Teorija korespodencije

Sanja Balenović

20. svibnja 2005.

Sadržaj

Poglavlje 1

Osnovne definicije

U ovom poglavlju ćemo istaknuti neke osnovne činjenice koje ćemo koristiti u kasnijim razmatranjima. Prvo ćemo se upoznati s modalnom logikom. Zatim ćemo definirati filtre i ultrafiltre, bitno oruđe koje će nam trebati radi ultrafiltar proširenja. Konačno ćemo se upoznati s pojmovima iz teorije modela - ultraproduktima i α-saturacijom, pojmovima koji će odigrati bitnu ulogu u određivanju izražajnosti modalnih jezika.

1.1 Modalna logika

Klasična logika ima problema kad treba utvrditi istinitost nekih svakodnevnih izjava. Na primjer, za izjavu

> Moguće je da će danas padati kiša.

je nemoguće reći da li je istinita ili ne s obzirom da ne ovisi o tome da li je stvarno padala kiša. Modalna logika daje rješenje ovog i njemu sličnih problema.

Naše upoznavanje s modalnom logikom započet ćemo s definicijom osnovnog modalnog jezika i njemu pripadajućih formula.

Definicija 1.1
Osnovni modalni jezik se sastoji od prebrojivog skupa propozicionalnih varijabli $\Theta = \{p, q, r, \ldots\}$*, bulovskih veznika* $\neg$ *i* $\vee$*, unarnog modalnog operatora* $\Diamond$*, te logičke konstante* $\bot$*.*
Formula je riječ osnovnog modalnog jezika definirana sljedećom induktivnom definicijom:

(i) *svaka propozicionalna varijabla je formula,*

(ii) *logička konstanta* $\bot$ *je formula,*

(iii) *ako su* ϕ *i* ψ *formule, tada su i* $(\neg\phi)$, $(\phi \vee \psi)$ *i* $(\Diamond\phi)$ *također formule,*

(iv) *riječ osnovnog modalnog jezika je formula ako i samo ako je nastala primjenom konačno mnogo puta pravila* (i), (ii) *i* (iii).

Također se koriste kratice za veznike konjukcije, kondicionala i bikondicionala, logičku konstantu istinu i dualni modalni operator $\Box$:

$$\begin{aligned} \phi \wedge \psi &:= \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \\ \phi \to \psi &:= \neg\phi \vee \psi \\ \phi \leftrightarrow \psi &:= (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi) \\ \top &:= \neg\bot \\ \Box\phi &:= \neg\Diamond\neg\phi \end{aligned}$$

Modalni operator $\Diamond$ čitamo kao "moguće je", a modalni operator $\Box$ kao "nužno je".

Da bi definirali pojam istinitosti modalnih formula, potrebno je definirati modele za modalni jezik.

Definicija 1.2
Model za osnovni modalni jezik je uređena trojka $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *pri čemu je*

(i) W *neprazan skup čije elemente nazivamo svijetovi,*

(ii) R *binarna relacija na skupu* W*, tj.* $R \subseteq W \times W$*, koju nazivamo relacija dostiživosti,*

(iii) V *funkcija koja svakoj propozicionalnoj varijabli* p *iz skupa* Θ *pridružuje neki podskup* $V(p)$ *od* W.

Funkciju V nazivamo valuacija, a skup $V(p)$ zamišljamo kao skup svijetova u modelu gdje je p istinita. Skup W nazivamo nosač. Često ćemo model poistovjećivati s nosačem, pa ćemo umjesto $w \in W$ pisati $w \in \mathfrak{M}$.

Definicija 1.3
Neka je w *proizvoljni svijet modela* $\mathfrak{M}$. *Za svijet* $v \in \mathfrak{M}$ *kažemo da je sljedbenik od* w *ako vrijedi* Rwv. *Skup svih sljedbenika svijeta* w*, u oznaci* $W[w]$*, definiramo na sljedeći način:*

$$W[w] = \{v \in W \mid Rwv\}.$$

Za svijet w *kažemo da je* R*-terminalan ako je* $W[w] = \emptyset$.

Sada smo spremni za definiciju istinitosti formula modalne logike.

Definicija 1.4
Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *model i* w *proizvoljni svijet u njemu. Istinitost formule* ϕ*, u oznaci* $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$*, definiramo induktivno po složenosti formule* ϕ *ovako:*

(i) *ako je* ϕ *propozicionalna varijabla, tj.* $\phi = p$ *gdje je* $p \in \Theta$*, tada definiramo:*
$\mathfrak{M}, w \Vdash p$ *ako i samo ako* $w \in V(p)$*,*

(ii) *ako je* ϕ *logička konstanta* $\bot$*, tj.* $\phi = \bot$*, tada definiramo:*
ne vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \bot$*,*

(iii) *ako je* ϕ *formula oblika* $\neg\psi$*, tada definiramo:*
$\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\psi$ *ako i samo ako ne vrijedi* $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$*,*

(iv) *ako je* ϕ *formula oblika* $\psi \vee \eta$*, tada definiramo:*
$\mathfrak{M}, w \Vdash \psi \vee \eta$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ *ili* $\mathfrak{M}, w \Vdash \eta$*,*

(v) *ako je* ϕ *formula oblika* $\Diamond\psi$*, tada definiramo:*
$\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$ *ako i samo ako za neki* $v \in W$ *takav da je* Rwv *vrijedi* $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$*.*

Lako se vidi da vrijedi:
$\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\psi$ ako i samo ako za svaki $v \in W$ takav da je Rwv vrijedi $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$.

Od interesa nam je promatrati preslikavanja među modelima i načine na koje od starih modela možemo stvarati nove. Najzanimljivije za modalnu logiku su nam bisimulacije, zato što u samoj svojoj definiciji uzimaju u obzir modalnost.

Definicija 1.5 (Bisimulacije)
Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ *modeli. Binarnu relaciju* $Z \subseteq W \times W'$ *nazivamo bisimulacijom između* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *i označavamo sa* $Z : \mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}'$*, ako zadovoljava sljedeća svojstva:*

(i) *ako je* wZw' *tada za svaku propozicionalnu varijablu* p *vrijedi* $w \in V(p)$ *ako i samo ako je* $w' \in V'(p)$,

(ii) *ako je* wZw' *i* Rwv *tada postoji svijet* $v' \in \mathfrak{M}'$ *takav da je* vZv' *i* $R'w'v'$ *(uvjet "forth"),*

(iii) *ako je* wZw' *i* $R'w'v'$ *tada postoji svijet* $v \in \mathfrak{M}$ *takav da je* vZv' *i* Rwv *(uvjet "back").*

Kažemo da su svijetovi w i w' modalno ekvivalentni, i označavamo sa $w \leftrightsquigarrow w'$, ako za svaku modalnu formulu ϕ vrijedi

$$w \Vdash \phi \text{ ako i samo ako } w' \Vdash \phi.$$

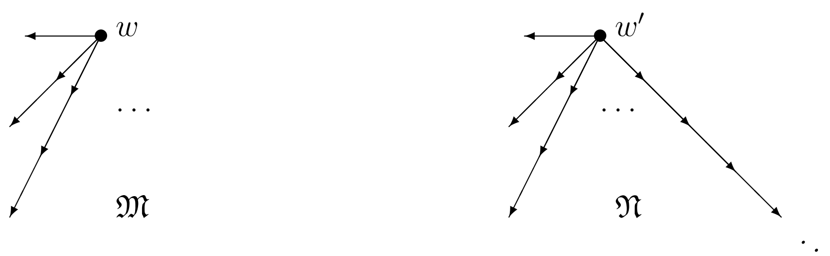
Indukcijom po složenosti formule lako je dokazati sljedeći teorem.

Teorem 1.1
Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ modeli. Tada za sve svijetove $w \in W$ i $w' \in W'$ vrijedi:

$$w \underline{\leftrightarrow} w' \text{ povlači } w \leftrightsquigarrow w'.$$

Ovaj teorem nam zapravo kaže da su formule modalne logike invarijantne na bisimulaciju, tj. da bisimulacija čuva istinitost.
Obrat općenito ne vrijedi.

Primjer 1.1
Definiramo modele $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{N} = (W', R', V')$ kao na slici, gdje strelice označavaju da su svijetovi u relaciji R, odnosno R'. Oba modela za svaki $n \in \mathbb{N}$ imaju konačnu granu duljine n. Jedina razlika je ta da model $\mathfrak{N}$ ima beskonačnu granu. Za sve propozicionalne varijable p definiramo $V(p) = V'(p) = \emptyset$.



Pokazat ćemo prvo da vrijedi $w \leftrightsquigarrow w'$, tj. da su svijetovi w i w' modalno ekvivalentni. Induktivno definiramo niz $(R^n)_{n\in\mathbb{N}}$ binarnih relacija na W na sljedeći način: R^0xy vrijedi ako $x = y$, $R^{n+1}xy$ vrijedi ako postoji z takav da Rxz i $R^n zy$. Sada ćemo dokazati pomoćnu tvrdnju:
neka je ϕ proizvoljna formula modalne logike takva da se u njoj pojavljuje k modalnih operatora ($k \in \mathbb{N}_0$) i neka su $v \in W\setminus\{w\}$ i $v' \in W'\setminus\{w'\}$ proizvoljni svijetovi takvi da postoje $u \in W \setminus \{w\}$ i $u' \in W' \setminus \{w'\}$ sa svojstvom da $R^k vu$ i $R'^k v'u'$. Tvrdimo

$$v \Vdash \phi \text{ ako i samo ako } v' \Vdash \phi.$$

Tvrdnju dokazujemo indukcijom po složenosti formule ϕ. Baza trivijalno slijedi jer smo za sve propozicionalne varijable p definirali $V(p) = V'(p) = \emptyset$.

