlače $\Diamond\varphi \in x$. Tada imamo $x \in m_\Diamond(X)$.

Dokažimo sada obrat. Pretpostavimo da vrijedi:

$$(\forall X \in A^\Lambda)(y \in X \Rightarrow x \in m_\Diamond(X))) \tag{4.2}$$

Želimo dokazati da vrijedi $xR^\Lambda y$. Neka je $\varphi \in y$ proizvoljna formula. Tada imamo $y \in \hat{\varphi}$. Iz definicije skupa A^Λ znamo $\hat{\varphi} \in A^\Lambda$, pa iz prepostavke (4.2) slijedi $x \in m_\Diamond(\hat{\varphi})$. Iz definicije funkcije $m_\Diamond$ slijedi da postoji $z \in \hat{\varphi}$ tako da vrijedi $xR^\Lambda z$. Sada $z \in \hat{\varphi}$ povlači $\varphi \in z$, a onda iz $xR^\Lambda z$ slijedi $\Diamond\varphi \in x$.

Preostalo je provjeriti da je kanonski opći okvir f^c_Λ kompaktan. Ponovimo prvo uvjet kompaktnosti: za svaki $A_0 \subseteq A^\Lambda$ koji ima svojstvo konačnih presjeka vrijedi $\bigcap A_0 \neq \emptyset$. Neka je $A_0 \subseteq A^\Lambda$ proizvoljan podskup koji ima svojstvo konačnih presjeka. Iz $A \subseteq A^\Lambda$ slijedi da postoji skup formula Σ tako da vrijedi $A_0 = \{\hat{\varphi} : \varphi \in \Sigma\}$. Tvrdimo da je skup formula Σ jedan Λ–konzistentan skup. Pretpostavimo suprotno. Tada postoje formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Sigma$ tako da vrijedi $\vdash_\Lambda (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \bot$. Tada ne postoji maksimalno konzistentan skup formula $w \in W^\Lambda$ tako da vrijedi $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq w$. No, tada očito $\hat{\varphi_1} \cap \ldots \cap \hat{\varphi_n} = \emptyset$, što je u suprotnosti s pretpostavkom da skup A_0 im svojstvo konačnih presjeka. Dakle, skup formula Σ je Λ–konzistentan, pa iz Lindenbaumove leme slijedi da postoji maksimalno Λ–konzistentan skup formula $u \in W^\Lambda$ tako da vrijedi $\Sigma \subseteq u$. Tada očito vrijedi $u \in \bigcap\{\hat{\varphi} : \varphi \in \Sigma\}$, pa imamo $\bigcap A_0 \neq \emptyset$. Q.E.D.

4.4 Opći okviri i algebre

Bili smo već definirali ultrafilter okvir zadane Booleove algebre s operatorima. Ovdje to ponavljamo, te nadopunjavamo definiciju s pojmom dopustivih valuacija.

Definicija 4.6. Neka je $\mathcal{A} = (A, +, -, 0, f)$ neka BAO. Ultrafilter okvir algebre $\mathcal{A}$ je definiran sa $\mathcal{A}_+ = (Uf\mathcal{A}, Q_f)$, gdje je $Uf\,\mathcal{A}$ skup svih ultrafiltara algebre $\mathcal{A}$, a relacija Q_f je definirana sa: uQ_fv ako i samo ako $(\forall a \in v) f(a) \in u$. Za svaki $a \in A$ neka je $\widehat{a} := \{u \in Uf\mathcal{A} : a \in u\}$. Neka je $\mathcal{A}_* = (\mathcal{A}_+, \{\widehat{a} : a \in A\})$.

U sljedećem teoremu ćemo dokazati da je $\mathcal{A}_*$ opći okvir. Nazivamo ga *opći okvir pridružen algebri* $\mathcal{A}$.

Teorem 4.4. Neka je $\mathcal{A} = (A, +, -, 0, f)$ neka Booleova algebra s operatorom. Tada je $\mathcal{A}_*$ deskriptivni opći okvir.

Skica dokaza. Prvo treba dokazati da je skup $\{\widehat{a} : a \in A\}$ zatvoren za unije, komplement i operaciju $m_\Diamond$. Prilikom dokaza zatvorenosti na unije treba prvo dokazati sljedeću pomoćnu tvrdnju:

ako je $w \in Uf\,\mathcal{A}$ ultrafilter i $a, b \in A$ tada vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$a + b \in w \text{ ako i samo ako } a \in w \text{ ili } b \in w$$

Prilikom dokaza zatvorenosti na operaciju $m_\Diamond$ treba dokazati prvo da za svaki $a \in A$ vrijedi $m_\Diamond(\widehat{a}) = \widehat{f(a)}$. Diferenciranost i uskost lako slijedi korištenjem propozicije 4.5.

Skicirajmo dokaz kompaktnosti. Neka je A_0 neki podskup skupa $\{\widehat{a} : a \in A\}$ koji ima svojstvo konačnih presjeka. Neka je $A' \subseteq A$ tako da vrijedi $A_0 = \{\widehat{a} : a \in A'\}$. Treba dokazati da skup A' ima svojstvo konačnih produkata. Tada postoji ultrafilter $w \in Uf\,\mathcal{A}$ tako da vrijedi $A' \subseteq w$. Tada $w \in \bigcap_{a \in A'} \widehat{a} = \bigcap A_0$, pa $\bigcap A_0 \neq \emptyset$. Q.E.D.

4.5 Operacije na općim okvirima

Definicija 4.7. Neka su $\mathcal{G} = (W, R, A)$ i $\mathcal{G}' = (W'R', V')$ opći okviri. Kažemo da je funkcija $\theta : W \to W'$ *ograničeni morfizam općih okvira* ako je funkcija θ ograničeni morfizam između Kripkeovih okvira (W, R) i (W', R'), te za svaki $a' \in A'$ vrijedi $\theta^{-1}[a'] \in A$.

Ograničeni morfizam θ općih okvira nazivamo *smještenje općih okvira* ako je injekcija, te vrijedi

$$(\forall a \in A)(\exists a' \in A')\ \theta[a] = \theta[W] \cap a'$$

Ako postoji smještenje općeg okvira $\mathcal{G}$ u opći okvir $\mathcal{G}'$ tada to označavamo sa $\mathcal{G} \rightarrowtail \mathcal{G}'$.

Kažemo da je opći okvir $\mathcal{G}'$ *slika pri ograničenom morfizmu* općeg okvira $\mathcal{G}$ ako postoji ograničeni morfizam iz $\mathcal{G}$ u $\mathcal{G}'$ koji je surjekcija. To označavamo sa $\mathcal{G} \twoheadrightarrow \mathcal{G}'$.

Izomofizam općih okvira je smještenje koje je surjekcija.

Definicija 4.8. Neka je dana familija općih okvira $(\mathcal{G}_i = (W_i, R_i, A_i) : i \in I)$. Za svaki $i \in I$ definiramo $W_i' = W_i \times \{i\}$, te relaciju $R_i \subseteq W_i' \times W_i'$ ovako:

$$(w, i)R_i'(u, i) \text{ ako i samo ako } wR_iu$$

Zatim, za svaki $i \in I$ definiramo skupove $A_i' \subseteq \mathcal{P}(W_i')$ na sljedeći način:

$$a \times \{i\} \in A_i' \text{ ako i samo ako } a \in A_i$$

Definiramo $A = \{a \subseteq \bigcup W_i : a \cap W_i \in A_i, \text{ za svaki } i \in I\}$. Lako je provjeriti da je $(\biguplus_{i\in I} W_i', \biguplus_{i\in I} R_i', A)$ opći okvir. Nazivamo ga *disjunktna unija familije općih okvira*, te ga označavamo sa $\biguplus_{i\in I} \mathcal{G}_i$.

Propozicija 4.7. Neka je φ proizvoljna modalna formula. Tada imamo:

a) Ako je $(\mathcal{G}_i : i \in I)$ neka familija općih okvira tada za svaki $i \in I$ vrijedi:

$$\biguplus_{i\in I} \mathcal{G}_i \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \mathcal{G}_i \Vdash \varphi$$

b) Ako $\mathcal{G}' \rightarrowtail \mathcal{G}$ i $\mathcal{G} \Vdash \varphi$ tada $\mathcal{G}' \Vdash \varphi$;

c) Ako $\mathcal{G}' \twoheadrightarrow \mathcal{G}$ i $\mathcal{G} \Vdash \varphi$ tada $\mathcal{G}' \Vdash \varphi$;

Ako je $\mathcal{G} = (W, R, A)$ neki opći okvir tada sa $\mathcal{G}_\#$ označavamo pripadni Kripkeov okvir, tj. $\mathcal{G}_\# = (W, R)$.

