Baireov teorem o kategoriji

Ilja Gogić, 17. 5. 2024.

1 Osnove o metričkim prostorima

Definicija 1. *Neka je X neprazan skup.* ***Metrika*** *na X je funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

(M1) $d(x, y) \geq 0$ *za sve $x, y \in X$ (nenegativnost);*

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ *za sve $x, y \in X$ (simetričnost);*

(M3) $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako $x = y$ (strogost);*

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *za sve $x, y, z \in X$ (nejednakost trokuta).*

U tom slučaju za par (X, d) (ili samo za X ako se metrika d podrazumijeva) kažemo da je ***metrički prostor****.*

Primjer 2. Standardna metrika na skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ je dana s

$$d(x, y) := |x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Nadalje, svaki Euklidski n-dimenzionalni prostor $\mathbb{R}^n$ je metrički prostor uz metriku

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \qquad (\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n).$$

Za metriku d_2 kažemo da je **euklidska metrika** na $\mathbb{R}^n$.

Primjer 3. Općenitije, neka je X normiran prostor, tj. X je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ zajedno s funkcijom $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ (tzv. **norma** na X) koja koja zadovoljava sljedeća svojstva:

(N1) $\|x\| \geq 0$ za sve $x \in X$,

(N2) $\|x\| = 0$ ako i samo ako $x = 0$,

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ za sve $\alpha \in \mathbb{F}$ i $x \in X$,

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ za sve $x, y \in X$.

Tada X postaje metrički prostoru uz metriku

$$d(x, y) := \|x - y\| \qquad (x, y \in X).$$

Za tu metriku d kažemo da je **metrika inducirana iz norme** $\| \cdot \|$.

Primjer 4. Neka je X neprazan skup. Tada je funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definirana s

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{ako } x = y \\ 1 & \text{ako } x \neq y. \end{cases}$$

metrika na X. Za tu metriku kažemo da je **diskretna metrika** na X, a par (X, d) zovemo **diskretan metrički prostor**.

Napomena 5. Neka je Y neprazan podskup metričkog prostora (X, d). Tada restrikcija $d_Y := d|_{Y \times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}$ očito zadovoljava aksiome (M1)-(M4), pa je (Y, d_Y) također metrički prostor kojeg zovemo **potprostor** od (X, d). Udaljenost dviju točaka iz Y jednaka je bez obzira gledamo li na njih kao na točke iz Y ili X, pa ćemo i metriku d_Y jednostavno označavati s d.

Definicija 6. *Neka je X metrički prostor.*

(a) Neka su $x \in X$ $r > 0$. Za skup

$$K(x,r) := \{y \in X \ : \ d(x,y) < r\}$$

*kšemo da je **otvorena kugla** sa središtem u x i radijusom r. **Zatvorena kugla** sa središtem u x radijusa r je skup*

$$\overline{K}(x,r) := \{y \in X \ : \ d(x,y) \leq r\}.$$

*(b) Za skup $U \subseteq X$ kažemo da je **otvoren**, ako za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x,r) \subseteq U$.*

*(c) Za skup $F \subseteq X$ kažemo da je **zatvoren** ako je njegov komplement $F^c = X \setminus F$ otvoren.*

Primjer 7. (a) Svaka otvorena kugla $K(x,r)$ metričkog prostora X je otvoren skup. Analogno, svaka zatvorena kugla u X je zatvoren skup.

(b) Ako je $A = [0,1\rangle \subseteq \mathbb{R}$, tada A nije niti otvoren niti zatvoren podskup od $\mathbb{R}$.

(c) U diskretnom metričkom prostoru X je svaki podskup od X istovremeno otvoren i zatvoren.

Napomena 8. U svakom metričkom prostoru X vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) X i $\emptyset$ su otvoreni skupovi.

(b) Proizvoljne unije otvorenih skupova su otvoreni skupovi.

(c) Konačni presjeci otvorenih skupova su otvoreni skupvi.

Koristeći De Morganova pravila, dobivamo analogne tvrdnje i za zatvorene skupove:

(d) X i $\emptyset$ su zatvoreni skupovi.

(e) Proizvoljni presjeci zatvorenih skupova su zatvoreni skupovi.

(f) Konačne unije zatvorenih skupova su zatvoreni skupovi.

Definicija 9. *Za prozivoljan podskup A metričkog prostora X definiramo sljedeće skupove:*

(a) $\operatorname{Int} A := \bigcup\{U \ : \ U \subseteq A,\ U \text{ otvoren u } X\}$.

(b) $\overline{A} := \bigcap\{F \ : \ F \supseteq A,\ F \text{ zatvoren u } X\}$.

(c) $\partial A := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.

Za skupove $\operatorname{Int} A$*,* $\overline{A}$ *i* ∂A *redom kažemo da su **interior**, **zatvarač** i **rub** skupa A.*

Napomena 10. (a) $\operatorname{Int} A$ je otvoren skup i to je najveći otvoren skup u X koji je sadržan u skupu A. Skup A je otvoren ako i samo ako je $\operatorname{Int} A = A$.

(b) $\overline{A}$ je zatvoren skup i to je najmanji zatvoren skup u X koji sadrži skup A. Skup A je zatvoren ako i samo ako je $\overline{A} = A$. Nadalje, za $x \in X$ imamo $x \in \overline{A}$ ako i samo ako za svaku okolinu U od x vrijedi $U \cap A \neq \emptyset$.

(c) Operatori interora i zatvarača su međusobno dualni, u smislu da je $\operatorname{Int} A = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$ i $\overline{A} = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$.

(d) ∂A je zavoren skup u A i imamo $\overline{A} = \operatorname{Int} A \cup \partial A$, $\operatorname{Int} A \cap \partial A = \emptyset$, pa je $\partial A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$

Primjer 11. (a) Za $A = \langle 0,1] \subseteq \mathbb{R}$ imamo $\operatorname{Int} A = \langle 0,1\rangle$, $\overline{A} = [0,1]$ i $\partial A = \{0,1\}$.

(b) Za otvorenu kuglu $A = K(\mathbf{x}, r)$ u $\mathbb{R}^n$ imamo $\operatorname{Int} A = K(\mathbf{x}, r) = A$, $\overline{A} = \overline{K}(\mathbf{x}, r)$ i $\partial A = K(\mathbf{x}, r) \setminus K(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \ : d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r\}$ (sfera u $\mathbb{R}^n$ sa središtem u točki $\mathbf{x}$ radijusa r).

(c) Za $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ imamo $\operatorname{Int} A = \emptyset$, $\overline{A} = \mathbb{R}$ i $\partial A = \mathbb{R}$.

(d) Neka je $X = [0,2\rangle$ kao potprostor od $\mathbb{R}$. Ako je $A = [0,1\rangle \subseteq X$, tada je $\operatorname{Int}_X A = [0,1\rangle$ (primijetimo da je A zapravo otvorena kugla $K_X(0,1)$), $\overline{A}_X = [0,1]$ i $\partial_X A = \{1\}$.