Pogledajmo što se događa kad je složenost formule jednaka 1. Razlikujemo sljedeće slučajeve.

(i) *Formula $\phi = \neg p$ je istinita na svakom svijetu modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$.*

(ii) *Formula $\phi = p \vee q$ nije istinita niti na jednom svijetu po konstrukciji modela.*

(iii) *Neka je $\phi = \Diamond p$. Promatramo svijetove u i u' koji su neposredni sljedbenici svijetova v i v'. Radi uvjeta tvrdnje, takvi svijetovi postoje. Sada, s obzirom da na svakom takvom svijetu nije istina p, vrijedi*

$$v \nVdash \phi \text{ i } v' \nVdash \phi.$$

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve formule ψ modalne logike složenosti strogo manje od n.
Neka je složenost formule ϕ jednaka n. Tada je ϕ oblika $\neg\psi$ ili $\psi \vee \eta$ ili $\Diamond\psi$, gdje su složenosti formula ψ i η strogo manje od n.
Neka je $\phi = \neg\psi$. Tada redom imamo

$$v \Vdash \neg\psi \Leftrightarrow v \nVdash \psi \Leftrightarrow v' \nVdash \psi \Leftrightarrow v' \Vdash \neg\psi.$$

Za $\phi = \psi \vee \eta$ vrijedi

$$v \Vdash \psi \vee \eta \Leftrightarrow v \Vdash \psi \text{ ili } v \Vdash \eta \Leftrightarrow v' \Vdash \psi \text{ ili } v' \Vdash \eta \Leftrightarrow v' \Vdash \psi \vee \eta.$$

Primijetimo da je do sada dokaz tekao neovisno o uvjetima tvrdnje. Ovaj dio dokaza je univerzalan i zato ga u daljnjim sličnim dokazivanjima preskačemo.
Konačno, neka je $\phi = \Diamond\psi$. Tada je $v \Vdash \Diamond\psi$ ako i samo ako postoji $z \in W$ takav da je Rvz i $z \Vdash \psi$, tj. ako za jedini sljedbenik z od v vrijedi $z \Vdash \psi$. Međutim, tada z zadovoljava uvjete tvrdnje (s obzirom da za v postoji u takav da $R^k vu$, tada je $R^{k-1}zu$), pa za ψ vrijedi pretpostavka indukcije. Dakle, za svaki $z' \in W'$ za kojeg postoji $u' \in W'$ takav da vrijedi $R'^{k-1}z'u'$ imamo $z' \Vdash \psi$. Specijalno, zbog uvjeta na svijet v', njegov jedini sljedbenik z' je takav da $R'v'z'$ i za z' postoji $u' \in W'$ sa svojstvom $R'^{k-1}z'u'$. Stoga imamo $z' \Vdash \psi$ pa je $v' \Vdash \phi$. Obrat se dokaže analogno.
Dokažimo sada drugu pomoćnu tvrdnju:
neka su $v \in W \setminus \{w\}$ i $v' \in W' \setminus \{w'\}$ proizvoljni svijetovi takvi da za neki $k \in \mathbb{N}_0$ postoje $u \in W \setminus \{w\}$ R-terminalan i $u' \in W' \setminus \{w'\}$ R'-terminalan sa svojstvom da $R^k vu$ i $R'^k v'u'$. Tada su v i v' modalno ekvivalentni, tj. za svaku formulu ϕ vrijedi $v \Vdash \phi$ ako i samo ako $v' \Vdash \phi$.
Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po k i složenosti formule ϕ, pri čemu nam je od interesa promatrati samo slučaj $\phi = \Diamond\psi$ (ostatak je identičan početnom

dijelu gornjeg dokaza).
Za $k = 0$, tj. za v je R-terminalan i v' je R'-terminalan, imamo $v \nVdash \phi$ i $v' \nVdash \phi$.
Pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi tvrdnja.
Neka su v i v' takvi da postoje svijetovi u R-terminalan i u' R'-terminalan, te vrijedi $R^{k+1}vu$ i $R'^{k+1}v'u'$. Dokazujemo tvrdnju za slučaj $\phi = \Diamond\psi$. Vrijedi $v \Vdash \phi$ ako i samo ako za njegova (jedinog) sljedbenika z vrijedi $z \Vdash \psi$. Ali, tada, zbog pretpostavke indukcije, za z' (jedinog sljedbenika od v'), vrijedi $z' \Vdash \psi$ što je ekvivalentno sa $v' \Vdash \phi$. Dakle, v i v' su modalno ekvivalentni.
Vratimo se napokon na našu početnu tvrdnju. Želimo dokazati da su w i w' modalno ekvivalentni. Opet ćemo se koristiti indukcijom i dokazivat ćemo jedino slučaj $\phi = \Diamond\psi$. Ako vrijedi $w \Vdash \phi$, tada za nekog sljedbenika v od w vrijedi $v \Vdash \psi$. Tvrdimo: za nekog sljedbenika v' od w' vrijedi $v' \Vdash \psi$. Neka ψ ima k modalnih operatora. Ako postoji u takav da $R^k vu$, tvrdnja slijedi iz prve dokazane tvrdnje (zbog toga što za svaki k postoje grane koje započinju sa w i w' duljine $k+1$). Inače, postoji $l < k$ i R-terminalan svijet u za koje je $R^l vu$ pa tvrdnja slijedi iz druge dokazane tvrdnje. Konačno, $w' \Vdash \phi$. Obrat analogno.
Dakle, svijetovi w i w' su modalno ekvivalentni.
Međutim, ti svijetovi nisu bisimularni. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji bisimulacija Z takva da je wZw'. Tada mora postojati sljedbenik od w, na primjer v_0, koji je u relaciji Z s prvim svijetom v'_0 na beskonačnoj grani iz svijeta w'. Pretpostavimo da je n duljina (maksimalne) grane iz w preko v_0. Neka je $w, v_0, \ldots, v_{n-1}$ niz svijetova sljedbenika na toj grani. Primjenom uvjeta "forth" bisimulacije $n-1$ puta, dobijemo svijetove $v'_1, \ldots, v'_{n-1}$ na beskonačnoj grani iz w' takve da vrijedi $v'_0 R' v'_1 \ldots R' v'_{n-1}$ i $v_i Z v'_i$ za svaki i. Sada v'_{n-1} ima sljedbenika, ali v_{n-1} nema, pa nije ispunjen uvjet "back". Odavde slijedi da ne postoji bisimulacija između w i w'.

Može se pokazati da obrat teorema 1.1 vrijedi za neke posebne modele.

Definicija 1.6
Neka je $\mathfrak{M}$ model. Kažemo da je $\mathfrak{M}$ slikovno-konačan ako je za svaki svijet $w \in \mathfrak{M}$ skup $W[w]$ konačan.

Teorem 1.2 (Hennessy-Milnerov teorem) *[1, strana 69]*
Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ slikovno-konačni modeli. Tada za sve svijetove $w \in W$ i $w' \in W'$ vrijedi:

$$w \underline{\leftrightarrow} w' \text{ ako i samo ako } w \leftrightsquigarrow w'.$$

1.2 Filtri i ultrafiltri

Općenito, Kartezijev produkt nekih struktura nije opet struktura istog tipa (npr. Kartezijev produkt polja općenito nije polje), dakle ne čuva svojstvo. Pitanje je kako napraviti produkt neke familije određenog svojstva tako da se to svojstvo sačuva. To nam omogućuju ultrafiltri.

Prvo ćemo definirati pojmove filtra i ultrafiltra nad skupom W, a zatim ćemo s Teoremom o ultrafiltru dokazati egzistenciju ultrafiltra.

Definicija 1.7 (Filtar)
Neka je W neprazan skup. Filtar F nad W je skup $F \subseteq \mathcal{P}(W)$ takav da

(i) $W \in F$,

(ii) *ako su $X, Y \in F$, onda je i $X \cap Y \in F$,*

(iii) *ako je $X \in F$ i $X \subseteq Z \subseteq W$, onda je $Z \in F$.*

Navedimo radi boljeg razumijevanja nekoliko primjera filtara.

Primjer 1.2
Neka je W proizvoljan neprazan skup.

(i) *$F = \{W\}$ je filtar kojeg nazivamo trivijalni filtar.*

(ii) *$F = \mathcal{P}(W)$ je filtar kojeg nazivamo nepravi filtar.*

(iii) *Za W beskonačan skup definiramo*

$$F = \{X \subseteq W \mid W \setminus X \text{ je konačan}\}.$$

Lako je vidjeti da je F filtar. Nazivamo ga Fréchetov filtar nad W.

Definirali smo pojam filtra. Sad ćemo pokazati kako se može konstruirati filtar počinjući od proizvoljnog podskupa od $\mathcal{P}(W)$. Prvo nam treba sljedeća definicija:

Definicija 1.8
Neka je W neprazan skup i neka je E podskup od $\mathcal{P}(W)$. Definiramo

$$F = \bigcap \{G \mid E \subseteq G \text{ i } G \text{ je filtar nad } W\}.$$

Lako je provjeriti da je F filtar. Za njega kažemo da je generiran skupom E. Kažemo da podskup E od $\mathcal{P}(W)$ ima svojstvo konačnog presjeka ako je presjek bilo kojeg konačnog broja elemenata od E neprazan.