Lema 4.4. Neka je $\mathcal{G} = (W, R, A)$ opći okvir. Tada je $\mathcal{G}^* = (A, \cup, {}^c, \emptyset, m_\Diamond)$ jedna BAO. koju nazivamo *pripadna* BAO *općeg okvira* $\mathcal{G}$.

Ako je $\mathcal{F} = (W, R)$ Kripekov okvir, tada opći okvir $\mathcal{F}^\# = (W, R, \mathcal{P}(W))$ nazivamo puni opći okvir pridružen okviru $\mathcal{F}$.

Propozicija 4.8. Neka je $\mathcal{F}$ Kripekov okvir, $\mathcal{G} = (W, R, A)$ opći okvir i $\mathcal{A}$ neka BAO. Tada vrijedi:

a) $(\mathcal{F}^\#)_\# = \mathcal{F}$

b) $(\mathcal{F}^\#)^* = \mathcal{F}^+$

c) $(\mathcal{A}_*)_\# = \mathcal{A}_+$

d) $(\mathcal{G}_\#)^\# = \mathcal{G}$ ako i samo ako opći okvir $\mathcal{G}$ je puni (tj. $A = \mathcal{P}(W)$).

Sljedeću propoziciju je lako dokazati indukcijom po složenosti formule φ.

Propozicija 4.9. Neka je $\mathcal{G}$ opći okvir i $\mathcal{A}$ neka BAO. Tada za svaku formulu φ vrijedi:

a) $\mathcal{G} \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathcal{G}^* \models \varphi \approx \top$

b) $\mathcal{A} \models \varphi \approx \top$ ako i samo ako $\mathcal{A}_* \Vdash \varphi$

Propozicija 4.10. Neka je $\mathcal{G}$ neki opći okvir, te neka je $\mathcal{A}$ neka BAO. Tada vrijedi:

a) $(\mathcal{A}_*)^* \cong \mathcal{A}$

b) $(\mathcal{G}^*)_* \cong \mathcal{G}$ ako i samo ako opći okvir $\mathcal{G}$ je deskriptivan.

Skica dokaza tvrdnje a). Lako je provjeriti da je funkcija $f : A \to Uf\,\mathcal{A}$, koja je definirana sa $r(a) = \widehat{a}$, jedan BAO–izomorfizam.

Skica dokaza tvrdnje b). Pretpostavimo prvo da vrijedi $(\mathcal{G}^*)_* \cong \mathcal{G}$. Iz leme 4.4 slijedi da je $\mathcal{G}^*$ jedna BAO. Iz teorema 4.4 slijedi da je opći okvir $(\mathcal{G}^*)_*$ deskriptivan. Kako bi se dokazalo da je opći okvir $\mathcal{G}$ deskriptivan treba dokazati da su diferenciranost, uskost i kompaktnost invarijante izomorfizma.

Skicirajmo sada još dokaz obrata u tvrdnji b). Neka je $\mathcal{G} = (W, R, A)$ neki deskriptivan opći okvir. Za svaki $s \in W$ neka je $U_s = \{a \in A : s \in a\}$. Prvo treba dokazati pomoćnu tvrdnju: $Uf\,\mathcal{G}^* = \{U_s : s \in W\}$. (U dokazu se koristi da je opći okvir $\mathcal{G}$ kompaktan.) Definiramo funkciju $\theta : W \to Uf\,\mathcal{G}^*$ sa $\theta(s) = U_s$. Iz jednakosti $Uf\,\mathcal{G}^* = \{U_s : s \in W\}$ odmah slijedi da je funkcija θ surjekcija. Injektivnost funkcije θ slijedi iz diferenciranosti općeg okvira $\mathcal{G}$. Prilkom dokaza da se funkcja θ dobro ponaša prema relacijama dostiživosti koristi se uskost. Uvjeti na dopustive skupove slijede iz definicija operacija $(\cdot)^*$ i $(\cdot)_*$. Q.E.D.

Teorem 4.5. Neka je $\mathcal{G}$ opći okvir. Tada je $(\mathcal{G}^*)_*$ deskriptivan opći okvir koji je modalno ekvivalentan općem okviru $\mathcal{G}$, tj. za svaku modalnu formulu φ vrijedi:

$$(\mathcal{G}^*)_* \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \mathcal{G} \Vdash \varphi$$

Definicija 4.9. Za opći okvir (W, R, A) kažemo da je:

a) *rafinirani* ako je diferencirani i uzak;

b) *puni* ako je $A = \mathcal{P}(W)$

c) *diskretan* ako za svaki $x \in W$ vrijedi $\{x\} \in A$.

Propozicija 4.11. Svaki diskretan opći okvir je rafinirani.

Dokaz. Neka je $\mathcal{G} = (W, R, A)$ neki diskretan opći okvir. Dokažimo prvo da je taj opći okvir diferencirani. Neka su $x, y \in W$ takvi da je $x \neq y$. Budući da je po pretpostavci opći okvir $\mathcal{G}$ diskretan, tada posebno $\{x\} \in A$. Dakle, postoji $X \in A$ $(X = \{x\})$ tako da vrijedi $x \in X$ i $y \notin X$.

Dokažimo još da je opći okvir $\mathcal{G}$ uzak. Neka su $s, t \in W$ tako da vrijedi sRt. Tada imamo $\{t\} \in A$. Dakle, za $X = \{t\} \in A$ vrijedi $t \in X$, te $s \notin m_R(X)$. Q.E.D.

Zadaci. Odredite primjer općeg okvira $\mathcal{G}$ tako da vrijedi:

a) $\mathcal{G}$ je diferenciran, ali nije uzak;

b) $\mathcal{G}$ je rafiniran;

c) $\mathcal{G}$ je rafiniran, ali nije deskriptivan

4.6 Perzistentnost

Ako je $\mathcal{G} = (W, R, A)$ opći okvir tada smo pripadni Kripkeov okvir (W, R) označili s $\mathcal{G}_\sharp$.

Definicija 4.10. Neka je K neka klasa općih okvira. Za formulu φ kažemo da je K–*perzistentna* ako za svaki opći okvir $\mathcal{G} \in \mathsf{K}$ vrijedi:

$$\mathcal{G} \Vdash \varphi \qquad \text{ako i samo ako} \qquad \mathcal{G}_\sharp \Vdash \varphi$$

Kažemo da je neka formula *d–perzistentna* (*di–perzistentna*; *r–perzistentna*) ako je formula perzistentna obzirom na klasu svih deskriptivnih (diskretnih; rafiniranih) općih okvira.

Primjer 4.2. McKinseyeva formula $\varphi = \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$ je primjer formule koja je d–perzistentna, a nije di–perzistentna. Dokažimo da dana formula nije di–perzistentna. (Dokažite sami da je formula d–perzistentna.) Neka je $\mathcal{F} = (\mathbb{N}, R)$ Kripkeov okvir, gdje je relacija R zadana ovako:

$$\begin{aligned} R = \{(1,2),\ (1,3)\} \ &\bigcup\ \{(n,0) : n \geq 4\} \\ &\bigcup\ \{(n,k) : n,k \geq 2 \ \text{ i } \ k-n \in 2\mathbb{N} \setminus \{0\}\} \end{aligned}$$

Zatim, definiramo opći okvir $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, A)$, gdje je A skup svih konačnih i kofinitnih podskupova skupa $\mathbb{N}$. Očito je opći okvir $\mathcal{G}$ diskretan. Cilj nam je dokazati da vrijedi sljedeće:

$$\mathcal{F} \nVdash \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p \qquad \text{i} \qquad \mathcal{G} \Vdash \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$$

U tu svrhu na Kripkeovom okviru $\mathcal{F}$ definiramo valuaciju V sa $V(p) = 2\mathbb{N} \setminus \{0,2\}$. Primijetimo da valuacija V nije dopustiva za opći okvir $\mathcal{G}$, jer skup $2\mathbb{N} \setminus \{0,2\}$ nije konačan, a niti kofinitan. Označimo sa $\mathfrak{M}$ Kripkeov model $(\mathfrak{F}, V)$. Uočimo da vrijedi $\mathfrak{M}, 1 \Vdash \Diamond\Box p$. Iz $\mathfrak{M}, 3 \nVdash \Diamond p$ slijedi $\mathfrak{M}, 1 \nVdash \Box\Diamond p$. Time imamo da vrijedi $\mathfrak{M}, 1 \nVdash \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$. Lako je provjeriti da vrijedi $\mathcal{G} \Vdash \varphi$.