(e) Za $A = \{(x,0) \ : \ -1 < x < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ imamo $\operatorname{Int} A = \emptyset$, $\overline{A} = \{(x,0) \ : \ -1 \leq x \leq 1\}$ i $\partial A = \overline{A}$.

(f) U metričkom prostoru X općenito ne vrijedi $\overline{K(x,r)} = \overline{K}(x,r)$. Naime, uvijek je $\overline{K(x,r)} \subseteq \overline{K}(x,r)$. S druge strane, ako X diskretan metrički prostor s barem dvije različite točke, tada je $\{x\} = \overline{K(x,1)} \subsetneq \overline{K}(x,1) = X$ za sve $x \in X$.

Definicija 12. *Neka je X metrički prostor i $x_0 \in X$ neka točka.* ***Okolina točke*** *x_0 je svaki podskup A od X takav da vrijedi $x_0 \in \operatorname{Int} A$.*

Definicija 13. *Neka je A podskup metričkog prostora X.*

(a) Za točku $x_0 \in X$ kažemo da je ***gomilište skupa*** *A ako svaka okolina U točke x_0 sadrži barem jednu točku iz A različitu od x_0, tj. $A \cap (U \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$. Skup svih gomilišta skupa A označavamo s A^d i zovemo ga* ***derivat*** *od A.*

(b) Za svaku točku $x_0 \in A \setminus A^d$ (ako takva postoji) kažemo da je ***izolirana točka*** *skupa A.*

(c) Za A kažemo da je ***savršen skup*** *u X ako je $A^d = A$. Ako je $X^d = X$, tada za X kažemo da je* ***savršen prostor****.*

(d) Za A kažemo da je ***diskretan skup*** *u X ako za sve $x \in A$ postoji $\delta > 0$ (koji ovisi o x) takav da je $d(x,y) > \delta$ za sve $x \in A$. Ako je X diskretan (kao podskup samog sebe), tada za X kažemo da je* ***topološki diskretan prostor****. U tom slučaju je svaki podskup od X otvoren u X.*

Napomena 14. Ako je A podskup metričkog prostora X, tada je A^d zatvoren podskup od X i vrijedi $\overline{A} = A \cup A^d$. Posebno, svaki savršen podskup od X (ako takav postoji) je zatvoren u X.

Primjer 15. (a) Za $A = \langle 0,1] \cup \{2\} \subseteq \mathbb{R}$ imamo $A^d = [0,1]$. Dakle, točka 2 je izolirana točka skupa A.

(b) Za $A = \{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ imamo $A^d = \{0\}$.

(c) Za $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ imamo $A^d = \mathbb{R}$.

(d) $\mathbb{R}$ je savršen prostor. Nadalje, svaki segment u $\mathbb{R}$ je savršen podskup od $\mathbb{R}$.

(e) Svaki konačan podskup od $\mathbb{R}$ je diskretan. Također, skupovi $\mathbb{Z}$ i $\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ su diskretni podskupovi od $\mathbb{R}$.

Definicija 16. *Neka je X metrički prostor. Za niz (x_n) u X kažemo da je:*

(a) ***konvergentan****, ako postoji točka $x_0 \in X$ takva da za svako $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $d(x_0, x_n) < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$. U tom slučaju za točku x_0 kažemo da je* ***limes*** *niza (x_n) i pišemo $\lim_n x_n := x_0$.*

(b) ***Cauchyjev****, ako za svako $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ za sve $m, n \geq n_0$.*

Napomena 17. (a) Konvergentni nizovi u metričkim prostorima imaju jedinstven limes.

(b) Svaki konvergentan niz u metričkom prostoru je ujedno i Cauchyjev niz. Obrat općenito ne vrijedi. Npr., ako je $X = \langle 0,1] \subseteq \mathbb{R}$, tada je $x_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ Cauchyjev niz u X koji ne konvergira u X.

Definicija 18. *Za metrički prostor X kažemo da je* ***potpun****, ako je svaki Cauchyjev niz u X konvergentan u X. Za potpun normiran prostor kažemo da je* ***Banachov****.*

Napomena 19. (a) Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ sa standardnom normom je Banachov prostor.

(b) Ako je X potpun metrički prostor, tada je podskup A od X potpun (s obzirom na metriku d_A) ako i samo ako je A zatvoren u X.

Definicija 20. *Neka je A podskup metričkog prostora X.*

(a) ***Udaljenost točke*** *$x \in X$* ***do skupa*** *A definira se kao broj*

$$d(x,A) := \inf\{d(x,y) \ : \ y \in A\}.$$

(b) ***Dijametar skupa*** *A je broj*

$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(x,y) \ : \ x,y \in A\}.$$

Ako je $\operatorname{diam} A < \infty$*, tada kažemo da je skup A* ***omeđen****.*

Napomena 21. Za svaki podskup A metričkog prostora X vrijedi

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \{x \in X \ : \ d(x,A) = 0\} \\ &= \left\{\lim_n x_n \ : \ (x_n) \text{ niz u } A \text{ koji konvergira u } X\right\}. \end{aligned}$$

Zaista, za $x \in X$ imamo $d(x,A) = 0$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $a \in A$ takav da je $d(x,a) < \varepsilon$, odnosno ako i samo ako $K(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Prema Napomeni 10 (b)to je ekvivalentno s $x \in \overline{A}$.

Nadalje, ako je $d(x,A) = 0$, onda za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $a_n \in A$ takav da je $d(a_n,x) < \frac{1}{n}$. Dakle, (a_n) je niz u A i $a_n \to x$. Ako je pak $(a_n)_n$ niz u A koji konvergira prema nekom $x \in X$, onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(a_n,x) < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$. Posebno, $d(x,A) \leq d(x,a_{n_0}) < \varepsilon$. Dakle, $d(x,A) = 0$.

Definicija 22. *Neka su X i Y metrički prostori. Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je* ***neprekidna u točki*** *$x_0 \in X$ ako za svaku okolinu V točke $f(x_0)$ postoji okolina U točke x_0 takva da je $f(U) \subseteq V$. Za funkciju f kažemo da je* ***neprekidna na*** *X (ili samo* ***neprekidna****) ako je f neprekidna u svim točkama iz X.*

Napomena 23. Ako su (X,d_X) i (Y,d_Y) metrički prostori, tada je funkcija $f : X \to Y$ neprekidna u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in X)\,(d_X(x,x_0) < \delta \implies d_Y(f(x),f(x_0)) < \varepsilon).$$

Ubuduće ćemo umjesto d_X i d_Y pisati samo d, te ćemo iz konteksta podrazumijevati o kojim je metrikama točno riječ.