Lema 1.1
Neka je F filtar generiran skupom E. Tada je F skup svih $X \in \mathcal{P}(W)$ takvih da za neke $Y_1, \ldots, Y_n \in E$ vrijedi

$$Y_1 \cap \ldots \cap Y_n \subseteq X.$$

Dokaz.
Neka je $F' = \{X \mid (\exists n \in \mathbb{N})(\exists Y_1, \ldots, Y_n \in E)(Y_1 \cap \ldots \cap Y_n \subseteq X)\}$. Lako se vidi da je $F' \subseteq F$. Dokažimo da vrijedi $F \subseteq F'$. Da bi to dokazali, dovoljno je pokazati da je F' filtar koji sadrži E. Naime, tada je, s obzirom da je F presjek svih filtara nad W koji sadrže E, očito $F \subseteq F'$.
Iz definicije skupa F' znamo da je $E \in F'$ i $W \in F'$. Treba dokazati uvjete *(ii)* i *(iii)* iz definicije filtra.
Neka su A i B dva skupa iz F'. Tada postoje $X_1, \ldots, X_n \in E$ i $Y_1, \ldots, Y_m \in E$ takvi da $X_1 \cap \ldots \cap X_n \subseteq A$ i $Y_1 \cap \ldots \cap Y_m \subseteq B$. No, tada je

$$(X_1 \cap \ldots \cap X_n) \cap (Y_1 \cap \ldots \cap Y_m) \subseteq A \cap B,$$

pa je $A \cap B \subseteq F'$.
Neka je sada A kao maloprije, i neka je Z takav da je $A \subseteq Z \subseteq W$. Tada je, zbog $X_1 \cap \ldots \cap X_n \subseteq A \subseteq Z$, $Z \in F'$. Dakle, F' je filtar. S obzirom da je F najmanji filtar koji sadrži skup E slijedi da je $F \subseteq F'$.

$\blacksquare$

Ultrafiltri su posebna vrsta filtara. Oni su neka vrsta dopunjenja filtra do maksimalnog, a da on i dalje zadovoljava neke uvjete.

Definicija 1.9 (Ultrafiltar)
Za filtar F kažemo da je pravi ako je $F \neq \mathcal{P}(W)$. Ultrafiltar nad W je pravi filtar U za kojeg vrijedi:

za svaki $X \in \mathcal{P}(W)$ imamo $X \in U$ ako i samo ako $(W \setminus X) \notin U$.

Napomena.
Filtar F je pravi ako i samo ako vrijedi $\emptyset \notin F$. To trivijalno slijedi iz trećeg uvjeta prethodne definicije.

Lema 1.2
Neka je F filtar generiran sa E. Tada vrijedi

F je pravi filtar ako i samo ako E ima svojstvo konačnog presjeka.

Dokaz.
Filtar je pravi ako i samo ako $\emptyset \notin F$, tj. (prema Lemi 1.1) ne postoje skupovi $Y_1, \ldots, Y_n \in E$ takvi da $Y_1 \cap \ldots \cap Y_n = \emptyset$ što je ekvivalentno definiciji svojstva konačnog presjeka.

$\blacksquare$

Za ultrafiltre je zanimljivo to što su, osim na konačne presjeke, zatvoreni i na proizvoljne unije. Vrijedi i jača tvrdnja, što možemo vidjeti u idućoj lemi.

Lema 1.3
Neka su A i B proizvoljni elementi skupa $\mathcal{P}(W)$, a U ultrafiltar nad W. Tada vrijedi

$$A \cup B \in U \text{ ako i samo ako } A \in U \text{ ili } B \in U.$$

Dokaz.
Iz činjenice da je U ultrafiltar, imamo

$$\begin{aligned} A \notin U \text{ i } B \notin U &\Leftrightarrow W \setminus A \in U \text{ i } W \setminus B \in U \\ &\Leftrightarrow (W \setminus A) \cap (W \setminus B) \in U \\ &\Leftrightarrow W \setminus (A \cup B) \in U \\ &\Leftrightarrow (A \cup B) \notin U. \end{aligned}$$

■

Definirali pojam ultrafiltra i vidjeli neka njegova lijepa svojstva. Međutim, i dalje ništa ne znamo o njihovoj egzistenciji. Uz pomoć slijedećeg teorema može se pokazati da se za svaki neprazni skup W može konstruirati ultrafiltar nad W.

Teorem 1.3 (Teorem o ultrafiltru) *[2, strana 167]*
Fiksirajmo neprazan skup W. Svaki pravi filtar nad W može se proširiti do ultrafiltra nad W. Nadalje, svaki podskup od $\mathcal{P}(W)$ koji ima svojstvo konačnog presjeka može biti nadopunjen do ultrafiltra nad W.

U mnogim slučajevima kada budemo trebali dokazati egzistenciju ultrafiltra koji sadrži određenu kolekciju skupova pozivat ćemo se na Teorem o ultrafiltru.

Primjer 1.3
Pogledajmo kako se druga tvrdnja prethodnog teorema može svesti na prvu. Prema Lemi 1.2 vrijedi da ako podskup E od $\mathcal{P}(W)$ ima svojstvo konačnog presjeka, tada je filtar F koji je generiran njime pravi. A onda se taj filtar, prema prvoj tvrdnji teorema, može proširiti do ultrafiltra nad W.

Primjer ultrafiltra su takozvani glavni ultrafiltri. Oni će odigrati posebnu ulogu u našim razmatranjima u kasnijim poglavljima, ulogu svijetova u posebnoj vrsti modela.

Definicija 1.10
Neka je W neprazan skup. Za dani $w \in W$, glavni ultrafiltar π_w generiran sa w je filtar generiran s jednočlanim skupom $\{w\}$, tj.

$$\pi_w = \{X \subseteq W \mid w \in X\}.$$

Primjer 1.4
Pokažimo da je π_w stvarno ultrafiltar nad W.
Za početak, treba provjeriti da je to filtar. Međutim, lako se provjeri da vrijede uvjeti iz definicije filtra. Naime

(i) *$W \in \pi_w$ slijedi iz $w \in W$,*

(ii) *ako su X, $Y \in \pi_w$, onda vrijedi $w \in X$ i $w \in Y$, pa iz $w \in X \cap Y$ slijedi $X \cap Y \in \pi_w$,*

(iii) *ako je $X \in \pi_w$ i $X \subseteq Z \subseteq W$, tada zbog $w \in X \subseteq Z$ vrijedi $Z \in \pi_w$.*

Očito je da $\emptyset \notin \pi_w$ zato što $w \notin \emptyset$. Dakle, π_w je pravi filtar.
Pretpostavimo sada da za neki $X \in \mathcal{P}(W)$ vrijedi $X \notin \pi_w$. Tada imamo sljedeće ekvivalencije

$$\begin{aligned} X \notin \pi_w \quad &\Leftrightarrow \quad w \notin X \\ &\Leftrightarrow \quad w \in W \setminus X \\ &\Leftrightarrow \quad W \setminus X \in \pi_w. \end{aligned}$$

Time je dokazano da je π_w ultrafiltar nad W.

Na primjeru ćemo pokazati neka lijepa svojstva ultrafiltara nad beskonačnim skupovima.

Primjer 1.5
Neka je W beskonačan skup. Kažemo da je skup $X \subseteq W$ kofinitan ako je skup $W \setminus X$ konačan.
Prvo ćemo pokazati da skup svih kofinitnih podskupova od W ima svojstvo konačnog presjeka. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoje kofinitni skupovi $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ ($n \in \mathbb{N}$), podskupovi od W, takvi da vrijedi

$$Y_1 \cap Y_2 \cap \ldots \cap Y_n = \emptyset.$$

Tada, po definiciji kofinitnih skupova, postoje konačni skupovi $X_1, X_2, \dots, X_n$, *podskupovi od* W, *takvi da vrijedi* $Y_1 = W \setminus X_1, \dots, Y_n = W \setminus X_n$.
Imamo

$$(W \setminus X_1) \cap (W \setminus X_2) \cap \dots \cap (W \setminus X_n) = \emptyset,$$

tj.

$$W \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n) = \emptyset,$$

a to je kontradikcija s pretpostavkom da je skup W *beskonačan.*
Sada se lako vidi da postoje ultrafiltri nad W *koji ne sadrže konačne skupove. Naime, kolekcija kofinitnih skupova ima svojstvo konačnog presjeka pa se, prema Teoremu o ultrafiltru, može nadopuniti do ultrafiltra. Taj ultrafiltar neće sadržavati konačne skupove jer sadržava njihove komplemente.*
Vrijedi i više, ultrafiltar nad W *sadrži jedino beskonačne skupove ako i samo ako sadrži sve kofinitne skupove.*

Glavni ultrafiltri nad beskonačnim skupom mogu se karakterizirati na sljedeći način.