Zadaci.

1. Dokažite da je formula $p \to \Diamond p$ d–perzistentna.

2. Dokažite da su formule $p \to \Diamond p$ i $\Box\Diamond\top \to \Box(\Box(\Box p \to p) \to p)$ di-perzistentne.

3. Dokažite da formula $\Box\Diamond\top \to \Box(\Box(\Box p \to p) \to p)$ nije d–perzistentna.

4. Odredite primjere formula koje (ni)su r–perzistentne.

Definicija 4.11. Za formulu φ kažemo da je *kanonska* ako za svaku normalnu modalnu logiku Λ, za koju vrijedi $\varphi \in \Lambda$, imamo da je φ valjana na kanonskom Kripkeovom okviru $\mathcal{F}_\Lambda$.

Propozicija 4.12. Formula φ je kanonska ako i samo ako je d–perzistentna.

Dokaz. Pretpostavimo da je φ neka d–perzistentna formula. Neka je Λ proizvoljna normalna modalna logika takva da $\varphi \in \Lambda$. Iz leme 4.2 posebno slijedi $f^c_\Lambda \Vdash \varphi$. Iz propozicije 4.6 znamo da je kanonski opći okvir deskriptivan. Budući da je po pretpostavci formula φ d–perzistentna, tada vrijedi $(f^c_\Lambda)_\sharp \Vdash \varphi$. Očito je $(f^c_\Lambda)_\sharp = \mathcal{F}_\Lambda$, pa je formula φ valjana na kanonskom Kripkeovom okviru, tj. kanonska je.

Dokažimo sada obratnu implikaciju. Neka je φ neka kanonska formula. Tada za sve skupove varijabli Φ koji sadrže sve propozicionalne varijable formule φ, i sve normalne modalne logike Λ takve da je $\varphi \in \Lambda$, vrijedi $\mathcal{F}_\Lambda(\Phi) \Vdash \varphi$, gdje je $\mathcal{F}_\Lambda(\Phi)$ kanonski Kripkeov okvir za logiku Λ u odnosu na skup propozicionalnih varijabli Φ. Neka je $\mathcal{G} = (W, R, A)$ proizvoljan deskriptivan opći okvir takav da vrijedi $\mathcal{G} \Vdash \varphi$. Trebamo dokazati da vrijedi $\mathcal{G}_\sharp \Vdash \varphi$. Neka je Φ proizvoljan, ali fiksiran, skup propozicionalnih varijabli koji sadrži sve varijable iz φ, te za koje vrijedi $card(\Phi) \geq card(A)$. Označimo sa L skup svih modalnih formula nad skupom propozicionalnih varijabli Φ. Označimo sa Λ najmanju normalnu modalnu logiku koja sadrži $K \cup \varphi$. Budući da je po pretpostavci formula φ kanonska, tada vrijedi $\mathcal{F}_\Lambda(\Phi) \Vdash \varphi$. Neka je $V : \Phi \to A$ neka valuacija koja je surjekcija (takva postoji; skup A može biti i neprebrojiv). Očito je valuacija V dopustiva za opći okvir $\mathcal{G}$, tj. za svaku formulu $\psi \in L$ vrijedi $V(\psi) \in A$. Definiramo funkciju $f : W \to W^\Lambda$ ovako:

$$f(w) := \Gamma_w = \{\psi \in L : (\mathcal{G}, V), w \Vdash \psi\}.$$

Za svaki svijet $w \in W$ skup Γ_w je maksimalni Λ–konzistentni skup. Tvrdimo da je funkcija f injekcija i ograničeni morfizam.

Dokažimo prvo da je funkcija f injekcija. Neka su $w, v \in W$ različiti svjetovi. Budući da je po pretpostavci opći okvir $\mathcal{G}$ deskriptivan, posebno je diferenciran. Iz propozicije 4.5 slijedi da postoji skup $X \in A$ tako da vrijedi $w \in X$ i $v \notin X$. Budući da je valuacija V surjekcija, tada postoji propozicionalna varijabla $p \in \Phi$ tako da vrijedi $V(p) = X$. Tada iz $w \in X = V(p)$ slijedi $(\mathcal{G}, V), w \Vdash p$, a onda i $p \in \Gamma_w$. Iz činjenice $v \notin X = V(p)$ slijedi $(\mathcal{G}, V), v \nVdash p$, a onda i $p \notin \Gamma_v$. Time smo dokazali da vrijedi $f(w) = \Gamma_w \neq \Gamma_v = f(v)$, tj. funkcija f je injekcija.

Dokažimo sada da funkcija f zadovoljava uvjet (forth) iz definicije ograničenog morfizma. Neka su $w, v \in W$ svjetovi za koje vrijedi wRv. Neka je $\psi \in \Gamma_v$ proizvoljna formula. Iz definicije skupa Γ_w slijedi $(\mathcal{G}, V), v \Vdash \psi$. Sada pretpostavka wRv povlači $(\mathcal{G}, V), w \Vdash \Diamond\psi$, a onda imamo $\Diamond\psi \in \Gamma_w$. Iz definicije relacije R^Λ slijedi $\Gamma_w R^\Lambda \Gamma_v$, tj. $f(w) R^\Lambda f(v)$.

Preostalo je dokazati da funkcija f zadovoljava uvjet (back) iz definicije ograničenog morfizma. Neka su $w \in W$ i $v' \in W^\Lambda$ svjetovi takvi da vrijedi $f(w) R^\Lambda v'$, tj. $\Gamma_w R^\Lambda v'$. Želimo dokazati da postoji svijet $v \in W$ tako da vrijedi wRv i $f(v) = v'$. Za svaku formulu $\psi \in v'$ promotrimo skup $V(\psi) = \{v \in W : (\mathcal{G}, V), v \Vdash \psi\}$. Budući da je V dopustiva valuacija za opći okvir $\mathcal{G}$, tada za svaku formulu $\psi \in v'$ vrijedi $V(\psi) \in A$. Tvrdimo da za svaku formulu $\psi \in v'$ vrijedi $V(\psi) \neq \emptyset$. Pretpostavimo da za neku formulu $\psi \in v'$ vrijedi $V(\psi) = \emptyset$. Tada očito $(\mathcal{G}, V) \Vdash \neg\psi$, a onda i $(\mathcal{G}, V), w \nVdash \Diamond\psi$, tj. $\Diamond\psi \notin \Gamma_w$. No, iz $\Gamma_w R^\Lambda v'$ i $\psi \in v'$ slijedi $\Diamond\psi \in \Gamma_w$, pa je dobivena kontradikcija. Označimo $A_0 = \{V(\psi) : \psi \in v'\}$. Očito $A_0 \subseteq A$. Tvrdimo da skup A_0 ima svojstvo konačnih presjeka. Neka su $\psi_1, \ldots, \psi_n \in v'$ proizvoljne formule. Budući da je skup v' maksimalno Λ–konzistentan, tada $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \in v'$. Očito je $V(\psi_1) \cap \ldots \cap V(\psi_n) = V(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$. Iz prethodnog znamo $V(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \neq \emptyset$. Budući da je po pretpostavci opći okvir $\mathcal{G}$ deskriptivan, posebno je kompaktan. Budući da skup $A_0 \subseteq A$ ima svojstvo konačnih presjeka i opći okvir $\mathcal{G}$ je kompaktan, tada $\bigcap A_0 \neq \emptyset$. Neka je $v \in \bigcap A_0$ proizvoljan. Tada očito za svaku formulu $\psi \in v'$ vrijedi $(\mathcal{G}, V), v \Vdash \psi$. Iz toga lako slijedi $\Gamma_v = v'$ (a onda i $f(v) = v'$). Dokažimo da vrijedi wRv. Pretpostavimo suprotno. Budući da je po pretpostavci opći okvir $\mathcal{G}$ deskriptivan, tada je posebno uzak, pa onda slijedi da postoji skup $X \in A$ takav da $v \in X$ i $w \notin m_\Diamond(X)$. Budući da je funkcija V surjekcija, tada postoji propozicionalna varijabla $p \in \Phi$ tako da vrijedi $V(p) = X$. Tada $p \in \Gamma_v$. Iz činjenice $w \notin m_\Diamond(X)$ slijedi $(\mathcal{G}, V), w \nVdash \Diamond p$, a onda $\Diamond p \notin \Gamma w$. Time je dobivena kontradikcija ($\Gamma_w R^\Lambda \Gamma_v$ i $p \in \Gamma_v$ povlači $\Diamond p \in \Gamma_w$).