Teorem 24. *Neka su X i Y metrički prostori. Za funkciju $f : X \to Y$ su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) *f je neprekidna na X.*

(b) *Za svaki otvoren podskup V od Y je $f^{-1}(V)$ otvoren podskup od X.*

(c) *Za svaki podskup $A \subseteq X$ vrijedi $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

(d) *Za svaki zatvoren podskup C od Y je $f^{-1}(C)$ zatvoren podskup od X.*

(e) *Za svaki konvergentan niz (x_n) u X vrijedi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$.*

Dokaz. (a) $\implies$ (b). Neka je $V \subseteq Y$ otvoren skup. Ako je $x \in f^{-1}(V)$, tako da je $f(x) \in V$, iz neprekidnosti od f u x dobivamo otvorenu okolinu $U_x \subseteq X$ od x takvu da je $f(U_x) \subseteq V$. Dakle, $x \in U_x \subseteq f^{-1}(V)$ pa je $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$. Zaključujemo da je skup $f^{-1}(V)$ otvoren kao unija otvorenih skupova.

(b) $\implies$ (c). Za $A \subseteq X$ stavimo $B := \overline{f(A)}$. Jer je B zatvoren u Y, prema pretpostavci je skup $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ otvoren u X. Stoga je $f^{-1}(B)$ je zatvoren u X. Jer je $A \subseteq f^{-1}(B)$, slijedi $\overline{A} \subseteq \overline{f^{-1}(B)} = f^{-1}(B)$, odnosno $f(\overline{A}) \subseteq B = \overline{f(A)}$.

(c) $\implies$ (d). Neka je C zatvoren podskup od Y. Prema pretpostavci za $A := f^{-1}(C)$ dobivamo $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{C} = C$. Dakle, $\overline{A} \subseteq f^{-1}(C) = A$. Kako je trivijalno $A \subseteq \overline{A}$, zaključujemo $A = \overline{A}$, odnosno $A = f^{-1}(C)$ je zatvoren podskup od X.

(d) $\implies$ (a). Neka je $x_0 \in X$ i V otvorena okolina od $f(x_0)$. Jer je V^c zatvoren u Y, $f^{-1}(V^c) = (f^{-1}(V))^c$ je zatvoren u X. Stoga je $U := f^{-1}(V)$ otvorena okolina od x_0 i $f(U) \subseteq V$. Dakle, f je neprekidna u x_0.

(b) $\implies$ (e). Neka je (x_n) konvergentan niz u X s limesom x_0. Ako je V otvorena okolina od $f(x_0)$, tada je prema pretpostavci $f^{-1}(V)$ otvorena okolina točke x_0. Jer $x_n \to x_0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in f^{-1}(V)$ za sve $n \geq n_0$, odnosno $f(x_n) \in V$ za sve $n \geq n_0$. Zbog proizvoljnosti od V zaključujemo $f(x_n) \to f(x_0)$.

(e) $\implies$ (c). Neka je $A \subseteq X$. Ako je $y_0 \in f(\overline{A})$, tada postoji $x_0 \in \overline{A}$ takav da je $y_0 = f(x_0)$. Prema Napomeni 21 postoji niz (x_n) u A takav da $x_n \to x_0$. Tada je, prema pretpostavci, $(f(x_n))$ niz u $f(A)$ takav da $f(x_n) \to f(x_0)$. Posebno, svaka okolina od $f(x_0)$ siječe skup $f(A)$, pa je $y_0 = f(x_0) \in \overline{f(A)}$. Dakle, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. ☐

Uz neprekidne funkcije na metričkim prostorima usko su vezana i sljedeća dva pojma.

Definicija 25. *Neka su X i Y metrički prostori i $f : X \to Y$ funkcija.*

- *Kažemo da je f* ***uniformno neprekidna*** *ako vrijedi*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x, y \in X)\,(d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

- *Kažemo da je f* ***Lipschitzova*** *(ili* ***Lipschitz-neprekidna****) ako postoji konstanta $L \geq 0$ takva da vrijedi*

$$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y) \qquad \forall x, y \in X. \tag{1}$$

Napomena 26. Očito je svaka uniformno neprekidna funkcija neprekidna. Također, svaka Lipschitzova funkcija je uniformno neprekidna. Naime, neka je L neka konstanta kao u (1). Možemo pretpostaviti da je $L > 0$. Za dani $\varepsilon > 0$ stavimo $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$. Tada za sve $x, y \in X$ takve da je $d(x, y) < \delta$ imamo

$$d(f(x), f(y)) \leq L \cdot d(x, y) < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Dakle, za funkcije između metričkih prostora vrijede sljedeće implikacije:

$$\text{Lipschitzovost} \implies \text{uniformna neprekidnost} \implies \text{neprekidnost.}$$

Obrati općenito ne vrijede. Npr. neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije definirane s $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sqrt{|x|}$. Tada je f neprekidna, ali nije uniformno neprekidna, dok je g uniformno neprekidna, ali nije Lipschitzova.

Primjer 27. Ako je A podskup metričkog prostora X, tada je funkcija $x \mapsto d(x, A)$ Lipschitzova na X. Zaista, neka su $x, y \in X$ proizvoljne točke. Tada za svako $a \in A$ imamo $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$, odakle slijedi $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$, odnosno $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Zamijenom uloga točaka x i y dobivamo i $d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x) = d(x, y)$. Dakle,

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \qquad \text{za sve } x, y \in X.$$

2 Baireov teorem o kategoriji

Definicija 28. *Za podskup A metričkog prostora X kažemo da je:*

(a) ***gust*** *u X, ako je $\overline{A} = X$;*

(b) ***nigdje gust*** *u X ako je $X \setminus \overline{A}$ gust u X;*

(c) ***prve kategorije*** *u X, ako se A može prikazati kao prebrojiva unija nigdje gustih skupova;*

(d) ***druge kategorije*** *u X, ako A nije prve kategorije;*

(e) ***rezidualan*** *u X, ako je njegov komplement A^c skup prve kategorije u X.*

Napomena 29. Podskup A metričkog prostora X je:

(a) nigdje gust u X ako i samo ako je $\operatorname{Int}(\overline{A}) = \emptyset$;

(b) rezidualan u X ako i samo ako se A može napisati kao prebojiv presjek skupova s gustim interiorima.

Primjer 30. (a) Skupovi $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ su gusti u $\mathbb{R}$.

(b) Rub svakog zatvorenog skupa u metričkom prostoru je nigdje gust skup.

(c) Svaki diskretan podskup savršenog metričkog prostora je nigdje gust skup. Odavde slijedi da su svi prebrojivi skupovi u savršenom metričkom prostoru skupovi prve kategorije. Posebno, skup $\mathbb{Q}$ je skup prve kategorije u $\mathbb{R}$. To ujedno pokazuje da prebrojiva unija nigdje gustih skupova može biti gust skup.

(d) Svaki euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ je druge kategorije. To je podsljedica Baireovog teorema o kategoriji (teorem 34).

(e) Skup $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je rezidualan u $\mathbb{R}$.