Lema 1.4
Za glavne ultrafiltre nad beskonačnim skupom W *vrijedi:*

> *ultrafiltar* U *je glavni ako i samo ako je barem jedan element od* U *konačan skup.*

Dokaz.
Ako U sadrži samo beskonačne skupove onda za niti jedan $w \in W$ ne sadrži skup $\{w\}$ pa nije glavni.
Neka U sadrži barem jedan konačan skup, $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$. Pretpostavimo da U nije glavni, tj. da za svaki $w \in W$ postoji $X \in U$ takav da $w \notin X$. Specijalno, za svaki $m_i \in M$ postoji $X_i \in U$ takav da $m_i \notin X_i$. U je filtar, pa iz definicije slijedi

$$Y := X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n \in U.$$

Sada, za svaki $m \in M$ vrijedi $m \notin Y$ pa je $Y \cap M = \emptyset$ što je kontradikcija s činjenicom da je U ultrafiltar.

■

1.3 Ultraprodukti i α-saturiranost

Ponekad nam je od interesa promatrati zasićene modele, tj. modele koji maksimalno ispunjavaju neka svojstva. Primjer takvih modela su α-saturirani modeli, gdje je α proizvoljni kardinalni broj. Pomoću tih specijalnih modela pokazat ćemo pri kraju ovog rada što nam zapravo daje modalna logika. Kao oruđe u konstrukciji α-saturiranih modela, poslužit će nam ultraprodukti koje ćemo definirati malo kasnije. Prije definicije α-saturiranog modela moramo uvesti još neke pojmove.

Neka je $\Gamma(x)$ skup formula teorije prvog reda u kojem samo jedna individualna varijabla može imati slobodni nastup - takav skup formula nazivamo tip. Skup $\Gamma(x)$ je ispunjiv u modelu $\mathfrak{M}$ logike prvog reda ako postoji element w u $\mathfrak{M}$ takav da za sve $\gamma \in \Gamma$ vrijedi $\mathfrak{M} \models \gamma[w]$.

Nadalje, neka je $\mathfrak{M}$ model za dani jezik $\mathcal{L}^1$ teorije prvog reda s nosačem W. Pod teorijom modela $\mathfrak{M}$ podrazumijevamo skup svih formula istinitih u $\mathfrak{M}$. Definiramo pojam konzistentnosti s teorijom modela na sljedeći način.

Definicija 1.11
Kažemo da je skup formula $\Gamma(x)$ konzistentan s teorijom modela $\mathfrak{M}$ ako postoji model $\mathfrak{N}$ istog jezika za koji vrijedi $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$ i postoji $v \in \mathfrak{N}$ takav da je

$$\mathfrak{N} \models \Gamma(x)[v],$$

tj. $\mathfrak{N}$ je model za $\Gamma(x)$.

Često se koristi sljedeća karakterizacija skupova formula konzistentnih s teorijom nekog modela.

Propozicija 1.1
Neka je $\mathfrak{M}$ model jezika $\mathcal{L}^1$ i $\Gamma(x)$ skup formula istog jezika u kojima samo x ima slobodan nastup. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) *Skup $\Gamma(x)$ je konzistentan s teorijom modela $\mathfrak{M}$.*

(ii) *Za sve konačne podskupove $\Delta(x) \subseteq \Gamma(x)$ postoji $a_\Delta \in \mathfrak{M}$ takav da*

$$\mathfrak{M} \models \Delta(x)[a_\Delta],$$

tj. $\Gamma(x)$ je konačno ispunjiv u $\mathfrak{M}$.

Dokaz.
(i)⇒(ii)
Neka je $\Delta(x) \subseteq_{fin} \Gamma(x)$ proizvoljan. Iz pretpostavke $\mathfrak{N} \vDash \Gamma(x)[v]$ posebno slijedi $\mathfrak{N} \vDash \Delta(x)[v]$.
Neka je $\Delta(x) = \{\delta_1(x), \ldots, \delta_n(x)\}$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada iz $\mathfrak{N} \vDash \Delta(x)[v]$ slijedi $\mathfrak{N} \vDash \exists x(\delta_1(x) \wedge \ldots \wedge \delta_n(x))$. Pošto je $\exists x(\delta_1(x) \wedge \ldots \wedge \delta_n(x))$ zatvorena formula, tada iz $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$ slijedi $\mathfrak{M} \vDash \exists x(\delta_1(x) \wedge \ldots \wedge \delta_n(x))$. Time smo dobili da za svaki konačni podskup od $\Gamma(x)$ postoji $a_\Delta \in \mathfrak{M}$ takav da $\mathfrak{M} \vDash \Delta(x)[a_\Delta]$.
(ii)⇒(i)
Neka je $Th(\mathfrak{M}) = \{\phi \mid \phi$ je zatvorena formula i $\mathfrak{M} \vDash \phi\}$. Očito je skup formula $Th(\mathfrak{M}) \cup \Gamma(x)$ konačno ispunjiv u $\mathfrak{M}$. Iz Teorema o kompaktnosti, slijedi da postoji model $\mathfrak{N}$ jezika $\mathcal{L}^1$ takav da $\mathfrak{N} \vDash Th(\mathfrak{M}) \cup \Gamma(x)$. Iz $\mathfrak{N} \vDash Th(\mathfrak{M})$ lako slijedi $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$, a iz $\mathfrak{N}$ je model za $\Gamma(x)$ slijedi tvrdnja.

■

Za podskup $A \subseteq W$, s $\mathcal{L}^1[A]$ označavamo jezik dobiven dodavanjem $\mathcal{L}^1$ novih konstantnih simbola $\underline{a}$ za svaki element $a \in A$, dok s $\mathfrak{M}_A$ označavamo proširenje od $\mathfrak{M}$ do strukture za $\mathcal{L}^1[A]$ u kojoj je svaki konstantni simbol $\underline{a}$ interpretiran s a. Ponekad se umjesto $\mathfrak{M}_A$ piše $(\mathfrak{M}, a)_{a \in A}$.

Prije formalne definicije α-saturiranog modela za proizvoljni kardinalni broj α, pokušat ćemo na vrlo jednostavnom primjeru za $\alpha = 3$ objasniti što želimo da bude α-saturirani model.

Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljni model jezika $\mathcal{L}^1$, te A proizvoljni podskup nosača od $\mathfrak{M}$ čiji je kardinalitet strogo manji od 3. Radi određenosti u ovom primjeru uzmimo $A = \{a_1, a_2\}$. Zatim, neka je $\Gamma(\underline{a_1}, \underline{a_2}, x)$ proizvoljan tip jezika $\mathcal{L}^1[A]$. Tada 3-saturacija znači da ako je $\Gamma(\underline{a_1}, \underline{a_2}, x)$ konačno ispunjiv u $\mathfrak{M}_A$, tada je $\Gamma(\underline{a_1}, \underline{a_2}, x)$ ispunjiv u $\mathfrak{M}_A$.

Sada možemo i formalno definirati α-saturaciju.

Definicija 1.12
Neka je α prirodan broj ili ω. Kažemo da je model $\mathfrak{M}$ jezika $\mathcal{L}^1$ α-saturiran ako za svaki podskup $A \subseteq W$ kardinaliteta strogo manjeg od α i svaki skup $\Gamma(x)$ formula jezika $\mathcal{L}^1[A]$ koji je konzistentan s teorijom prvog reda modela $\mathfrak{M}_A$, postoji $w \in \mathfrak{M}_A$ takav da je

$$\mathfrak{M}_A \vDash \Gamma(x)[w].$$

Za model koji je ω-saturiran obično kažemo da je prebrojivo saturiran.

Možemo i drugačije gledati 3-saturaciju za skup formula iz prijašnje diskusije. Promotrimo formulu $\gamma\left(\underline{a_1}, \underline{a_2}, x\right)$ i neka je $\gamma\left(x_1, x_2, x\right)$ formula s novim varijablama x_1 i x_2 koje zamjenjuju svako pojavljivanje od $\underline{a_1}$ i $\underline{a_2}$ u formuli γ. Tada imamo sljedeću ekvivalenciju:

> $\left\{\gamma\left(\underline{a_1}, \underline{a_2}, x\right)\right\}$ je ispunjiv u $\mathfrak{M}_A$ ako i samo ako postoji b takav da vrijedi $\mathfrak{M} \models \gamma\left(x_1, x_2, x\right)\left[a_1, a_2, b\right]$.

Sada 3-saturaciju možemo definirati ovako:

> Neka je $(a_1, a_2,)$ uređeni par takav da za svaki konačni $\Delta \subseteq \Gamma$ postoji b_Δ sa svojstvom $\mathfrak{M} \models \gamma\left(x_1, x_2, x\right)\left[a_1, a_2, b_\Delta\right]$ za svaki $\gamma \in \Delta$. Tada postoji b takav da $\mathfrak{M} \models \gamma\left(x_1, x_2, x\right)\left[a_1, a_2, b\right]$ za svaki $\gamma \in \Gamma$.

Ovaj način gledanja na α-saturaciju je koristan zato što se može napraviti analogija s m-saturacijom koju ćemo definirati u jednom od sljedećih poglavlja.

Slijede neki primjeri prebrojivo saturiranih modela i onih koji to nisu.

Primjer 1.6

(i) *Pokažimo da je svaki konačni model prebrojivo saturiran. Neka je* $\mathfrak{M}$ *konačan model i* A *njegov proizvoljni (konačan) podskup, te neka je* $\Gamma(x)$ *skup formula jezika prvog reda koji je konzistentan s teorijom modela* $\mathfrak{M}_A$. *Iz definicije 1.11 slijedi da postoji model* $\mathfrak{N}$ *koji je ekvivalentan s modelom* $\mathfrak{M}_A$ *i u njemu je ispunjiv* $\Gamma(x)$. *Međutim, s obzirom da su* $\mathfrak{M}_A$ *i* $\mathfrak{N}$ *konačni modeli, njihova ekvivalencija povlači izomorfizam (vidi [2, strana 32.]), pa je* $\Gamma(x)$ *ispunjiv u* $\mathfrak{M}$.