Dokazali smo da je funkcija $f : W \to W^\Lambda$ injekcija i ograničeni morfizam. Neka je $\mathcal{F}'$ podokvir od $\mathcal{F}_\Lambda(\Phi)$ generiran slikom funkcije f, tj. skupom $Rng(f)$. Kako je f ograničeni morfizam, iz uvjeta (back) slijedi $\mathcal{F}' = Rng(f)$. Iz $\mathcal{F}_\Lambda(\Phi) \Vdash \varphi$ i činjenice da je $\mathcal{F}'$ generirani podokvir od $\mathcal{F}_\Lambda$ slijedi $\mathcal{F}' \Vdash \varphi$. Budući da je funkcija f izomorfizam okvira $\mathcal{F}'$ i $\mathcal{F}_\sharp$, tada vrijedi $\mathcal{F}_\sharp \Vdash \varphi$. Q.E.D.

Napomena 4.3. Za svaku familiju Kripkeovih okvira $(\mathcal{F}_i : i \in I)$, svaki ultrafilter U nad skupom I i svaku modalnu formulu φ vrijedi:

$$\text{ako} \quad \prod_U \mathcal{F}_i \Vdash \varphi \quad \text{tada} \quad \{i \in I : \mathcal{F}_i \Vdash \varphi\} \in U$$

(Za dokaz navedene tvrdnje primijenite Łosov teorem na standardnu translaciju formule φ.)

No, obrat općenito ne vrijedi. Navest ćemo jedan primjer za to. Neka je φ Löbova formula $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$. Za svaki $i \in \mathbb{N}$ definiramo $\mathcal{F}_i = (\{1, \ldots, n\}, <)$. Primijetimo da je svaki okvir $\mathcal{F}_i$ tranzitivan i inverzno dobro fundiran. Iz propozicije 2.4 slijedi da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathcal{F}_i \Vdash \varphi$. Neka je U ultrafilter koji sadrži Fréchetov filter nad skupom $\mathbb{N}$. Lako je provjeriti da ultraprodukt $\prod_U \mathcal{F}_i$ nije inverzno dobro fundiran, pa ne vrijedi $\prod_U \mathcal{F}_i \Vdash \varphi$.

Teorem 4.6. Neka je φ neka r–perzistentna modalna formula. Tada je klasa Kripkeovih okvira $\mathsf{K} = \{\mathcal{F} \ : \ \mathcal{F} \Vdash \varphi\}$ elementarna.

Dokaz. Vrijedi sljedeći teorem (vidi, primjerice, C. C. Chang, H. J. Keisler, Model theory, North–Holland)

Klasa K je elementarna ako i samo ako
klasa K je zatvorena za izomorfizme i ultraprodukte,
te je klasa K^c zatvorena za ultrapotencije

Kako bi dokazali tvrdnju teorema treba provjeriti da je klasa K zatvorena za izomorfizme i ultraprodukte, te da je klasa K^c zatvorena za ultrapotencije. Najviše posla je s dokazom zatvorenosti na ultraprodukte. Ovdje navodimo neke bitne dijelove.

Dokažimo prvo da je klasa K zatvorena za izomorfizme. Neka su $\mathcal{F}_1 = (W_1, R_1)$ i $\mathcal{F}_2 = (W_2, R_2)$ dva izomorfna okvira, te neka je $\mathcal{F}_1 \in \mathsf{K}$. Tada $\mathcal{F}_1 \Vdash \varphi$. Neka je $f : W_1 \to W_2$ neki izomorfizam okvira $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$. Neka je V_2 proizvoljna valuacija na okviru $\mathcal{F}_2$. Definiramo valuaciju V_1 na okviru $\mathcal{F}_1$ sa $V_1(p) = \{v \in W_1 : f(v) \in V_2(p)\}$, za svaku propozicionalnu varijablu p. Indukcijom po složenosti proizvoljne formule ψ lako je dokazati da za svaki svijet $w \in W$ vrijedi sljedeća ekvivalencija: $(\mathcal{F}_1, V_1), w \Vdash \psi$ ako i samo ako $(\mathcal{F}_2, V_2), f(w) \Vdash \psi$. Tada posebno $\mathcal{F}_1 \Vdash \varphi$ povlači $\mathcal{F}_2 \Vdash \varphi$, pa imamo $\mathcal{F}_2 \in \mathsf{K}$.

Dokažimo sada da je klasa K^c zatvorena za ultrapotencije. Neka je $\mathcal{F} \in \mathsf{K}^c$ proizvoljan okvir. Tada vrijedi $\mathcal{F} \nVdash \varphi$, pa postoji svijet w i valuacija V takvi da $(\mathcal{F}, V), w \nVdash \varphi$. Neka je I neki neprazan skup, te U neki ultrafilter nad I. Neka je $f : I \to W$ konstantna funkcija definirana sa $f(i) = w$. Označimo sa f_U pripadnu klasu ekvivalencije. Lako je dokazati da vrijedi $(\mathcal{F}, V), w \equiv \prod_U (\mathcal{F}, V), f_U$. Sada iz $(\mathcal{F}, V)w \nVdash \varphi$ slijedi $\prod_U (\mathcal{F}, V), f_U \nVdash \varphi$, a onda i $\prod_U \mathcal{F} \in \mathsf{K}^c$.

Sada dokazujemo da je klasa K zatvorena za ultraprodukte. U tu svrhu prvo razmatramo ultraprodukte općih okvira. Neka je $(\mathcal{G}_i : i \in I)$ neka familija općih okvira, gdje je $\mathcal{G}_i = (W_i, R_i, A_i)$. Neka je U proizvoljan ultrafiltar nad skupom I. Za $s, t \in \prod_i W_i$ definiramo:

$$s \sim_U \Leftrightarrow \ \{i \in I : s_i = t_i\} \in U$$

Lako je provjeriti da je $\sim_U$ relacija ekvivalencije. Za $s \in \prod_i W_i$ sa s_U označavamo pripadnu klasu ekvivalencije. Za $a, b \in \prod_i A_i$ definiramo:

$$a \approx_U b \ \Leftrightarrow \ \{i \in I : a_i = b_i\} \in U$$

Lako je provjeriti da je $\approx_U$ relacija ekvivalencije. Za $a \in \prod_i A_i$ sa a_U označavamo pripadnu klasu ekvivalencije. Za $s \in \prod_i W_i$ i $a \in \prod_i A_i$ definiramo $[[s \in a]] = \{i \in$

$I : s_i \in a_i\}$. Za svaki $a_U \in \prod_U A_i$ definiramo $(a_U)^\circ = \{s_U : [[s \in a]] \in U\}$. Lako je provjeriti da prethodne definicije ne ovise o izboru reprezentanata, tj. da za sve $s, t \in \prod_i W_i$, te sve $a, b \in \prod_i A_i$ vrijedi:

a) ako $s \sim_U t$ tada vrijedi: $[[s \in a]] \in U$ ako i samo ako $[[t \in a]] \in U$

b) ako $a \approx_U b$ tada vrijedi: $[[s \in a]] \in U$ ako i samo ako $[[s \in b]] \in U$

Sada možemo definirati ultraprodukt familije općih okvira kao uređenu trojku $(\prod_U W_i, \prod_U R_i, A_U)$, gdje je $A_U = \{(a_U)^\circ : a \in \prod_i A_i\}$. Ultraprodukt familije općih okvira $(\mathcal{G}_i : i \in I)$ nad ultrafiltrom U označavamo sa $\prod_U \mathcal{G}_i$. Dokažimo sada da je $\prod_U \mathcal{G}_i$ opći okvir. U tu svrhu dokažimo da je skup A_U zatvoren na unije, komplemente i operaciju $m_\Diamond$.