Sljedeći primjer istovremeno pokazuje da nigdje gusti podskupovi mogu biti savršeni i neprebrojivi:

Primjer 31. Neka je C tzv. **Cantorov skup**. Njega možemo dobiti na sljedeći način: Uzmimo segment $[0,1]$ u $\mathbb{R}$, te iz njega izbacimo njegovu otvorenu srednju trećinu (tj. interval $\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$). Ostatak nazovimo s C_1; dakle $C_1 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Zatim, iz svakog od ta sva segmenta iz C_1 izbacimo njihove otvorene srednje trećine i ostatak nazovimo s C_2. Postupak nastavimo induktivno. Ako je C_n unija 2^n segmenata duljine 3^{-n} koji ostaju u n-tom koraku, tada je $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Očito je C zatvoren podskup od $\mathbb{R}$ (kao presjek zatvorenih skupova C_n). Također, budući da svaki skup C_n ne sadrži otvoreni interval duljine veće od 3^{-n}, slijedi da C ne može sadržavati niti jedan otvoreni interval. Dakle, C je nigdje gust skup u $\mathbb{R}$.

Pokažimo sada da je C savršen skup. Neka je $x \in C$ proizvoljna točka. Tada je $x \in C_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Posebno, x leži u nekom od 2^n segmenata od C_n duljine 3^{-n}. Neka je x_n bilo koja rubna točka tog segmenta koja je različita od x, tako da je $0 < |x - x_n| < 3^{-n}$. Nadalje, budući da sve rubne točke segmenata od C_n leže u C, imamo $x_n \in C$. Na taj način dolazimo do niza točaka (x_n) u C, čije su sve vrijednosti različite od x i koji konvergira prema x. Odatle slijedi da je C savršen prostor.

Dokažimo i da je C kardinalnosti $\mathfrak{c}$. To možemo najbrže vidjeti ako primijetimo da se Cantorov skup C sastoji točno od onih brojeva x iz segmenta $[0,1]$ čiji prikaz u bazi 3 ne sadrži znamenku 1, tj. $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, s $a_n \in \{0, 2\}$. Budući da je svaki takav prikaz jedinstven, preslikavanje $(a_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ definira bijekciju sa skupa $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ svih nizova sastavljenih od brojeva 0 i 2 na skup C. Dakle, $\operatorname{card}(C) = \operatorname{card}(\{0,2\}^{\mathbb{N}}) = \mathfrak{c}$.

Definicija 32. *Za metrički prostor X kažemo da je* ***Baireov prostor*** *ako je svaki neprazan otvoren skup u X skup druge kategorije.*

Propozicija 33. *Za topološki prostor X su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(a) X je Baireov prostor.

(b) Ako je $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ niz otvorenih gustih podskupova od X, tada je njihov presjek $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k$ gust u X.

(c) Svaki rezidualan skup u X je gust u X.

(d) Ako je $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ niz zatvorenih podskupova od X takav da je $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$, tada je otvoren skup $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Int} F_k$ gust u X.

Dokaz. (a) $\Longrightarrow$ (b). Pretpostavimo da je X Baireov prostor, ali da postoji prebrojiva familija otvorenih gustih podskupova $(A_k)_k$ u X čiji presjek $A := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ nije gust u X. Tada postoji neprazan otvoren podskup U u X takav da je $A \cap U = \emptyset$. Odavde slijedi da je $X = (A \cap U)^c = A^c \cup U^c$, pa je onda

$$U = X \cap U = A^c \cap U = \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \right)^c \cap U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k^c \cap U).$$

Budući da je svaki skup $A_k^c \cap U$ nigdje gust, slijedi da je U prve kategorije u X. No to je jedino moguće ako je $U = \emptyset$, što je kontradikcija s izborom skupa U.

(b) $\Longrightarrow$ (c). Neka je $A \subseteq X$ rezidualan skup. Prema napomeni 29 imamo $A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}}^{\infty} A_k$, za neki niz $(A_k)_k$ podskupova od X sa svojstvom da su svi $\operatorname{Int} A_k$ gusti u X. Prema pretpostavci je presjek $C := \bigcap_{k \in \mathbb{N}}^{\infty} \operatorname{Int} A_k$ gust u X. Jer je $C \subseteq A$, zaključujemo i da je A gust u X.

(c) $\Longrightarrow$ (d). Neka je $(F_k)_k$ niz zatvorenih skupova u X takav da je $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k = X$. Trebamo dokazati da je skup $U := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Int} F_k$ gust u X. Zaista, jer su svi skupovi ∂F_k nigdje gusti i zatvoreni u X, njihovi komplementi $(\partial F_k)^c$ su otvoreni i gusti X. Slijedi da je skup $O := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (\partial F_k)^c$ rezidualan pa je prema pretpostavci gust u X. Iz

$$U^c = X \setminus U = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k \right) \setminus \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Int} F_k \right) \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (F_k \setminus \operatorname{Int} F_k) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \partial F_k = O^c$$

vidimo da je $O \subseteq U$. Jer je O gust u X, zaključujemo da je i U gust u X, čime je tvrdnja dokazana.

(d) $\Longrightarrow$ (a). Pretpostavimo da vrijedi (iv), ali da X nije Baireov prostor. Tada postoji neprazan otvoren skup U u X koji je prve kategorije. Neka je $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ niz nigdje gustih skupova u X takvih da je $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Tada je

$$X = U^c \cup \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \cdots$$

prebrojiva unija zatvorenih skupova. Budući da je $\operatorname{Int}\overline{A_k} = \emptyset$ za sve $k \in \mathbb{N}$, iz pretpostavke slijedi da je

$$\operatorname{Int}(U^c) = \operatorname{Int}(U^c) \cup \operatorname{Int}\overline{A_1} \cup \operatorname{Int}\overline{A_2} \cup \operatorname{Int}\overline{A_3} \cup \cdots$$

gust skup u X. Kako je $\operatorname{Int}(U^c) \subseteq U^c$, slijedi da je i U^c gust skup u X. Posebno, $U \cap U^c \neq \emptyset$, što je nemoguće. Dakle, X je Baireov prostor. □

Sada napokon dolazimo osnovnog rezultata ovog predavanja:

Teorem 34 (**Baireov teorem o kategoriji [BTK]**). *Svaki potpun metrički prostor X je Baireov prostor.*

Dokaz. Neka je (U_n) proizvoljan niz gustih otvorenih podskupova od X. Prema propoziciji 33 i napomeni 29 dovoljno je dokazati da je njihov presjek $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ gust u X. Drugim riječima, za proizvoljne $x \in X$ i $r > 0$ trebamo provjeriti da je $K(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

Budući da je U_1 gust otvoren podskup od X, postoje $x_1 \in X$ i $0 < r_1 \leq 1$ takvi da vrijedi $\overline{K}(x_1, r_1) \subseteq K(x,r) \cap U_1$. Slično, budući da je U_2 gust otvoren podskup od X, postoje $x_2 \in X$ i $0 < r_2 < \frac{1}{2}$ takvi da je $\overline{K}(x_2, r_2) \subseteq K(x_1, r_1) \cap U_2$. Koristeći indukciju, dolazimo do niza (x_n) u X i niza (r_n) realnih brojeva, za koje vrijedi

$$0 < r_n \leq \frac{1}{n} \qquad \text{i} \qquad \overline{K}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq K(x_n, r_n) \cap U_n \qquad \text{za sve } n \in \mathbb{N}.$$