(ii) *Model baziran na uređaju racionalnih brojeva* $(\mathbb{Q}, <)$ *je također prebrojivo saturiran. Odgovarajući jezik* $\mathcal{L}^1$ *sadrži binarne relacijske simbole* $<$ *i* $=$. *Uzmimo proizvoljan prebrojiv podskup* A *od* $\mathbb{Q}$ *i neka je* $\Gamma(x)$ *skup formula proširenja* $\mathcal{L}^1[A]$ *konzistentnih s teorijom modela* $(\mathbb{Q}, <, a)_{a\in A}$. *Tada, zbog definicije 1.11, postoji model* $\mathfrak{N}$ *iste teorije u kojem je ispunjiv* $\Gamma(x)$. *Neka je sada* $\mathfrak{N}'$ *prebrojiv jednostavan podmodel od* $\mathfrak{N}$ *koji sadrži barem jedan element u kojem je istinit* $\Gamma(x)$. *Tada je* $\mathfrak{N}'$ *prebrojiv gust linearno uređen model bez krajnjih točaka i stoga je uređaj od* $\mathfrak{N}'$ *izomorfan s* $(\mathbb{Q}, <)$ *)(vidi [2, strana 38.]). Interpretacije konstanti* $\underline{a}$ *u* $\mathfrak{N}$ *za elemente* $a \in A$ *mogu se kopirati u* $\mathfrak{N}'$. *Stoga,* $\Gamma(x)$ *je ispunjiv u* $\mathfrak{N}'$ *i* $\mathfrak{N}$, *pa onda i u početnom modelu, kao što se tražilo.*

(iii) *Model $\mathfrak{N}$ baziran na uređaju prirodnih brojeva nije prebrojivo saturiran. Promotrimo skup formula*

$$\Gamma(x) := \{\exists y_1 (y_1 < x), \ldots, \exists y_1 \ldots y_n (y_1 < \ldots < y_n < x), \ldots\}.$$

Očito je skup $\Gamma(x)$ konzistentan s teorijom modela $\mathfrak{N}$ i svaki njegov konačni podskup je ispunjiv u tom modelu. Ipak, $\Gamma(x)$ nije ispunjiv u $\mathfrak{N}$.

Prethodna diskusija nije nam odgovorila na bitno tehničko pitanje: kako dobiti prebrojivo saturirane modele. Na to pitanje ćemo odgovoriti na kraju ovog poglavlja. Sada ćemo uvesti pojam presudan za tu konstrukciju, pojam ultraprodukta.

Pretpostavimo da je U ultrafiltar nad nepraznim skupom I i za svaki $i \in I$, W_i je nosač modela $\mathfrak{M}_i$. Neka je $W = \prod_{i \in I} W_i$ Kartezijev produkt tih skupova, tj. W je skup svih funkcija f na domeni I takvih da za svaki $i \in I$, $f(i) \in W_i$.

Na skupu W definiramo relaciju $\sim_U$ na sljedeći način:

$$f \sim_U g \text{ ako i samo ako } \{i \mid f(i) = g(i)\} \in U.$$

Lako se vidi da je $\sim_U$ relacija ekvivalencije na skupu W.

Za svaku funkciju $f \in \prod_{i \in I} W_i$ neka f^U označava klasu ekvivalencije kojoj f pripada s obzirom na relaciju $\sim_U$. Skup svih klasa ekvivalencije $\left\{f^U \mid f \in \prod_{i \in I} W_i\right\}$ ćemo označavati s $\prod_U W_i$ i govorit ćemo da je to ultraprodukt familije $(W_i \mid i \in I)$. U slučaju da su svi skupovi W_i jednaki, npr. $W_i = W$ za svaki i, tada taj ultraprodukt nazivamo ultrapotencijom skupa W i pišemo $\prod_U W$.

Prije definicije ultraprodukta familije modela, iskazat ćemo lemu o neovisnosti o izboru reprezentanata, da bi pokazali da će definicija biti dobra.

Lema 1.5
Neka je $(\mathfrak{M}_i \mid i \in I)$ familija modela jezika $\mathcal{L}^1$ teorije prvog reda i U proizvoljan ultrafiltar nad I. Tada vrijedi:

(i) *Za sve relacijske simbole $R^{\mathfrak{M}_i} \in \mathcal{L}^1$ te sve $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n \in \prod_{i \in I} W_i$ koji imaju svojstvo $f_1 \sim_U g_1, \ldots, f_n \sim_U g_n$, imamo*

$$\left\{i \in I \mid R^{\mathfrak{M}_i} f_1(i) \ldots f_n(i)\right\} \in U \quad \textit{ako i samo ako}$$
$$\left\{i \in I \mid R^{\mathfrak{M}_i} g_1(i) \ldots g_n(i)\right\} \in U.$$

(ii) *Neka je* $F \in \mathcal{L}^1$ *funkcijski simbol, te* $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n \in \prod_{i \in I} W_i$ *koji imaju svojstvo* $f_1 \sim_U g_1, \ldots, f_n \sim_U g_n$. *Neka je* $f : I \to \bigcup W_i$ *definirana sa* $f(i) = F^{\mathfrak{M}_i}(f_1(i), \ldots, f_n(i))$, *te neka je* $g : I \to \bigcup W_i$ *definirana sa* $g(i) = F^{\mathfrak{M}_i}(g_1(i), \ldots, g_n(i))$. *Tada je* $f \sim_U g$.

Sada možemo definirati ultraprodukt familije modela.

Definicija 1.13
Za danu familiju modela $(\mathfrak{M}_i \mid i \in I)$ *jezika* $\mathcal{L}^1$ *teorije prvog reda i ultrafiltar* U *nad skupom indeksa* I*, definiramo ultraprodukt kao model* $\mathfrak{M}$ *jezika* $\mathcal{L}^1$ *koji ima sljedeća svojstva:*

(i) *Nosač modela* $\mathfrak{M}$ *je skup* $\prod_U W_i$, *gdje je* W_i *nosač modela* $\mathfrak{M}_i$.

(ii) *Za svaki konstantni simbol* $c \in \mathcal{L}^1$ *definiramo njegovu interpretaciju u* $\mathfrak{M}$ *kao* k^U, *gdje je* k *funkcija sa* I *u* $\bigcup W_i$ *koja je definirana sa*

$$k(i) = c^{W_i}.$$

(iii) *Za svaki n-arni funkcijski simbol* F *iz* $\mathcal{L}^1$, *njegova interpretacija u modelu* $\mathfrak{M}$ *je funkcija* $F^{\mathfrak{M}}$ *definirana sa*

$$F^{\mathfrak{M}}\left(f_1^U, \ldots, f_n^U\right) = f^U,$$

pri čemu je f *definiran sa*

$$f(i) = F^{\mathfrak{M}_i}(f_1(i), \ldots, f_n(i)).$$

(iv) *Za svaki n-arni relacijski simbol* R *iz* $\mathcal{L}^1$, *njegova interpretacija u modelu* $\mathfrak{M}$ *je relacija* $R^{\mathfrak{M}}$ *definirana sa*

$$R^{\mathfrak{M}} f_1^U \ldots f_n^U \text{ ako i samo ako}$$
$$\left\{i \in I \mid R^{\mathfrak{M}_i} f_1(i) \ldots f_n(i)\right\} \in U.$$

Ultraprodukt familije modela $(\mathfrak{M}_i \mid i \in I)$ *nad ultrafiltrom* U *označavamo s* $\prod_U \mathfrak{M}_i$.
Za ultraprodukt modela kažemo da je ultrapotencija, i pišemo $\prod_U \mathfrak{M}$, *ako su svi modeli* $\mathfrak{M}_i$ *međusobno jednaki.*

Najbitniji rezultat vezan uz ultraprodukte je sljedeći teorem, često nazivan i Osnovnim teoremom o ultraproduktima.

Teorem 1.4 (Łośov teorem) *[2, strana 170]*
Neka je U ultrafiltar nad nepraznim skupom I. Za svaki $i \in I$, neka je $\mathfrak{M}_i$ model. Tada

(i) *Za svaki term $t(x_1, \ldots, x_n)$ i sve elemente $f_1^U, \ldots, f_n^U$ od $\mathfrak{M} = \prod_U \mathfrak{M}_i$ imamo*

$$t^{\mathfrak{M}}\left(f_1^U, \ldots, f_n^U\right) = g^U,$$

gdje je $g(i) = t^{\mathfrak{M}_i}[f_1(i), \ldots, f_n(i)]$, za sve $i \in I$.

(ii) *Za svaku formulu $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ jezika $\mathcal{L}^1$ teorije prvog reda i sve funkcije $f_1^U, \ldots, f_n^U$ iz $\prod_U \mathfrak{M}_i$ imamo*

$$\prod_U \mathfrak{M}_i \vDash \alpha\left[f_1^U, \ldots, f_n^U\right] \text{ ako i samo ako}$$
$$\{i \in I \mid \mathfrak{M}_i \vDash \alpha[f_1(i), \ldots, f_n(i)]\} \in U.$$

Napomena.
U slučaju da se radi o ultrapotenciji modela $\mathfrak{M}$, očito vrijedi

$$\prod_U \mathfrak{M} \vDash \alpha\left[f_1^U, \ldots, f_n^U\right] \text{ ako i samo ako}$$
$$\mathfrak{M} \vDash \alpha[f_1(i), \ldots, f_n(i)] \text{ za svaki } i \in I.$$

Da bi sagradili prebrojivo saturirane modele, koristimo ultraprodukte bazirane na posebnoj vrsti ultrafiltara. Za ultrafiltar kažemo da je prebrojivo nepotpun ako nije zatvoren na prebrojive presjeke (naravno, bit će zatvoren na konačne presjeke).