Dokažimo prvo da je skup A_U zatvoren za unije. Neka su $a, b \in \prod_U A_i$ proizvoljni. Označimo sa $a \bigcup b$ funkciju iz I u $\prod_i A_i$ koja je definirana sa $(a \bigcup b)(i) = a_i \cup b_i$. Budući da je za svaki $i \in I$ struktura $\mathcal{G}_i = (W_i, R_i, A_i)$ opći okvir, tada za svaki $i \in I$ vrijedi $a_i \cup b_i \in A_i$. Time imamo $a \bigcup b \in \prod_i A_i$. Lako je vidjeti da redom vrijedi:

$$\begin{aligned}
(a_U)^\circ \bigcup (b_U)^\circ &= \{s_U : [[s \in a]] \in U\} \bigcup \{s_U : [[s \in b]] \in U\} \\
&= \{s_U : [[s \in a]] \in U \text{ ili } [[s \in b]] \in U\} \\
&= \{s_U : \{i \in I : s_i \in a_i\} \in U \text{ ili } \{i \in I : s_i \in b_i\} \in U\} \\
&= (U \text{ je ultrafilter}) = \{s_U : \{i \in I : s_i \in a_i \text{ ili } s_i \in b_i\} \in U\} \\
&= \{s_U : \{i \in I : s_i \in a_i \cup b_i\} \in U\} = \{s_U : [[s \in a \bigcup b]] \in U\} \\
&= ((a \bigcup b)_U)^\circ
\end{aligned}$$

Budući da je $a \bigcup b \in \prod_i A_i$, tada je $((a \bigcup b)_U)^\circ \in A_U$.

Dokažimo sada da je skup A_U zatvoren za komplemente. Neka je $a \in \prod_i A_i$ proizvoljan. Tada je a funkcija s domenom I i kodomenom $\bigcup_i A_i$, tako da za svaki $i \in I$ vrijedi $a_i \in A_i$. Neka je funkcija $a^c : I \to \prod_i A_i$ definirana sa $(a^c)_i = W_i \setminus a_i$. Budući da je za svaki $i \in I$ struktura $\mathcal{G}_i = (W_i, R_i, A_i)$ opći okvir, tada je za svaki $i \in I$ ispunjeno $W_i \setminus a_i \in A_i$. Iz toga slijedi $a^c \in \prod_i A_i$. Tada imamo:

$$\begin{aligned}
((a_U)^\circ)^c &= \{s_u : [[s \in a]] \notin U\} = \{s_U : \{i \in I : s_i \in a_i\} \notin U\} = (U \text{ je ultrafilter}) \\
&= \{s_U : \{i \in I : s_i \notin a_i\} \in U\} = \{s_U : \{i \in I : s_i \in W_i \setminus a_i\} \in U\} \\
&= \{s_U : \{i \in I : s_i \in (a^c)_i\} \in U\} = \{s_U : [[s \in a^c]] \in U\} \\
&= ((a^c)_U)^\circ
\end{aligned}$$

Budući da smo već bili primijetili da vrijedi $a^c \in \prod_i A_i$, tada je $((a^c)_U)^\circ \in A_U$.

Dokažimo još da je skup A_U zatvoren za operaciju $m_\Diamond$. Neka je $a \in \prod_i A_i$ proizvoljan. Tada je a funkcija s domenom I i kodomenom $\bigcup_i A_i$, tako da za svaki $i \in I$ vrijedi $a_i \in A_i$. Budući da je za svaki $i \in I$ struktura $\mathcal{G}_i = (W_i, R_i, A_i)$ opći okvir, tada za svaki $i \in I$ vrijedi $m_\Diamond(a_i) \in A_i$. Neka je sa $m_\Diamond(a)$ označena funkcija s domenom I i kodomenom $\bigcup_i A_i$ koja je definirana sa $(m_\Diamond(a))_i = m_\Diamond(a_i)$. Tada je $m_\Diamond(a) \in \prod_i A_i$. Lako je vidjeti da redom vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
m_\Diamond((a_U)^\circ) &= \{s_U : \exists t_U \in (a_U)^\circ \text{ tako da } s_U R_U t_U\} \\
&= \{s_U : \exists t \in \textstyle\prod_i W_i \text{ tako da } [[t \in a]] \in U \ \text{ i } s_U R_U t_U\} \\
&= \{s_U : \exists t \in \textstyle\prod_i W_i \text{ tako da } \{i \in I : t_i \in a_i\} \in U \ \text{ i } \ \{i \in I : s_i R_i t_i\} \in U\} \\
&= \{s_U : \exists t \in \textstyle\prod_i W_i \text{ tako da } \{i \in I : t_i \in a_i \ \text{ i } \ s_i R_i t_i\} \in U\} \\
&= \{s_U : \{i \in I : \exists t_i \in a_i \ \text{ tako da } \ s_i R_i t_i\} \in U\} \\
&= \{s_U : \{i \in I : s_i \in m_\Diamond(a_i)\} \in U\} = \{s_U : [[s \in m_\Diamond(a)]] \in U\} \\
&= (m_\Diamond(a))^\circ
\end{aligned}$$

Budući da smo prije primijetili da vrijedi $m_\Diamond(a) \in \prod_a A_i$, tada vrijedi $(m_\Diamond(a))^\circ \in A_U$.

Time je završen dokaz da je $\prod_U \mathcal{G}_i$ opći okvir.

U napomeni 4.3 bili smo istaknuli da za Kripkeove okvire ne vrijedi analogon Łosovog teorema. Indukcijom po složenosti proizvoljne formule ψ lako je dokazati da vrijedi sljedeći analogon Łosvog teorema za opće okvire:

$$\prod_U \mathcal{G}_i \Vdash \psi \ \text{ ako i samo ako } \{i \in I : \mathcal{G}_i \Vdash \psi\} \in U \tag{4.3}$$

Dokažimo sada da je ultraprodukt rafiniranih općih okvira ponovno rafinirani opći okvir. Neka je $(\mathcal{G}_i = (W_i, R_i, A_i) : i \in)$ neka familija rafiniranih općih okvira, te neka je U neki ultrafilter nad skupom I. Ultraprodukt te familije označimo sa $\mathcal{G}$. Relaciju dostiživosti okvira $\mathcal{G}$ označimo sa $\widetilde{R}$. Dokazat ćemo da je opći okvir $\mathcal{G}$ diferenciran i uzak. Prvo dokazujemo da je diferenciran. Neka su $x, y \in \prod_i W_i$ takvi da $x_U \neq y_U$. Tada vrijedi $\{i \in I : x_i = y_i\} \notin U$. Budući da je U ultrafilter, tada $\{i \in I : x_i \neq y_i\} \in U$. Iz pretpostavke da je svaki opći okvir $\mathcal{G}_i$ rafiniran slijedi da za svaki $i \in I$ takav da je $x_i \neq y_i$, postoji $a_i \in A_i$ takav da $x_i \in a_i$ i $y_i \notin a_i$. Za ostale $i \in I$ (tj. takve da je $x_i = y_i$) odaberemo proizvoljne neprazne $a_i \in A_i$. Neka je $a : I \to \bigcup A_i$ definirana sa $a(i) = a_i$. Očito vrijedi $a \in \prod_i A_i$. Primijetimo da vrijedi $x_U \in (a_U)^\circ$, jer za svaki

$i \in I$ za koji je $x_i \neq y_i$ imamo $x_i \in a_i$, te vrijedi $\{i \in I : x_i \neq y_i\} \in U$. Zatim, vrijedi $y_U \notin (a_U)^\circ$, jer $\{i \in I : y_i \notin a_i\} \in U$, a onda $\{i \in I : y_i \in a_i\} \notin U$.

Dokažimo sada da je ultraprodukt rafiniranih općih okvira uzak. Neka su $x, y \in \prod_i W_i$ takvi da ne vrijedi $x_U \widetilde{R} y_U$. Tada $\{i \in I : x_i R_i y_i\} \notin U$, a onda $\{i \in I :$ ne vrijedi $x_i R_i y_i\} \in U$. Iz ovog posljednjeg i pretpostavke da je svaki opći okvir $\mathcal{G}_i$ rafiniran, slijedi:

$$\{i \in I : (\exists a_i \in A_i) \text{ takav da } y_i \in a_i \text{ i } x_i \notin m_\Diamond(a_i)\} \in U \tag{4.4}$$