Tvrdimo da je (x_n) Cauchyjev niz. Zaista, iz

$$x_m \in \overline{K}(x_m, r_m) \subseteq \overline{K}(x_n, r_n) \qquad \text{za sve } m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n, \tag{2}$$

slijedi $d(x_m, x_n) \leq r_n \leq \frac{1}{n}$. Budući da je prostor X potpun, postoji $x_0 := \lim_n x_n \in X$. Iz (2) također zaključujemo da je $x_0 \in \overline{K}(x_n, r_n) \subseteq U_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle,

$$x_0 \in \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \cap K(x,r) = A \cap K(x,r),$$

pa posebno $A \cap K(x,r) \neq \emptyset$. □

Napomena 35. U raznim matematičkim disciplinama za svojstva koja vrijede na "tipičnim", odnosno na "gotovo svim", primjerima smatramo da su **generička svojstva**. Tako se npr. u teoriji mjere pod generičkim svojstvima smatraju ona svojstva koja vrijede gotovo svuda (tj. na komplementima skupova mjere 0), dok se u teoriji potpunih metričkih prostora pod generičkima svojstvima smatraju ona svojstva koja vrijede na rezidualnim skupovima. Preciznije, generički element potpunog metričkog prostora X ima svojstvo P ako je skup $\{x \in X : P(x)\}$ rezidualan u X. Odgovarajući dualan pojam generičkom svojstvu je **zanemarivo svojstvo**. Dakle, u kontekstu potpunih metričkih prostora, zanemariva svojstva su ona svojstva koja vrijede samo na skupovima prve kategorije. Kao što familija skupova mjere nula čini σ-ideal, tako i familija $\mathcal{F}$ svih skupova prve kategorije u metričkom prostoru čini σ-ideal. Drugim riječima, vrijedi:

(a) $\emptyset \in \mathcal{F}$;

(b) ako je $A \in \mathcal{F}$ i $B \subseteq A$, tada je i $B \in \mathcal{F}$;

(c) ako je (A_n) niz skupova u $\mathcal{F}$, tada je i $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Sljedeći primjer pokazuje da generička svojstva u jednom smislu mogu biti zanemariva u drugom smislu:

Primjer 36. Poredajmo sve racionalne brojeve u niz (q_n). Za sve $m, n \in \mathbb{N}$ stavimo

$$r_{m,n} := \frac{1}{2^{m+n}} \qquad \text{i} \qquad R_{m,n} := \langle q_n - r_{m,n}, q_n + r_{m,n} \rangle.$$

Tada je

$$R := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_{m,n}$$

rezidualan skup (kao prebrojv presjek otvorenih gustih skupova $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_{m,n}$). S druge strane, skup R je Lebesgueove mjere 0. Zaista, budući da je Lebesgueova mjera (kao i svaka mjera) neprekidna odozgo i subaditivna, dobivamo

$$0 \leq \lambda(R) = \lim_{m\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_{m,n}\right) \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(R_{m,n}) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^{m+n}} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2^{m-1}} = 0,$$

pa je $\lambda(R) = 0$.

3 Neke posljedice Baireovog teorema o kategoriji

Krećemo sa sljedećom jednostavnom posljedicom od BTK:

Propozicija 37. *Svaki potpun savršen metrički prostor je neprebrojiv.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji potpun savršen metrički prostor X koji je prebrojiv. Ako je $\sigma : \mathbb{N} \to A$ neka bijekcija, tada imamo Tada je $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{f(n)\}$. No to je u izravnoj kontradikciji s BTK, budući da je svaki jednočlan skup u savršenom metričkom prostoru nigdje gust. $\square$

Napomena 38. Primijetimo da nam propozicija 37 daje alternativni dokaz poznatih činjenica da je svaki pravi interval u $\mathbb{R}$ neprebrojiv, kao i da je Cantorov skup neprebrojiv (primjer 31).

Promotrimo sada sljedeći problem. Za danu funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ označimo s $C(f)$ skup točaka u kojima je f neprekidna. Što možemo reći o slici preslikavanja

$$\Phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), \qquad \Phi : f \mapsto C(f)?$$

Drugim riječima, koji podskupovi od $\mathbb{R}$ se mogu javiti kao skupovi neprekidnosti neke funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Kao što znamo, **Dirichletova funkcija**

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{ako je } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ima prekid u svakoj točki, pa je $\emptyset \in \operatorname{Im}\Phi$. Također, nije teško vidjeti da za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu s

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ako je } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \text{ i } \mathrm{M}(p,q) = 1, \\ 0, & \text{ako je } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(tzv. **Thomaeova** ili **popcorn funkcija**) vrijedi $C(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tako da je i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \operatorname{Im}\Phi$. Sada je prirodno pitati se je li i $\mathbb{Q} \in \operatorname{Im}\Phi$? Kako bismo dali odgovor na to pitanje, najprije uvedimo sljedeće pojmove:

Definicija 39. *Za podskup A metričkog prostora X kažemo da je:*

*(a) F_σ**-skup**, ako se A može napisati kao prebrojiva unija zatvorenih skupova.*

*(b) G_δ**-skup**, ako se A može napisati kao prebrojiv presjek otvorenih skupova.*

Napomena 40. Neka je X metrički prostor.

(a) $A \subseteq X$ je F_σ-skup ako i samo ako je njegov komplement A^c G_δ-skup.

(b) Svaki zatvoren podskup od X je G_δ-skup. Zaista, ako je $A \subseteq X$ zatvoren, tada prema napomeni 21 imamo

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left\{ x \in X \ : \ d(x, A) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Budući da je funkcija $x \mapsto d(x, A)$ neprekidna na X (primjer 27), svaki skup oblika $\{x \in X \ : \ d(x, A) < \alpha\}$ $(\alpha > 0)$ je otvoren u X.

(c) Iz (a) i (b) slijedi da je svaki otvoren podskup od X F_σ-skup.

(d) Familja F_σ-skupova je zatvorena s obzirom na formiranje prebrojivih unija i konačnih presjeka. Analogno, familija G_δ-skupova je zatvorena s obzirom na formiranje prebrojivih presjeka i konačnih unija.

(e) Svaki F_σ-skup A u X je ili prve kategorije ili ima neprazan interior. Zaista, neka je $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, gdje su F_n zatvoreni podskupovi od X. Ako svi ti skupovi F_n imaju prazan interior, tada je A prve kategorije. S druge strane, ako barem jedan of F_n-ova ima neprazan interior, onda i A ima neprazan interior.

(f) Svaki gust G_δ-skup u X je rezidualan. Posebno, ako je X Baireov prostor, onda je prebrojiv presjek gustih G_δ-skupova u X gust G_δ-skup (vidjeti propoziciju 33).