Primjer 1.7
Promotrimo skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. Neka je U ultrafiltar nad $\mathbb{N}$ koji ne sadrži jednočlane skupove $\{n\}$ (dokazali smo da takav ultrafiltar postoji u primjeru 1.5). Tada, za sve n, $(\mathbb{N} \setminus \{n\}) \in U$. Ali,

$$\emptyset = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{N} \setminus \{n\}) \notin U.$$

Dakle, U je prebrojivo nepotpun.

Konačno, slijedi lema u kojoj ćemo dokazati egzistenciju prebrojivo saturiranih modela, odnosno pokazati kako od proizvoljnog modela konstruirati prebrojivo saturirani.

Lema 1.6
Neka je $\mathcal{L}^1$ prebrojiv jezik teorije prvog reda, U prebrojivo nepotpun ultrafiltar nad nepraznim skupom I, te $\mathfrak{M}$ model jezika $\mathcal{L}^1$. Tada je ultrapotencija $\prod_U \mathfrak{M}$ prebrojivo saturirana.

Dokaz.
Neka je A proizvoljan podskup od $\prod_U W$ kardinaliteta manjeg od ω i $\Sigma(x)$ proizvoljan skup formula jezika $\mathcal{L}^1[A]$. Trebamo pokazati da ako je $\Sigma(x)$ konačno ispunjiv u $(\prod_U \mathfrak{M})_A$, tada je $\Sigma(x)$ ispunjiv u $(\prod_U \mathfrak{M})_A$.
S obzirom da je $\mathcal{L}^1$ prebrojiv jezik, tada je i $\mathcal{L}^1[A]$ također prebrojiv. Vrijedi $((\prod_U \mathfrak{M}), a)_{a\in A} = \prod_U (\mathfrak{M}, a(i))_{a\in A}$ ([2, strana 208]). Dakle, $(\prod_U \mathfrak{M})_A$ je ultrapotencija modela za $\mathcal{L}^1[A]$, pa je dovoljno dokazati pomoćnu tvrdnju:

> Neka je $\Sigma(x)$ proizvoljan skup formula jezika $\mathcal{L}^1$. Ako je $\Sigma(x)$ konačno ispunjiv u $\prod_U \mathfrak{M}$, tada je $\Sigma(x)$ ispunjiv u $\prod_U \mathfrak{M}$.

Pretpostavimo da je svaki konačni podskup od $\Sigma(x)$ ispunjiv u $\prod_U \mathfrak{M}$. S obzirom da je $\mathcal{L}^1$ prebrojiv jezik, tada je i $\Sigma(x)$ prebrojiv, pa možemo pisati

$$\Sigma(x) = \{\sigma_1(x), \sigma_1(x), \ldots\}.$$

Ultrafiltar U je prebrojivo nepotpun, pa možemo pronaći prebrojivi padajući lanac

$$I = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$$

takav da su svi $I_n \in U$ i $\bigcap_n I_n = \emptyset$ (vidi [2, strana 201]). Tada, za svaki $i \in I$ postoji najveći $n_i < \omega$ takav da je $i \in I_{n_i}$.
Definiramo funkciju $f \in \prod_U W$ na sljedeći način. Ako je $n_i = 0$, tada za $f(i)$ izaberemo proizvoljan element od W. Inače, izaberemo $f(i) \in W$ takav da vrijedi

$$\mathfrak{M} \models \sigma_1(x) \wedge \ldots \wedge \sigma_{n_i}(x)[f(i)].$$

Takav sigurno postoji zato što je $\Sigma(x)$ konačno ispunjiv u $\prod_U \mathfrak{M}$, pa onda i u $\mathfrak{M}$ (Vidi Łośov teorem (ii)).
Sada, za sve $n > 0$ za koje je $i \in I_n$ vrijedi $n \leq n_i$, pa je $\mathfrak{M} \models \sigma_n[f(i)]$. Iz Łośovog teorema slijedi $\prod_U \mathfrak{M} \models \sigma_n[f^U]$ za sve $n > 0$, pa je $\Sigma(x)$ istinit u elementu f^U od $\prod_U \mathfrak{M}$. To dokazuje tvrdnju leme.

■

Poglavlje 2

Standardne translacije

U prošlom smo se poglavlju upoznali s pojmom modalne logike. Ono što nas zanima jest da li se, i kako, može povezati modalna logika s logikom prvog reda. To su pitanja kojima se bavi ovo poglavlje. Definirat ćemo preslikavanje sa skupa formula modalne logike u skup formula logike prvog reda i promotriti što nam ta veza omogućava. Da bi to napravili, prvo moramo definirati odgovarajući jezik, tj. jezik teorije prvog reda u koji ćemo prevesti modalne formule.

Definicija 2.1
Neka je Φ skup propozicionalnih varijabli. Sa $\mathcal{L}^1(\Phi)$ označavamo jezik teorije prvog reda s jednakošću koji ima unarne predikate $P_0, P_1, \ldots$ koji odgovaraju propozicionalnim varijablama $p_0, p_1, \ldots$ u Φ i binarni relacijski simbol R koji odgovara unarnom modalnom operatoru $\Diamond$. Pišemo $\alpha(x)$ da bi označili formulu α jezika teorije prvog reda s jednom slobodnom varijablom x.

Definicija 2.2 (Standardna translacija)
Neka je x varijabla jezika teorije prvog reda. Standardna translacija ST_x koja prevodi modalne formule u formule jezika $\mathcal{L}^1(\Phi)$ se definira na sljedeći način:

$$\begin{aligned} ST_x(p) &= Px \\ ST_x(\bot) &= x \neq x \\ ST_x(\neg\phi) &= \neg ST_x(\phi) \\ ST_x(\phi \vee \psi) &= ST_x(\phi) \vee ST_x(\psi) \\ ST_x(\Diamond\phi) &= \exists y\,(Rxy \wedge ST_y(\phi)) \end{aligned}$$

gdje je y nova varijabla, još neiskorištena u translaciji.

Lako se vidi da za logičku konstantu $\top$, bulovske veznike $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ i unarni modalni operator $\Box$ vrijede sljedeća pravila za standardnu translaciju:

$$ST_x(\top) = x = x$$

$$
\begin{aligned}
ST_x(\phi \wedge \psi) &= ST_x(\phi) \wedge ST_x(\psi) \\
ST_x(\phi \to \psi) &= ST_x(\phi) \to ST_x(\psi) \\
ST_x(\phi \leftrightarrow \psi) &= ST_x(\phi) \leftrightarrow ST_x(\psi) \\
ST_x(\Box\phi) &= \forall y\,(Rxy \to ST_y(\phi))
\end{aligned}
$$

Primjer 2.1
Pokazat ćemo kako ova definicija funkcionira na formuli $\Diamond(\Box p \to q)$.

$$
\begin{aligned}
ST_x(\Diamond(\Box p \to q)) &= \exists y_1\,(Rxy_1 \wedge ST_{y_1}(\Box p \to q)) \\
&= \exists y_1\,(Rxy_1 \wedge (ST_{y_1}(\Box p) \to ST_{y_1}(q))) \\
&= \exists y_1\,(Rxy_1 \wedge (\forall y_2\,(Ry_1y_2 \to ST_{y_2}(p)) \to Qy_1)) \\
&= \exists y_1\,(Rxy_1 \wedge (\forall y_2\,(Ry_1y_2 \to Py_2) \to Qy_1)).
\end{aligned}
$$

Primijetimo da standardna translacija modalne formule nije jedinstvena. Naime, još jedna ispravna translacija formule $\Diamond(\Box p \to q)$ jest

$$\exists y_{125}\,(Rxy_{125} \wedge (\forall y_{625}\,(Ry_{125}y_{625} \to Py_{625}) \to Qy_{125})).$$

Očito je da ovakvih rješenja ima beskonačno mnogo, i sva se razlikuju jedino u skupu novih varijabli. S ovom neodređenosti u definiciji standardne translacije ćemo se pozabaviti malo kasnije.

Standardna translacija je bitan alat u izučavanju modalne logike. Zato je bitno dobro razumjeti točno što ona radi. Za bilo koju modalnu formulu ϕ, $ST_x(\phi)$ će sadržavati točno jednu slobodnu varijablu koju koristimo da bi označili trenutni svijet. Ta slobodna varijabla omogućava da se pojam ispunjivosti definiran u logici prvog reda ponaša kao modalna ispunjivost. Nadalje, unarni modalni operatori $\Diamond$ i $\Box$ su translatirani kao kvantifikatori $\exists$ i $\forall$ koji su ograničeni da djeluju samo na svijetovima koji su u relaciji R. Time je postignuta svojevrsna imitacija djelovanja modalnih operatora u logici prvog reda.