Za svaki $i \in I$ takav da ne vrijedi $x_i R_i y_i$, izaberimo jedan $a_i \in A_i$ tako da $y_i \in a_i$ i $x_i \notin m_\Diamond(a_i)$. Za ostale $i \in I$ izaberemo proizvoljan neprazan $a_i \in A_i$. Neka je funkcija $a : I \to \bigcup_i A_i$ definirana sa $a(i) = a_i$. Iz prethodnih razmatranja slijedi $a \in \prod_i A_i$. Iz (4.4) i činjenice da je U ultrafilter (tj. zatvoren je za nadskupove) slijedi $\{i \in I : y_i \in a_i\} \in U$, a onda imamo $y_U \in (a_U)^\circ$. Analogno, iz (4.4) i zatvorenosti ultrafiltra U za nadskupove slijedi $\{i \in I : x_i \notin m_\Diamond(a_i)\} \in U$. Tada očito vrijedi:

$$\{i \in I : x_i \in m_\Diamond(a_i)\} \notin U \tag{4.5}$$

Pretpostavimo da vrijedi $x_U \in m_\Diamond((a_U)^\circ)$. Tada postoji $s \in \prod_i W_i$ takav da vrijedi $[[s \in a]] \in U$ i $x_U \widetilde{R} s_U$. Iz toga slijedi $\{i \in I : s_i \in a_i\} \in U$ i $\{i \in I : x_i R_i s_i\} \in U$, a budući da je U ultrafilter, tada je i presjek tih skupova iz U. Očito vrijedi:

$$\{i \in I : s_i \in a_i\} \bigcap \{i \in I : x_i R_i s_i\} = \{i \in I : x_i \in m_\Diamond(a_i)\}$$

Time smo dobili da vrijedi $\{i \in I : x_i \in m_\Diamond(a_i)\} \in U$, što je u suprotnosti s (4.5). Na taj način smo dokazali da mora vrijediti $x_U \notin m_\Diamond((a_U)^\circ)$, pa je završen dokaz da je opći okvir $\mathcal{G}$ uzak, o onda je i završen dokaz da je taj okvir rafiniran.

Dokažimo konačno na kraju da je klasa Kripkeovih okvira K zatvorena za ultraprodukte. (Prisjetimo se pretpostavke teorema: $\mathsf{K} = \{\mathcal{F} : \mathcal{F} \Vdash \varphi\}$, gdje je φ neka r–perzistentna modalna formula.) Neka je $(\mathcal{F}_i : i \in I)$ neka familija Kripkeovih okvira iz klase K, te neka je U neki ultrafilter nad skupom I. Za svaki $i \in I$ sa $\mathcal{G}_i$ označimo puni opći okvir pridružen okviru $\mathcal{F}_i$, tj. $\mathcal{G}_i = (W_i, R_i, \mathcal{P}(W_i))$. Lako je provjeriti da je svaki opći okvir $\mathcal{G}_i$ rafiniran. Tada je ultraprodukt $\prod_U \mathcal{G}_i$ također rafiniran. Budući za svaki $i \in I$ vrijedi $\mathcal{F}_i \in \mathsf{K}$, tada $\mathcal{F}_i \Vdash \varphi$. Tada očito za svaki $i \in I$ imamo $\mathcal{G}_i \Vdash \varphi$. Budući da je $I \in U$, tada iz $I = \{i \in I : \mathcal{G}_i \Vdash \varphi\} \in U$ i prije istaknute činjenice (4.3) slijedi $\prod_U \mathcal{G}_i \Vdash \varphi$. Iz pretpostavke da je formula φ r–perzistentna slijedi tada $(\prod_U \mathcal{G}_i)_\sharp \Vdash \varphi$. Budući da za svaki $i \in I$ vrijedi $(\mathcal{G}_i)_\sharp = \mathcal{F}_i$, tada je lako vidjeti da vrijedi i $(\prod_U \mathcal{G}_i)_\sharp = \prod_U \mathcal{F}_i$. Tada $(\prod_U \mathcal{G}_i)_\sharp \Vdash \varphi$ zapravo znači $\prod_U \mathcal{F}_i \Vdash \varphi$. Iz toga slijedi $\prod_U \mathcal{F}_i \in \mathsf{K}$, pa je time završen dokaz da je klasa K zatvorena za ultraprodukte. Q.E.D.

Napomena 4.4. Ako je $(\mathcal{F}_i = (W_i, R_i) : i \in I)$ neka familija Kripkeovih okvira, te za svaki $i \in I$ je $\mathcal{G}_i = (\mathcal{F}_i, \mathcal{P}(W_i))$ pripadni puni opći okvir, tada očito za svaku formulu φ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathcal{F}_i \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \mathcal{G}_i \Vdash \varphi$$

Bili smo istaknuli da za opće okvire vrijedi analogon Łosovog teorema:

$$\prod_U \mathcal{G}_i \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \{i \in I : \mathcal{G}_i \Vdash \varphi\} \in U$$

Tada imamo sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned} \prod_U \mathcal{G}_i \Vdash \varphi \quad &\Leftrightarrow \quad \{i \in I : \mathcal{G}_i \Vdash \varphi\} \in U \\ &\Leftrightarrow \quad \{i \in I : \mathcal{F}_i \Vdash \varphi\} \in U \end{aligned}$$

No, uočimo da iz toga ne slijedi:

$$\prod_U \mathcal{F}_i \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \{i \in I : \mathcal{F}_i \Vdash \varphi\} \in U$$

Naime, općenito ne vrijedi $\prod_U \mathcal{G}_i = (\prod_U \mathcal{F}_i, \mathcal{P}(\prod_U W_i))$.

U napomeni 4.3 bili smo istaknuli da za svaku familiju Kripkeovih okvira $(\mathcal{F}_i : i \in I)$, te svaki ultrafilter U nad skupom I i svaku formulu φ vrijedi da $\prod_U \mathcal{F}_i \Vdash \varphi$ povlači $\{i \in I : \mathcal{F}_i \Vdash \varphi\} \in U$. Ovdje dajemo jedan alternativni dokaz te činjenice. Neka je za svaki $i \in I$ sa $\mathcal{G}_i$ označen pripadni puni opći okvir pridružen Kripkeovom okviru $\mathcal{F}_i$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} \prod_U \mathcal{F}_i \quad &\Rightarrow \quad \prod_U \mathcal{G}_i \Vdash \varphi \\ &\Rightarrow \quad \{i \in I : \mathcal{G}_i \Vdash \varphi\} \in U \\ &\Rightarrow \quad \{i \in I : \mathcal{F}_i \Vdash \varphi\} \in U \end{aligned}$$

Zadaci.

1. Dokažite da je komplement modalno definabilne klase okvira zatvoren za ultrapotencije.

2. Neka je klasa okvira K modalno definabilna jednom formulom φ.

   a) Dokažite da je komplement klase K zatvoren za ultraprodukte.

   b) Neka je Γ teorija prvog reda inducirana klasom K. Dokažite da je φ semantička posljedica od Γ, a zatim dokažite da je φ semantička posljedica nekog konačnog podskupa od Γ.

3. Neka modalna formula φ definira neku elementarnu klasu okvira. Dokažite da tada formula φ korespondira nekoj formuli prvog reda.

4.7 Sahlqvistov teorem potpunosti

Sada nam je glavni cilj dati skicu dokaza Sahlqvistovog teorema potpunosti: *Svaka Sahlqvistova formula je kanonska*. Odmah na početku želimo naglasiti da bi za potpuni dokaz prvo trebalo dobro proučiti dokaz Sahlqvistovog teorema korespondencije. Budući da to nećemo napraviti, ovdje ćemo se najviše posvetiti "algebarskim" dijelovima dokaza. Na stranama 22–24 definirani su redom sljedeći pojmovi: pozitivna formula, rastuća formula, (vrlo) (jednostavna) Sahlqvistova formula i korespondente formule. U sljedećim iskazima tvrdnji i dokazima koristit ćemo navedene pojmove, ali ih ovdje nećemo ponavljati.

Sada ćemo istaknuti neke formule prvog reda koje ćemo koristiti u dokazima sljedeća dva teorema. Smatramo da skup nelogičkih simbola sadrži jedan binarni relacijski simbol R, te za svaku propozicionalnu varijablu $p_i \in \Phi$ (iz zadanog skupa propozicionalnih varijabli) sadrži unarni relacijski simbol P_i.

> Sa `REL` je označena konjunkcija formula oblika Rx_ix_j koje se pojave u standardnoj translaciji zadane modalne formule.
>
> Sa `AT` je označena konjunkcija formula oblika Px_i koje se pojave u standardnoj translaciji zadane modalne formule.
>
> Ako je ψ neka pozitivna modalna formula tada je sa `POS` označena njena standardna translacija.

Sve prije navedene formule prvog reda koriste se u dokazu Sahlqvistovog teorema korespondencije.

Dokaz sljedećeg teorema je svojevrsna vježba za teorem koji slijedi iza. No, treba naglasiti da se sljedeći teorem neće koristiti u dokazu teorema iza.

Teorem 4.7. Svaka vrlo jednostavna Sahlqvistova formula je di–perzistentna.

