Analitičkogeometrijski dokaz Arhitine konstrukcije duplikacije kocke

Nina Ćurko

Dokažimo da je Arhita iz Tarenta (ca. 428.-350. pr. Kr.) svojom konstrukcijom presjeka polucilindra, polutorusa i konusa pronašao srednje geometrijske proporcionale između brida kocke duljine a i njegove dvostruke duljine $2a$. Zadane su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ takve da vrijedi $|\overline{AB}| = a$ i $|\overline{AC}| = 2a$. Nad promjerom $\overline{AC}$ konstruiran je polucilindar, rotacijom polukružnice nad tim promjerom oko izvodnice polucilindra s početkom u točki A konstruiran je polutorus, a rotacijom ΔACD oko pravca AC, gdje je točka D presjek tangente kroz točku C na osnovicu cilindra s pravcem AB, nastaje konus. Neka je još točka S presjek nastalih ploha, a točka M njena ortogonalna projekcija na ravninu baze cilindra. Tada vrijedi:

$$a : |\overline{AM}| = |\overline{AM}| : |\overline{AS}| = |\overline{AS}| : 2a,$$

to jest $|\overline{AM}| = a\sqrt[3]{2}$ je rješenje problema udvostručenja kocke brida a.

<u>Dokaz.</u> Neka je $A = (0,0,0)$ ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava, $C = (2a, 0,0)$, x-os je pravac AC i z-os okomita na ravninu polukružnice ABC. Neka je još $S = (x, y, z)$ uz pretpostavku $x \neq 0$, a budući da je M njena ortogonalna projekcija na xy ravninu zaključujemo: $M = (x, y, 0)$. Polucilindar u ravnini xy promjera $\overline{AC}$ ima jednadžbu $(x - a)^2 + y^2 = a^2$. Nakon što lijevu stranu jednadžbe razvijemo po kvadratu razlike, dobijemo konačnu jednadžbu polucilindra $x^2 + y^2 = 2ax$. Nadalje, na isti način promatrajući prirodu Arhitine konstrukcije zaključujemo da točke na polutorusu zadovoljavaju jednadžbu $x^2 + y^2 + z^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2}$ jer su i polumjer polukružnice koju rotiramo i udaljenost njezina središta od osi rotacije jednaki a, a točke na konusu zadovoljavaju $x^2 + y^2 + z^2 = 4x^2$. Dakle, dokaz se svodi na rješavanje sustava jednadžbi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2ax \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4x^2 \end{cases}$$

Budući da iz konstrukcije vrijedi $|\overline{AM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, uvrštavanjem u jednadžbu cilindra $x^2 + y^2 = 2ax$ dobivamo $|\overline{AM}|^2 = 2ax \Leftrightarrow |\overline{AM}| = \sqrt{2ax}$. Zaključujemo da nam je dovoljno izračunati prvu koordinatu presjeka kako bismo odredili duljinu dužine $\overline{AM}$. Izjednačavanjem desnih strana jednadžbi $x^2 + y^2 + z^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2}$ i $x^2 + y^2 + z^2 = 4x^2$ i uvrštavanjem $|\overline{AM}| = \sqrt{2ax}$ dolazimo do sljedećeg:

$$4x^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow 16x^4 = 4a^2 \cdot 2ax \Leftrightarrow 16x^3 = 8a^3 \Leftrightarrow \quad x = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$$

Uvrštavanjem $x = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}$ u $|\overline{AM}| = \sqrt{2ax}$ dobijemo i konačno rješenje:

$$|\overline{AM}| = \sqrt{2a \cdot \frac{a}{\sqrt[3]{2}}} = \sqrt{a^2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}} = a\sqrt[3]{2}$$

Srednje geometrijske proporcionale između a i $2a$ su $|\overline{AM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ i $|\overline{AS}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, a rješenje problema udvostručenja kocke brida a je duljina dužine $\overline{AM}$ koja iznosi $a\sqrt[3]{2}$ pa je zadovoljena i jednakost omjera $a : |\overline{AM}| = |\overline{AM}| : |\overline{AS}| = |\overline{AS}| : 2a$.

Reference:

Franka Miriam Brückler: Povijest matematike, 2026. **https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/skripta2026.pdf**
Carl B. Boyer: History of Analytic Geometry, Scripta Mathematica, 1956.