Zanimljivo je sljedeće: model za modalni jezik $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ možemo promatrati kao model za jezik $\mathcal{L}^1(\Phi)$. Naime, binarnu relaciju R možemo koristiti kao relacijski simbol R, a skup $V(p_i)$ kao unarni predikat P_i. Stoga, ima smisla napisati

$$\mathfrak{M} \models ST_x(\phi)\,[w],$$

što znači da je formula $ST_x(\phi)$ jezika teorije prvog reda ispunjiva u modelu $\mathfrak{M}$ kada valuiramo slobodnu varijablu x sa svijetom w.

Propozicija 2.1 (Lokalna i globalna korespodencija na modelima) *Neka je ϕ formula modalne logike. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) *Za sve modele $\mathfrak{M}$ i sve svijetove w od $\mathfrak{M}$:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \vDash ST_x(\phi)[w].$$

(ii) *Za sve modele $\mathfrak{M}$:*

$$\mathfrak{M} \Vdash \phi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \vDash \forall x ST_x(\phi).$$

Dokaz.

(i) Dokaz provodimo indukcijom po složenosti formule ϕ, koju ćemo označavati s $k(\phi)$.
Neka je $k(\phi) = 0$. Tada je ϕ ili propozicionalna varijabla ili logička konstanta $\perp$. Ako je ϕ propozicionalna varijabla, tada za proizvoljne $\mathfrak{M}, w$ vrijedi

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, w \Vdash p &\Leftrightarrow w \in V(p) \\ &\Leftrightarrow w \in P \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash Pw \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash ST_x(p)[w]. \end{aligned}$$

Ako je $\phi = \perp$, tada, pošto $ST_x(\perp) = x \neq x$, po definiciji imamo $\mathfrak{M}, w \nVdash \perp$ i $\mathfrak{M} \nvDash ST_x(\perp)[w]$.
Neka tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i sve formule ψ za koje je $k(\psi) < n$. Neka je ϕ formula takva da je $k(\phi) = n$. Razlikujemo slučajeve s obzirom na oblik formule ϕ.

a) Formula ϕ je oblika $\neg\psi$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}, w \Vdash \phi &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash \neg\psi \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \nVdash \psi \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \nvDash ST_x(\psi)[w] \text{ (zbog pp indukcije)} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash \neg ST_x(\psi)[w] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash ST_x(\neg\psi)[w] \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash ST_x(\phi)[w]. \end{aligned}$$

b) Formula ϕ je oblika $\psi \vee \eta$. Očito je $k(\psi) < n$ i $k(\eta) < n$ pa vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, w \Vdash \phi &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash \psi \vee \eta \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash \psi \text{ ili } \mathfrak{M}, w \Vdash \eta \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash ST_x(\psi)[w] \text{ ili } \mathfrak{M} \vDash ST_x(\eta)[w] \text{ (pp indukcije)} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash ST_x(\psi \vee \eta)[w] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash ST_x(\phi)[w].
\end{aligned}$$

c) Formula ϕ je oblika $\Diamond\psi$. Tada zbog $k(\psi) < n$ imamo

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, w \Vdash \phi &\Leftrightarrow \mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi \\
&\Leftrightarrow \exists v \in \mathfrak{M} \text{ takav da } Rwv \text{ i } \mathfrak{M}, w \Vdash \psi \\
&\Leftrightarrow \exists v \in \mathfrak{M} \text{ takav da } Rwv \text{ i } \mathfrak{M} \vDash ST_x(\psi) \text{ (pp indukcije)} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash \exists v \left(Rwv \wedge ST_x(\psi)[w]\right) \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash ST_x(\Diamond\psi)[w] \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash ST_x(\phi)[w].
\end{aligned}$$

(ii) Lako se dokaže koristeći tvrdnju (i). Naime, za proizvoljni $\mathfrak{M}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} \Vdash \phi &\Leftrightarrow (\forall w \in \mathfrak{M})(\mathfrak{M}, w \Vdash \phi) \\
&\Leftrightarrow (\forall w \in \mathfrak{M})(\mathfrak{M} \vDash ST_x(\phi)[w]) \text{ (zbog tvrdnje (i))} \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{M} \vDash \forall x ST_x(\phi).
\end{aligned}$$

■

Što možemo zaključiti iz prethodne propozicije? Očito je da su modalne formule ekvivalentne formulama teorije prvog reda s jednom slobodnom varijablom. Propozicija 2.1 je most između modalne logike i logike prvog reda. Kao posljedicu ima da smijemo koristiti rezultate, ideje i tehnike dokazivanja iz logike prvog reda u modalnoj logici i obrnuto.

Na primjerima ćemo pokazati što se smije koristiti iz logike prvog reda u modalnoj logici i obrnuto. Također ćemo pokazati neke rezultate koji nisu prenosivi.

Primjer 2.2
Logika prvog reda ima svojstvo kompaktnosti: ako je Θ skup formula teorije prvog reda i svaki konačni podskup od Θ je ispunjiv, tada je i Θ ispunjiv. Promotrimo svojstvo kompaktnosti u okvirima modalne logike. Neka je Θ

skup modalnih formula čiji je svaki konačni podskup ispunjiv. Definiramo skup formula teorije prvog reda

$$\Sigma = \{ST_x(\phi) \mid \phi \in \Theta\}.$$

Svaki konačni podskup od Θ *ima model, pa iz Propozicije 2.1* (i) *slijedi da svaki konačni podskup od* Σ *ima model. Zbog svojstva kompaktnosti logike prvog reda vrijedi da i* Σ *ima model. Konačno, opet zbog Propozicije 2.1* (i), Θ *ima model. Dakle, modalna logika posjeduje svojstvo kompaktnosti.*

Primjer 2.3
Za formule logike prvog reda vrijedi Löwenheim-Skolem svojstvo "na dolje": ako skup formula teorije prvog reda ima beskonačan model, onda ima i prebrojiv model. Pitamo se da li i modalna logika ima to svojstvo.
Neka je Θ *skup modalnih formula i neka je* $\mathfrak{M}$ *beskonačan model za* Θ. *Iz Propozicije 2.1 tada slijedi da je* $\mathfrak{M} \models ST_x(\phi)$, *za sve* $\phi \in \Theta$. *To znači da za skup* $\Sigma = \{ST_x(\phi) \mid \phi \in \Theta\}$ *formula logike prvog reda postoji beskonačan model (to je* $\mathfrak{M}$*). Iz Löwenheim-Skolem teorema "na dolje" za logiku prvog reda slijedi da za* Σ *postoji prebrojiv model* $\mathfrak{N}$. *Iz Propozicije 2.1 tada slijedi* $\mathfrak{N} \Vdash \Theta$.

Primjer 2.4
Zanimljivo je pogledati što modalna logika daje logici prvog reda. Bitna razlika između logike prvog reda i modalne logike jest to što je modalna logika odlučiva, a logika prvog reda nije. Koristeći modalnu odlučivost, moguće je locirati odlučive fragmente logike prvog reda.
S druge strane, ne mogu se svi rezultati iz modalne logike upotrijebiti u logici prvog reda. Može se pokazati da modalna logika ima svojstvo konačnosti, tj. ako za formulu ϕ *modalne logike postoji model, tada za* ϕ *postoji konačni model (vidi [1, strana 73.]). No, logika prvog reda nema to svojstvo. Na primjer, formula*

$$\begin{aligned} \phi = \forall x \exists y R(x,y) \quad &\wedge \quad \forall x \forall y (R(x,y) \to \neg R(x,y)) \quad \wedge \\ &\wedge \quad \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \to (R(y,z) \to R(x,z))) \end{aligned}$$

je ispunjiva (jedan model je model baziran na uređaju prirodnih brojeva), ali se može pokazati da za ϕ *ne postoji konačan model (vidi [3, strana 126], zadatak 14.).*

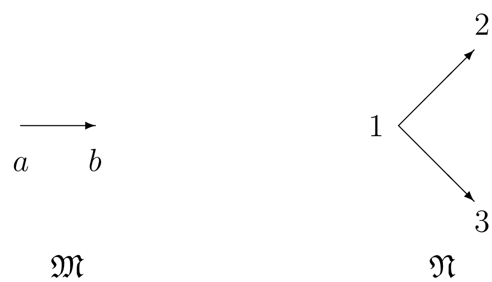
Uz pomoć standardne translacije, dobili smo novo istraživačko područje za proučavanje modalne izražajnosti na modelima - teoriju korespodencije. Propozicija 2.1 prebacuje taj problem na poznati teren, u logiku prvog reda.

Pitanje koje se sada javlja jest u koji fragment logike prvog reda standardna translacija preslikava formule modalne logike. Standardna translacija nije surjekcija (naime, translatirane modalne formule sadrže jedino ograničene kvantifikatore). Kako odrediti skup svih formula teorije prvog reda koje su ekvivalentne standardnim translacijama modalnih formula? Očito taj skup nije jednak skupu $\mathcal{L}^1(\Phi)$ već je njegov pravi podskup. Naime, dok su modalne formule invarijantne na bisimulacije, formule teorije prvog reda ne moraju biti. Stoga svaka formula teorije prvog reda koja nije invarijantna na bisimulacije ne može biti translacija modalne formule.