Skica dokaza. Neka je F neka vrlo jednostavna Sahlqvistova formula. Neka je $\mathcal{G} = (W, R, A)$ neki diskretan opći okvir takav da $\mathcal{G} \Vdash F$. Želimo dokazati $\mathcal{G}_\sharp \Vdash F$. Iz dokaza Sahlqvistovog teorema korespondencije (točnije, verzije teorema za vrlo jednostavne Sahlqvistove formule) može se vidjeti (!) da je $\mathcal{G}_\sharp \Vdash F$ ekvivalentno sa sljedećom tvrdnjom:

$$\mathcal{G}_\sharp \models_{SO} \forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x_1 \ldots \forall x_m (\mathtt{REL} \land \mathtt{AT} \to \mathtt{POS})$$

(Sa $\models_{SO}$ je označena relacija istinitosti formula logike drugog reda; SO = (eng.) second order). Neka je $\vec{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_m) \in W^{m+1}$ neki konačan niz svjetova duljine $m + 1$. Na Kripkeovom okviru $\mathcal{G}_\sharp$ definiramo valuaciju V_m ovako:

$$V_m(p) = \{s_i : \text{ formula } \ Px_i \ \text{ je član konjunkcije } \ \mathtt{AT}\}$$

Lako je vidjeti (!) da je V_m najmanja valuacija U takva da vrijedi $(\mathcal{G}_\sharp, U) \models \mathtt{AT}[\vec{s}]$, tj. za svaku valuaciju U vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$(\mathcal{G}_\sharp, U) \models \mathtt{AT}[\vec{s}] \quad \begin{array}{l} \text{ako i samo ako} \\ \text{valuacija } U \text{ je proširenje valuacije } V_m \end{array}$$

Tvrdnja 1. Za svaku propozicionalnu varijablu p vrijedi $V_m(p) \in A$.

Dokaz tvrdnje 1. Iz definicije valuacije V_m očito slijedi da za svaku propozicionalnu varijablu p vrijedi $V_m(p) \subseteq \{s_0, s_1, \ldots, s_m\}$. Budući da je po pretpostavci opći okvir $\mathcal{G}$ diskretan, tada za svaki $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ vrijedi $\{s_i\} \in A$. No, skup A je zatvoren na unije, pa imamo $V_m(p) \in A$.

Tvrdnja 2. Vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$(\mathcal{G}_\sharp, V_m) \models_{SO} (\mathtt{REL} \wedge \mathtt{AT} \to \mathtt{POS})[\vec{s}] \quad \begin{array}{l} \text{ako i samo ako} \\ \text{za svaku valuaciju } V \text{ vrijedi} \\ (\mathcal{G}_\sharp, V) \models_{SO} (\mathtt{REL} \wedge \mathtt{AT} \to \mathtt{POS})\,[\vec{s}] \end{array}$$

Dokaz tvrdnje 2. Implikcija $\Leftarrow$ trivijalno vrijedi. Dokažimo obratnu implikaciju. Pretpostavimo da vrijedi $(\mathcal{G}_\sharp, V_m) \models_{SO} (\mathtt{REL} \wedge \mathtt{AT} \to \mathtt{POS})\,[\vec{s}]$. Neka je V neka valuacija za koju vrijedi $(\mathcal{G}_\sharp, V) \models_{SO} (\mathtt{REL} \wedge \mathtt{AT})[\vec{s}]$. Tada posebno vrijedi i $(\mathcal{G}_\sharp, V) \models_{SO} \mathtt{AT}[\vec{s}]$. Prije smo bili primijetili da je svaka valuacija koja ima gornje svojstvo, nužno proširenje valuacije V_m, pa vrijedi $(\mathcal{G}_\sharp, V_m) \models_{SO} \mathtt{AT}[\vec{s}]$. Zatim, primijetimo da je istinitost formule $\mathtt{REL}$ neovisna o valuaciji, već ovisi samo o okviru (formula $\mathtt{REL}$ je konjunkcija formula oblika Rx_ix_j, a svaka valuacija V daje vrijednost varijabli drugog reda P_i.) To znači da iz $(\mathcal{G}_\sharp, V) \models_{SO} \mathtt{REL}[\vec{s}]$ slijedi $(\mathcal{G}_\sharp, V_m) \models_{SO} \mathtt{REL}[\vec{s}]$. Time smo dokazali da vrijedi $(\mathcal{G}_\sharp, V_m) \models_{SO} (\mathtt{REL} \wedge \mathtt{AT})[\vec{s}]$. Sada iz pretpostavke $(\mathcal{G}_\sharp, V_m) \models_{SO} (\mathtt{REL} \wedge \mathtt{AT} \to \mathtt{POS})\,[\vec{s}]$ slijedi $(\mathcal{G}_\sharp, V_m) \models_{SO} \mathtt{POS}[\vec{s}]$. Budući da je valuacija V proširenje valuacije V_m, te je $\mathtt{POS}$ pozitivna formula, tada svojstvo monotonosti povlači $(\mathcal{G}_\sharp, V) \models_{SO} \mathtt{POS}[\vec{s}]$. Time je tvrdnja 2 dokazana.

Ponovimo da za dokaz teorema trebamo dokazati da za svaki niz svjetova $\vec{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_m)$ i svaku valuaciju V na Kripekovom okviru $\mathcal{G}_\sharp$ vrijedi sljedeće:

$$(\mathcal{G}_\sharp, V) \models_{SO} (\mathtt{REL} \wedge \mathtt{AT} \to \mathtt{POS})\,[\vec{s}]$$

Neka je $\vec{s} \in W^{m+1}$ proizvoljan konačan niz, te neka je V proizvoljna valuacija. Iz dokazane tvrdnje 1 znamo da je V_m dopustiva valuacija, pa iz pretpostavke $\mathcal{G} \Vdash F$ slijedi $\mathcal{G} \models_{SO} ST_x(F)$, a onda i $(\mathcal{G}_\sharp, V_m) \models_{SO} (\mathtt{REL} \wedge \mathtt{AT} \to \mathtt{POS})\,[\vec{s}]$. Sada iz dokazane tvrdnje 2 dobivamo traženu tvrdnju, tj. $(\mathcal{G}_\sharp, V) \models_{SO} (\mathtt{REL} \wedge \mathtt{AT} \to \mathtt{POS})\,[\vec{s}]$. Q.E.D.

U dokazu sljedećeg teorema koristit ćemo zatvorene skupove. Ovdje dajemo definiciju tog pojma, te u jednoj lemi navodimo osnovna svojstva.

Definicija 4.12. Neka je $\mathcal{G} = (W, R, A)$ neki opći okvir. Za $C \subseteq W$ kažemo da je *zatvoren* ako je jednak presjeku neke familije dopustivih skupova, tj. elemenata skupa A.

Lema 4.5. Neka je $\mathcal{G} = (W, R, V)$ neki deskriptivan opći okvir. Tada vrijedi:

a) Svaki jednočlani skup je zatvoren.

b) Familija svih zatvorenih skupova je zatvorena na konačne unije i proizvoljne presjeke.

c) Ako je $C \subseteq W$ zatvoren tada je i skup $R[C] = \{t : (\exists c \in C)cRt\}$ zatvoren.

d) Svaka familija zatvorenih skupova koja ima svojstvo konačnih presjeka, ima neprazan presjek.

U iskazu sljedećeg teorema spominjemo Sahlqvistove formule (vidi definiciju 1.30). No, budući ćemo dati skicu dokaza za jednostavne Sahlqvistove formule, ovdje ćemo ukratko ponoviti tu definiciju. *Jednostavna Sahlqvistova formula* je svaka formula oblika $\varphi \to \psi$, pri čemu je ψ pozitivna formula, a formula φ je izgrađena od konstatni $\perp$ i $\top$, te formula oblika $\Box^k p$, koristeći samo veznik $\wedge$ i operator $\Diamond$.

Teorem 4.8. Svaka Sahlqvistova formula je d–perzistentna.