Neka je sada $X = \mathbb{R}$. Tada je $\mathbb{Q}$ (kao i svaki prebrojiv podskup od $\mathbb{R}$) F_σ-skup. Odavde odmah zaključujemo da je $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ G_δ-skup. Obrat ne vrijedi:

Propozicija 41. *$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nije F_σ-skup, pa onda i $\mathbb{Q}$ nije G_δ-skup.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ F_σ-skup. Kako je $\operatorname{Int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$ ($\mathbb{Q}$ je gust u $\mathbb{R}$), prema (e) djelu napomene 40, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je skup prve kategorije. Kako je $\mathbb{Q}$ skup prve kategorije, slijedi da je i $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ skup prve kategorije. No to je u kontradikciji s BTK. □

Uvedimo sljedeću kvantitativnu mjeru (ne)prekidnosti neke funkcije:

Definicija 42. *Neka je $f : X \to Y$ funkcija između metričkih prostora X i Y. Za svaki podskup $S \subseteq X$ definiramo* ***oscilaciju od f na S*** *s*

$$\omega_f(S) := \operatorname{diam}(f(S)) = \sup\{d(f(x), f(x')) \ : x, x' \in S\}.$$

Tada za svaku točku $x \in X$ definiramo ***oscilacju od f u x*** *s*

$$\omega_f(x) := \inf_{\varepsilon > 0} \omega_f(K(x, \varepsilon)).$$

Napomena 43. Primijetimo da je f neprekidna u točki $x_0 \in X$ ako i samo ako je $\omega_f(x_0) = 0$.

Lema 44. *Funkcija $\omega_f : X \to [0, +\infty]$, $\omega_f : x \mapsto \omega_f(x)$ je odozgo poluneprekidna. Drugim riječima, za sve $\alpha > 0$, skup $\{x \in X \ : \ \omega_f(x) < \alpha\}$ je otvoren u X.*

Dokaz. Neka su $\alpha > 0$ i $x_0 \in X$ takvi da je $\omega_f(x_0) < \alpha$. Prema definiciji od $\omega_f(x_0)$, postoji $\varepsilon > 0$ takav da je

$$\omega_f(K(x, \varepsilon)) = \sup\{d(f(x), f(x')) \ : \ x, x' \in K(x_0, \varepsilon)\} < \alpha.$$

Uzmimo sada proizvoljnu točku $x_1 \in K(x_0, \varepsilon)$ i izaberimo $\delta > 0$ takav da je $K(x_1, \delta) \subseteq K(x_0, \varepsilon)$ (npr. $\delta = \varepsilon - d_X(x_0, x_1)$). Tada je

$$\begin{aligned} \omega_f(x_1) &\leq \omega_f(K(x_1, \delta)) = \sup\{d(f(x), f(x')) \ : \ x, x' \in K(x_1, \delta)\} \\ &\leq \sup\{d(f(x), f(x')) \ : \ x, x' \in K(x_0, \varepsilon)\} < \alpha. \end{aligned}$$

□

Propozicija 45. *Neka je $f : X \to Y$ funkcija između metričkih prostora X i Y. Tada vrijedi*

(a) Skup svih točaka neprekidnosti od f G_δ-skup.

(b) Skup svih točaka u kojima f ima prekid je F_σ-skup.

Dokaz. Dovoljno je dokazati samo jednu tvrdnju, pa npr. dokažimo (a). Kao i prije, označimo s $C(f)$ skup svih točaka neprekidnosti of f. Tada je

$$C(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left\{x \in X \ : \ \omega_f(x) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Prema lemi 44, svi skupovi koji nastupaju u gornjem presjeku su otvoreni. Dakle, C je G_δ-skup. □

Kao direktnu posljedicu propozicija 41 i 45 dobivamo:

Korolar 46. *Ne postoji funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja je neprekidna u svim racionalnim brojevima i koja ima prekid u svim iracionalnim brojevima.*

Većina neprekidnih realnih funkcija realne varijable koje smo susreli tokom studija su bile ili svugdje derivabilne, ili u najgorem slučaju nisu bile derivabilne u konačno ili prebrojivo mnogo točaka (kao npr. funkcija $f(x) = |x|$). S druge strane, postoje neprekidne funkcije koje nisu nigdje derivabilne. Prvi primjer takve funkcije f je našao njemački matematičar Karl Weierstrass 1872. godine. Ona je originalno je definirana s

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{3}$$

gdje je $0 < a < 1$, b neparan prirodan broj i $ab > 1 + 3\pi/2$. Funkcija (3) je u literaturi poznata pod imenom **Weierstrassova funkcija**. Sada se možemo pitati koliko su derivabilne funkcije na $\mathbb{R}$ (ili na nekom intervalu u $\mathbb{R}$) zastupljene unutar svih neprekidnih funkcija (vidjeti napomenu 35). Odgovor na to pitanje nam se na prvi pogled može činiti iznenađujuć; naime vrijedi:

Teorem 47. *Generička neprekidna funkcija* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *nije nigdje derivabilna. Drugim riječima, skup svih neprekidnih realnih funkcija na* $[0,1]$ *koje nisu nigdje derivabilne čine rezidualan skup u prostoru svih neprekidnih realnih funkcija na* $[0,1]$.

Prije nego li dokažemo teorem 47, prisjetimo se da skup svih neprekidnih realnih funkcija na segmentu $[a,b]$ obično označavamo s $C([a,b])$. Skup $C([a,b])$ ima prirodnu strukturu realnog normiranog prostora uz operacije po točkama

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \text{i} \qquad (\alpha f)(x) := \alpha f(x) \qquad (f,g \in C([0,1]),\ \alpha \in \mathbb{R},\ x \in [a,b]),$$

te normu

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| \ : \ x \in [a,b]\}.$$

Norma $\|\cdot\|_\infty$ se obično zove **uniformna norma** (ili **max-norma**). Naime, konvergencija s obzirom na normu $\|\cdot\|_\infty$ se podudara sa standardnom uniformnom konvergencijom, tj.

$$\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall x \in [a,b])(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Propozicija 48. $C([a,b])$ *je s obzirom na uniformnu normu Banachov prostor.*

U dokazu propozicije 48 koristit ćemo sljedeću jednostavnu činjenicu:

Propozicija 49. *Neka je* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ *niz funkcija koji uniformno konvergira prema funkciji* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Ako su sve funkcije* f_n *neprekidne na* $[a,b]$, *tada je i funkcija* f *neprekidna na* $[a,b]$.