Skica dokaza. Još jednom naglašavamo da nećemo dati skicu dokaza za Sahlqvistove formule, već ćemo to učiniti za jednostavne Sahlqvistove formule jer je dokaz manje tehnički zahtjevan. Neka je $F = \varphi \to \psi$ neka jednostavna Sahlqvistova formula. Neka je $\mathcal{G} = (W, R, A)$ neki deskriptivan opći okvir takav da $\mathcal{G} \Vdash F$. Želimo dokazati $\mathcal{G}_\sharp \Vdash F$. Iz dokaza Sahlqvistovog teorema korespondencije (!) znamo da je $\mathcal{G}_\sharp \Vdash F$ ekvivalentno sa sljedećom tvrdnjom:

$$\mathcal{G}_\sharp \models_{SO} \forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x_1 \ldots \forall x_m (\texttt{REL} \wedge \texttt{BOX-AT} \to \texttt{POS}),$$

gdje su formule `REL` i `POS` kao i u dokazu prethodnog teorema, a formula `BOX-AT` je konjunkcija formula oblika $\forall y(R^k x_i y \to Py)$ koje se pojavljuju u standardnoj translaciji modalne formule φ. Ovo posljednje je očito ekvivalentno sa činjenicom da za svaki konačan niz svjetova $\vec{s}$ duljine $m + 1$, te svaku valuacija V vrijedi:

$$(\mathcal{G}_\sharp, V) \models_{SO} (\texttt{REL} \wedge \texttt{BOX-AT} \to \texttt{POS})[\vec{s}]$$

Definiramo valuaciju V_m ovako:

$$V_m(p) = \bigcup \{R^k[s_i] : \quad \begin{array}{l}\text{formula oblika } \forall y(R^k x_i y \to Py) \\ \text{je podformula od } \texttt{BOX-AT}\}\end{array}$$

gdje je $R^k[s_i] = \{w \in W : R^k s_i w\}$. Lako je provjeriti da je valuacija V_m najmanja među valuacijma U za koje vrijedi $(\mathcal{G}_\sharp, U) \models_{SO} \texttt{BOX-AT}[\vec{s}]$. Na sasvim analogni način kako se u dokazu prethodnog teorema dokazuje tvrdnja 2, tako se ovdje može dokazati da vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$(*)\begin{cases} (\mathcal{G}_\sharp, V_m) \ \models_{SO} (\mathtt{REL} \wedge \mathtt{BOX\text{-}AT} \to \mathtt{POS})[\vec{s}] \ \text{ ako i samo ako} \\ \\ \qquad\qquad \text{za svaku valuaciju } V \text{ vrijedi} \\ \qquad\qquad (\mathcal{G}_\sharp, V) \models_{SO} (\mathtt{REL} \wedge \mathtt{BOX\text{-}AT} \to \mathtt{POS})[\vec{s}] \end{cases}$$

Za razliku od dokaza prethodnog teorema, ovdje ne mora nužno vrijediti da je valuacija V_m dopustiva, tj. za svaku propozicionalnu varijablu ne vrijedi nužno $V_m(p) \in A$. No, ipak vrijedi $(\mathcal{G}_\sharp, V_m) \models_{SO} (\mathtt{REL} \wedge \mathtt{BOX\text{-}AT} \to \mathtt{POS})[\vec{s}]$, što ćemo sada i dokazati. Na skupu svih valuacija na okviru $\mathcal{G}$ definiramo binarnu relaciju $\prec$ ovako:

$$U \prec V \ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{za svaku propozicionalnu varijablu } p \\ \text{vrijedi } U(p) \subseteq V(p) \text{ i } V(p) \in A \end{cases}$$

Za valuaciju V kažemo da je *zatvorena* ako je za svaku varijablu p skup $V(p)$ zatvoren.
Lako je dokazati da za svaku valuaciju U vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\text{valuacija } U \text{ je zatvorena ako i samo ako } U = \bigcap_{U \prec V} V$$

Primjenom osnovnih svojstava zatvorenih skupova (vidi lemu 4.5) slijedi da je valuacija V_m zatvorena. Indukcijom po složenosti proizvoljne pozitivne modalne formule G može se dokazati (dosta je posla!) da za svaku zatvorenu valuaciju U vrijedi $U(G) = \bigcap_{U \prec V} V(G)$. Tada posebno $V_m(\psi) = \bigcap_{V_m \prec V} V(\psi)$.

Pretpostavimo da vrijedi $(\mathcal{G}_\sharp, V_m) \models_{SO} (\mathtt{REL} \wedge \mathtt{BOX\text{-}AT})[\vec{s}]$. Želimo dokazati da vrijedi $(\mathcal{G}_\sharp, V_m) \models_{SO} \mathtt{POS}[\vec{s}]$. (Primijetite da kada to dokažemo, tada iz $(*)$ slijedi tvrdnja teorema.) Neka je V proizvoljna dopustiva valuacija za koju vrijedi $V_m \prec V$. Iz definicije relacije $\prec$ imamo da je tada $V_m(p) \subseteq V(p)$, za svaku propozicionalnu varijablu p. Budući da formula $\mathtt{REL}$ ne sadrži varijable P_i, tada iz pretpostavke $(\mathcal{G}_\sharp, V_m) \models_{SO} (\mathtt{REL} \wedge \mathtt{BOX\text{-}AT})[\vec{s}]$ posebno slijedi $(\mathcal{G}_\sharp, V) \models_{SO} \mathtt{REL}[\vec{s}]$. Bili smo primijetili da je V_m najmanja valuacija za koju vrijedi $(\mathcal{G}_\sharp, V_m) \models_{SO} \mathtt{BOX\text{-}AT}[\vec{s}]$. Tada iz pretpostavke $V_m \prec V$ slijedi $(\mathcal{G}_\sharp, V) \models_{SO} \mathtt{BOX\text{-}AT}[\vec{s}]$. Time smo dobili da vrijedi $(\mathcal{G}_\sharp, V) \models_{SO} (\mathtt{REL} \wedge \mathtt{BOX\text{-}AT})[\vec{s}]$, za svaku dopustivu valuaciju V za koju vrijedi $V_m \prec V$. Iz početne pretpostavke $\mathcal{G} \Vdash F$ posebno slijedi da za svaku dopustivu valuaciju V vrijedi $(\mathcal{G}_\sharp, V) \models_{SO} (\mathtt{REL} \wedge \mathtt{BOX\text{-}AT} \to \mathtt{POS})[\vec{s}]$. Iz svega toga slijedi $(\mathcal{G}_\sharp, V) \models_{SO} \mathtt{POS}[\vec{s}]$. Budući da je formula $\mathtt{POS}$ standardna translacija modalne formule ψ, tada $(\mathcal{G}_\sharp, V) \models_{SO} \mathtt{POS}[\vec{s}]$ povlači da postoji svijet $s \in W$ tako da vrijedi $(\mathcal{G}_\sharp, V), s \Vdash \psi$. Tada očito $s \in V(\psi)$. Budući da je V proizvoljna dopustiva valuacija za koju vrijedi $V_m \prec V$, tada imamo $s \in \bigcap_{V_m \prec V} V(\psi)$. Bili smo već primijetili da je valuacija V_m zatvorena, a onda za pozitivnu formulu ψ vrijedi $V_m(\psi) = \bigcap_{V_m \prec V} V(\psi)$.

Sada $s \in \bigcap_{V_m \prec V} V(\psi)$ i $V_m(\psi) = \bigcap_{V_m \prec V} V(\psi)$ povlače $s \in V_m(\psi)$. Iz definicije formule $\mathtt{POS}$ slijedi $(\mathcal{G}_\sharp, V_m) \models_{SO} \mathtt{POS}[\vec{s}]$. Q.E.D.

Iz propozicije 4.12 i teorema 4.8 odmah slijedi sljedeći teorem.

Teorem 4.9 (Sahlqvistov teorem potpunosti)**.**
Svaka Sahlqvistova formula je kanonska.

Ponovimo još jednom zašto je prethodni rezultat jako važan:

a) Ako su $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ modalne formule, tada je za dokaz da je $\mathbf{K} \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ kanonska normalna modalna logika dovoljno dokazati da su formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ kanonske.

b) Svaka kanonska normalna modalna logika je adekvatna i jako potpuna u odnosu na neku klasu Kripkeovih okvira.

Napomena 4.5. Može se pokazati da je za svaku elementarnu klasu K pripadna normalna logika Λ_{K} kanonska ($\Lambda_{\mathsf{K}} = \{\varphi :$ za svaki okvir $\mathcal{F} \in \mathsf{K}$ vrijedi $\mathcal{F} \Vdash \varphi\}$.) Dugo se nije znalo vrijedi li obrat, tj. postoji li za svaku normalnu modalnu logiku Λ elementarna klasa Kripkeovih okvira K tako da vrijedi $\Lambda = \Lambda_{\mathsf{K}}$. Goldblatt, Hodkinson i Venema su u članku iz 2004. u Journal of Symbolic Logic dali protuprimjer koristeći pojam Erdösevog grafa.

Indeks