Dokaz. Trebamo pokazati da je funkcija f neprekidna u svakoj točki iz $[a,b]$. Fiksirajmo stoga $x_0 \in [a,b]$ i $\varepsilon > 0$. Budući da f_n uniformno konvergira prema f, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ za sve $x \in [a,b]$. Budući da je f_n neprekidna na $[a,b]$, postoji otvoren interval J takav da je $x_0 \in J$ i takav da vrijedi $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ za sve $x \in J \cap [a,b]$. Tada za sve $x \in J \cap [a,b]$ imamo

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Dokaz propozicije 48. Pretpostavimo da je (f_n) Cauchyjev niz u $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$. Ako je $x \in [a,b]$ proizvoljna točka, tada iz

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \qquad (m,n \in \mathbb{N}) \tag{4}$$

slijedi da je $(f_n(x))$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}$. Budući da je $\mathbb{R}$ potpun, postoji $f(x) := \lim_n f_n(x)$. Na taj način dolazimo do funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Tvrdimo da je $f \in C([a,b])$.

Za fiksan $\varepsilon > 0$ izaberimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ za sve $m,n \geq n_0$. Iz (4) dobivamo da je $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ za sve $m,n \geq n_0$ i sve $x \in [a,b]$. Odavde zaključujemo da je $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$ i sve $x \in [a,b]$. Dakle, niz (f_n) uniformno konvergira prema funkciji f, pa je prema propoziciji 49, $f \in C([a,b])$. □

Lema 50. *Pretpostavimo da je* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ *niz funkcija koji uniformno konvergira prema funckiji* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Ako je* f *neprekidna u točki* $x \in [a,b]$, *tada za svaki niz* (x_n) *u* $[a,b]$, *iz* $x_n \to x$ *slijedi* $f_n(x_n) \to f(x)$.

Dokaz. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$. Budući da niz f_n konvergira uniformno prema f, postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon/2$ za sve $n \geq n_1$ i sve $y \in [a,b]$. S druge strane, budući da je f neprekidna u x, postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon/2$ za sve $n \geq n_1$. Stavimo $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Tada za sve $n \geq n_0$ imamo

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Lema 51. *Skup svih Lipschitzovih funkcija* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *je uniformno gust potprostor od* $C([0,1])$.

Dokaz. Neka je $f \in C([0,1])$. Jer je f neprekidna funkcija na segmentu, ona je uniformno neprekidna, pa za $\varepsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x, y \in [0,1]$ iz $|x-y| \leq \frac{1}{n}$ slijedi $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Neka je $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ neprekidna po dijelovima linearna funkcija takva da je $g(\frac{k}{n}) = f(\frac{k}{n})$ za sve $0 \leq k \leq n$. Tvrdimo da je g Lipschitzova i $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$.

Zaista, za svaki $1 \leq k \leq n$ označimo s L_k koeficijent smjera (linearne) restrikcije od g na podsegment $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, tako da je $g(x)-g(y) = L_k(x-y)$ za $x, y \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. Ako je $L := \max\{|L_1|, \ldots, |L_n|\}$, onda je jasno da vrijedi $|g(x)-g(y)| \leq L|x-y|$ za sve $x, y \in [0,1]$. Dakle, g je Lipschitzova.

Nadalje, za proizvoljan $x \in [0,1]$ izaberimo $1 \leq k \leq n$ takav da je $x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. Kako je $g([\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]) \subseteq f([\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}])$ (jer je f neprekidna), postoji $y \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ takav da je $g(x) = f(y)$. Slijedi $|f(x)-g(x)| = |f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Kako je $x \in [0,1]$ bio proizvoljan, zaključujemo $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$. □

Lema 52. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, stavimo*

$$A_n := \left\{ f \in C([0,1]) : \text{postoji } x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] \text{ takav da } |f(x+h)-f(x)| \leq nh \text{ za sve } 0 < h < \frac{1}{n} \right\}.$$

$$B_n := \left\{ f \in C([0,1]) : \text{ postoji } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \text{ takav da } |f(x-h)-f(x)| \leq nh \text{ za sve } 0 < h < \frac{1}{n} \right\}.$$

Tada su svi skupovi A_n i B_n zatvoreni i nigdje gusti u funkcijskom prostoru $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Dokaz. Mi ćemo tvrdnju pokazati samo za skupove A_n, budući da je dokaz za skupove B_n analogan. Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$.

Kako bismo pokazali zatvorenost skupa A_n, neka je $(f_k)_k$ niz u A_n koji uniformno konvergira prema nekoj funkciji $f \in C([0,1])$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ izaberimo neki $x_k \in [0, 1-\frac{1}{n}]$ takav da je $|f_k(x_k+h)-f_k(x_k)| \leq nh$ za sve $0 < h < \frac{1}{n}$. Tada, prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu za nizove, postoji podniz od $(x_k)_k$ koji konvergira prema nekoj točki $x_0 \in [0, 1-\frac{1}{n}]$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da $x_k \to x_0$. Iz leme 50 slijedi da $f_k(x_k+h) \to f(x_0+h)$ i $f_k(x_k) \to f(x_0)$. Onda je i $|f(x_0+h)-f(x_0)| \leq nh$ za sve $0 < h < \frac{1}{n}$. Dakle, $f \in A_n$, odakle zaključujemo da je A_n zatvoren podskup od $C([0,1])$.

Sada dokažimo da je svaki skup A_n nigdje gust u $C([0,1])$, odnosno da je $\operatorname{Int} A_n = \emptyset$ (jer je A_n zatvoeren). Zbog leme 51 dovoljno je dokazati da se u svakoj okolini proizvoljne Lipschitzove funkcije $f \in C([0,1])$ nalazi neka funkcija $f_1 \in C([0,1]) \setminus A_n$.
Fiksirajmo stoga Lipschitzovu funkciju $f \in C([0,1])$. Za $\varepsilon > 0$ i $k \in \mathbb{N}$ neka je $\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ "cik-cak" funkcija takva da je $\widetilde{g}(\frac{j}{k}) = (-1)^j \varepsilon$ za sve $j \in \mathbb{Z}$ i $\tilde{g}$ je linearna na svakom segmentu oblika $[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}]$. Stavimo $g := \widetilde{g}|_{[0,1]}$. Tada za sve $x \in [0,1\rangle$ možemo naći dovoljno mali $\delta > 0$ takav da za sve $0 < h < \delta$ vrijedi $|g(x+h)-g(x)| = 2\varepsilon kh$. Definirajmo funkciju $f_1 := f + g$. Očito je $\|f_1 - f\|_\infty = \|g\|_\infty = \varepsilon$, tako da je $f_1 \in K(f, 2\varepsilon)$. S druge strane, ako s L označimo Lipschitzovu konstantu od f, onda za proizvoljnu točku $x \in [0,1\rangle$ i sve $0 < h < \delta$ imamo

$$\begin{aligned} 2\varepsilon kh - Lh &\leq |g(x+h)-g(x)| - |f(x+h)-f(x)| \leq |(g(x+h)-g(x)) - (f(x+h)-f(x))| \\ &= |f_1(x+h) - f_1(x)|. \end{aligned}$$

Posebno, ako izaberemo $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k > \frac{n+L}{2\varepsilon}$, dobivamo $|f_1(x+h)-f_1(x)| > nh$. Dakle, $f_1 \notin A_n$, što pokazuje $K(f, 2\varepsilon) \nsubseteq A_n$. Zbog proizvoljnosti od f i $\varepsilon > 0$, zaključujemo da je $\operatorname{Int} A_n = \emptyset$. □

Dokaz teorema 47. Označimo s $\mathcal{D}$ skup svih funkcija $f \in C([0,1])$ koje su derivabilne u barem jednoj točki $x \in [0,1]$. Koristeći iste oznake kao u lemi 52, imamo

$$\mathcal{D} \subseteq \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} B_n \right).$$

Prema lemi 52, svi skupovi A_n i B_n su nigdje gusti u $C([a,b])$, pa je $(\bigcup_{n=2}^\infty A_n) \cup (\bigcup_{n=2}^\infty B_n)$ skup prve kategorije u $C([a,b])$. Tada je i $\mathcal{D}$ skup prve kategorije, kao podskup skupa prve kategorije, odakle zaključujemo da je skup $C([0,1]) \setminus \mathcal{D}$ rezidualan. □

Kao direktnu posljedicu teorema 47, propozicije 48 i BTK dobivamo:

Korolar 53. *Skup svih neprekidnih funkcija $f \in C([0,1])$ koje nisu nigdje derivabilne čini gust podskup od $C([0,1])$.*

4 Domaća zadaća

Napomena: Za domaću zadaću potrebno je riješiti barem 5 od navedenih 12 zadataka. Zadaću predajete kao **jedan pdf file** preko Merlina do **7. 6. 2024. u 23:59**.

Zadatak 1. (a) Postoji li metrika d na $\mathbb{Q}$ takva da je $(\mathbb{Q}, d)$ potpun metrički prostor?

(b) Postoji li metrika d na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ takva da je $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, d)$ potpun metrički prostor?

Zadatak 2. Postoji li funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da za sve $q \in \mathbb{Q}$ vrijedi $\lim_{x \to q} |f(x)| = +\infty$?

Zadatak 3. Neka je X potpun metrički prostor i neka je $\mathcal{F}$ familija neprekidnih funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ koja je $\mathcal{F}$ **ekviograničena po točkama**, tj. za sve $x \in X$ postoji konstanta $M_x > 0$ takav da vrijedi

$$|f(x)| \leq M_x \qquad \text{za sve } f \in \mathcal{F}.$$

Dokažite da tada postoji neprazan otvoren skup O u X i konstanta $M > 0$ takva da vrijedi

$$|f(x)| \leq M \qquad \text{za sve } f \in \mathcal{F} \text{ i } x \in O.$$

Zadatak 4. Neka je $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ niz funkcija sa svojstvom da za sve $x \in \mathbb{R}$ i sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\lim_{t \to x} f_n(t) = 0$. Ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljan skup prve kategorije, dokažite da postoji točka $x \in \mathbb{R} \setminus A$ takva da vrijedi $f_n(x) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 5. Neka je $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ neprekidna funkcija takva da za sve $x \in \mathbb{R}_+$ vrijedi $\lim_{n \to \infty} f(nx) = 0$. Dokažite da je tada $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Vrijedi li tvrdnja i bez pretpostavke da je f neprekidna?

Zadatak 6. Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^∞ takva da za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji prirodan broj n_x takav da je $f^{(n_x)}(x) = 0$. Dokažite da je f polinom.

Zadatak 7. Dokažite da generička funkcija $f \in C([0,1])$ nije Lipschitzova.

Zadatak 8. Dokažite da generička funkcija $f \in C([0,1])$ nije nigdje monotona.

Zadatak 9. Neka je $f \in C([0,1])$. Ako je $[a,b] \subseteq [0,1]$, tada svaku konačnu subdiviziju $p = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ od $[a,b]$ (tj. $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$) definirajmo

$$\ell(f,p) := \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1})^2)},$$

$$\ell(f,[a,b]) := \sup\{\ell(f,p) \ : \ p \text{ je konačna subdivizija od } [a,b]\}.$$

Ako je $\ell(f,[0,1]) < \infty$, tada za graf od f kažemo da je **rektifikabilan**. Ako je pak $\ell(f;[0,1]) = \infty$ za sve $[a,b] \subseteq [0,1]$, tada za graf od f kažemo da je **nigdje rektifikabilan**. Dokažite da je graf generičke funkcije $f \in C([0,1])$ nigdje rektifikabilan.

Zadatak 10. Neka je X metrički prostor i neka je $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ niz neprekidnih funkcija koji po točkama konvergira prema nekoj funkciji $f : X \to \mathbb{R}$ (tj. $\lim_n f_n(x) = f(x)$ za sve $x \in X$).

(a) Za svaki $\varepsilon > 0$ stavimo

$$V_n(\varepsilon) := \{x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\} \ \ (n \in \mathbb{N}), \qquad \text{te} \qquad \mathcal{O}(\varepsilon) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Int}(V_n(\varepsilon)).$$

Dokažite da je skup $C(f)$ svih točaka neprekidnosti funkcije f G_δ-skup $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(\frac{1}{n})$.

(b) Koristeći (a), dokažite da je $C(f)$ rezidualan skup u X.

(c) Zaključite da ne postoji niz neprekidnih funkcija $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ koji po točkama konvergira prema Dirichletovoj funkciji.

Zadatak 11. Neka je X beskonačnodimezionalni normirani prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(a) Dokažite da je svaki pravi zatvoren (vektorski) potprostor od X nigdje gust skup u X.

(b) Ako je X potpun (tj. Banachov), dokažite da je svaka algebarska baza od X neprebrojiva.
Uputa: Smijete koristiti činjenicu da je svaki konačnodimenzionalni potprostor normiranog prostora zatvoren.

(c) Zaključite da na vektorskom prostoru $\mathcal{P}$ svih realnih polinoma ne postoji norma s obzirom na koju je $\mathcal{P}$ Banachov prostor.

Zadatak 12. Neka je ZF Zermelo-Fraenkelova teorija skupova (bez aksioma izbora). Jedna od znatno slabijih varijanti aksioma izbora, koja je u analizi dovoljna da bi se dokazala većina željenih rezultata, je tzv. *aksiom zavisnog izbora* (DC). On glasi: Ako je S proizvoljan neprazan skup i $R \subseteq S \times S$ potpuna binarna relacija (tj. za svaki $x \in S$ postoji $y \in S$ takav da je xRy), tada postoji niz (x_n) u S takav da vrijedi $x_n R x_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

(a) Analizom dokaza od BTK zaključite da je BTK teorem sistema ZF+DC.

(b) Dokažite da vrijedi i obrat, tj. da je DC teorem sistema ZF+BTK.
Uputa: Promatrajte metrički prostor $(S^{\mathbb{N}}, d)$, gdje je $S^{\mathbb{N}}$ skup svih nizova u S, a $d(f, g) := 2^{-\min\{n \in \mathbb{N} \,:\, f(n) \neq g(n)\}}$.

Ukratko: BTK je ekvivalentan s DC.