Primjer 2.5
Primjer formule logike prvog reda koja nije invarijantna na bisimulacije je

$$\phi = \exists y_1, y_2 \left(y_1 \neq y_2 \wedge Rxy_1 \wedge Rxy_2\right).$$

Neka su $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{N}$ *kao na slici, gdje strelice označavaju da su svijetovi u relaciji* R_m*, odnosno* R_n*.*



Definiramo relaciju između njihovih svijetova: $Z = \{(a,1), (b,2), (b,3)\}$. *Lako se vidi da je* Z *bisimulacija. Međutim, vrijedi*

$$\mathfrak{M} \nvDash \phi[a] \;\; i \; \mathfrak{N} \vDash \phi[1].$$

O kojem podskupu od $\mathcal{L}^1(\Phi)$ se radi? Standardnu translaciju možemo reformulirati tako da svakoj modalnoj formuli pridruži jako mali fragment od $\mathcal{L}^1(\Phi)$, točnije određeni fragment s konačno mnogo varijabli. Pretpostavimo da su varijable od $\mathcal{L}^1(\Phi)$ poredane na neki način. Tada je fragment sa n varijabli od $\mathcal{L}^1(\Phi)$ skup svih formula jezika $\mathcal{L}^1(\Phi)$ koje sadrže samo prvih n varijabli. Kao što možemo vidjeti, uz razumno ponovno korištenje varijabli, modalni jezik sa svojim unarnim operatorima može biti translatiran u fragment sa 2 varijable od $\mathcal{L}^1(\Phi)$.

Propozicija 2.2
Svaka modalna formula ϕ *ekvivalentna je formuli teorije prvog reda koja sadrži najviše dvije varijable.*

Dokaz.
Fiksirajmo dvije različite individualne varijable x i y. Definiramo dvije varijante ST_x i ST_y na sljedeći način:

$$\begin{aligned} ST_x(p) &= Px & ST_y(p) &= Py \\ ST_x(\bot) &= x \neq x & ST_y(\bot) &= y \neq y \\ ST_x(\neg\phi) &= \neg ST_x(\phi) & ST_y(\neg\phi) &= \neg ST_y(\phi) \\ ST_x(\phi \vee \psi) &= ST_x(\phi) \vee ST_x(\psi) & ST_y(\phi \vee \psi) &= ST_y(\phi) \vee ST_y(\psi) \\ ST_x(\Diamond\phi) &= \exists y\,(Rxy \wedge ST_y(\phi)) & ST_y(\Diamond\phi) &= \exists x\,(Ryx \wedge ST_x(\phi)). \end{aligned}$$

Tada, za svaku formulu ϕ, njezina ST_x translacija sadrži najviše dvije varijable, x i y, i $ST_x(\phi)$ je ekvivalentna originalnoj standardnoj translaciji od ϕ.

■

Primjer 2.6
Provjerimo kako ova modificirana standardna translacija radi. Promotrimo opet formulu $\Diamond(\Box p \to q)$.

$$\begin{aligned} ST_x(\Diamond(\Box p \to q)) &= \exists y\,(Rxy \wedge ST_y(\Box p \to q)) \\ &= \exists y\,(Rxy \wedge (ST_y(\Box p) \to ST_y(q))) \\ &= \exists y\,(Rxy \wedge (\forall x\,(Ryx \to ST_x(p)) \to Qy)) \\ &= \exists y\,(Rxy \wedge (\forall x\,(Ryx \to Px) \to Qy)). \end{aligned}$$

Kao što možemo primijetiti, prebacujemo se sa varijable x na varijablu y i obrnuto. Rezultat je translatirana formula koja sadrži samo dvije varijable (za razliku od tri, koliko smo ih imali u primjeru 2.1). Kao posljedica gornje propozicije, neodređenost koja se pojavljivala primjenom originalne definicije standardne translacije je nestala.

Sad dolazimo do novog pitanja: da li je svaka formula $\alpha(x)$ teorije prvog reda s dvije varijable ekvivalentna translaciji neke modalne formule? Odgovor na to pitanje je ne.

Primjer 2.7
Pokazat ćemo to na primjeru formule Rxx. Pretpostavimo da postoji formula ϕ modalne logike takva da je formula $ST_x(\phi)$ ekvivalentna formuli Rxx. Neka je $\mathfrak{M}$ jednočlani refleksivni model i w jedini svijet u $\mathfrak{M}$. Tada vrijedi $\mathfrak{M} \vDash Rxx\,[w]$. Neka je $\mathfrak{N}$ model baziran na strogom uređaju prirodnih brojeva. Očito, za svaki $v \in \mathfrak{N}$ vrijedi $\mathfrak{N} \vDash \neg Rxx\,[v]$. Neka je Z relacija koja povezuje svaki element iz $\mathfrak{N}$ s jedinim svijetom w u $\mathfrak{M}$ i pretpostavimo da su valuacije u $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ takve da je Z bisimulacija (stavimo naprimjer da su

sve propozicionalne varijable istinite u oba modela). Kako je $\mathfrak{M} \vDash Rxx[w]$, *tj.* $\mathfrak{M} \vDash ST_x(\phi)[w]$ *(pretpostavili smo da je* Rxx *ekvivalentno* $ST_x(\phi)$*), iz Propozicije 2.1 slijedi da je* $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$. *Ali, za svaki* v *iz* $\mathfrak{N}$ *imamo da je* $v \underline{\leftrightarrow} w$, *stoga je* $\mathfrak{N}, v \Vdash \phi$. *Sada, zbog Propozicije 2.1 i pretpostavke da je* $ST_x(\phi)$ *ekvivalentna formuli* Rxx, *vrijedi* $\mathfrak{N} \vDash Rxx[v]$, *što je kontradikcija sa* $\mathfrak{N} \vDash \neg Rxx[v]$.

Pronašli smo formulu teorije prvog reda sa samo jednom varijablom za koju ne postoji ekvivalentna translatirana modalna formula. To nam pokazuje da je fragment logike prvog reda koji je "pogođen" standardnom translacijom formula modalne logike još manji od fragmenta sa 2 varijable od $\mathcal{L}^1(\Phi)$. O kojem se točno fragmentu radi, saznat ćemo u jednom od narednih poglavlja.

Za kraj, dajemo popis nekih modalnih formula i njima ekvivalentnih formula teorije prvog reda.

MODALNA FORMULA	FORMULA PRVOG REDA	NAZIV SVOJSTVA
$p \to \Diamond p$	$\forall x (Rxx)$	refleksivnost
$\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$	$\forall x, y, z ((Rxy \wedge Ryz) \to Rxz)$	tranzitivnost
$p \to \Box\Diamond p$	$\forall x, y (Rxy \to Ryx)$	simetričnost
$\Diamond p \to \Box\Diamond p$	$\forall x, y, z ((Rxy \wedge Rxz) \to Ryz)$	euklidska relacija

Poglavlje 3

Modalna saturacija pomoću ultrafiltar proširenja

Bisimulacije i standardne translacije su dva oruđa koja su nam potrebna da bi razumjeli modalnu izražajnost preko modela. U ovom poglavlju ćemo uvesti i treće: ultrafiltar proširenja. Prvo ćemo generalizirati ideje iz diskusije o bisimulacijama, i to preko Hennessy-Milnerovih klasa i modalno saturiranih modela. Zatim ćemo uvesti ultrafiltar proširenja kao način gradnje modalno saturiranih modela. Tada ćemo pokazati da, iako modalna ekvivalencija ne povlači bisimularnost, ona povlači bisimularnost negdje drugdje - na ultrafiltar proširenjima modela.

3.1 M-saturacija

Kao što smo vidjeli u Poglavlju 1, bisimularnost povlači modalnu ekvivalenciju, ali obrat općenito ne vrijedi (vidi primjer 1.1). Teorem 1.2 nam je pokazao da obrat vrijedi u specijalnom slučaju slikovno-konačnih modela. Sad želimo generalizirati taj teorem.

Definicija 3.1 (Hennessy-Milnerove klase)
Neka je $\mathbf{K}$ *klasa modela modalne logike. Kažemo da je* $\mathbf{K}$ *Hennessy-Milnerova klasa ili da ima Hennessy-Milnerovo svojstvo ako za svaka dva modela* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *u* $\mathbf{K}$ *i bilo koja dva svijeta* $w \in \mathfrak{M}$ *i* $w' \in \mathfrak{M}'$,

$$w \leftrightsquigarrow w' \text{ povlači } \mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'.$$

Očit primjer klase koja ima Hennessy-Milnerovo svojstvo jest klasa slikovno-konačnih modela (slijedi iz Hennessy-Milnerovog teorema).

Ako generaliziramo pojam slikovno-konačnih modela, doći ćemo do pojma modalno-saturiranih ili, skraćeno rečeno, m-saturiranih modela. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model, w svijet u $\mathfrak{M}$ i neka je $\Sigma = \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots\}$ beskonačan skup formula. Pretpostavimo da w ima sljedbenike v_0, v_1, v_2, $\ldots$ gdje su redom istiniti ϕ_0, $\phi_0 \wedge \phi_1$, $\phi_0 \wedge \phi_1 \wedge \phi_2$, $\ldots$ Ako postoji sljedbenik od w takav da su sve formule od Σ na njemu istinite, tada za taj model kažemo da je m-saturiran. M-saturacija je dakle vrsta svojstva kompaktnosti, zato što je dovoljno pronaći odgovarajućeg sljedbenika za proizvoljne konačne podskupove od Σ.

Definicija 3.2 (m-saturacija)
Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model, $X \subseteq W$ i Σ skup modalnih formula. Σ je ispunjiv u X ako postoji svijet $x \in X$ takav da je $\mathfrak{M}, x \Vdash \phi$ za sve $\phi \in \Sigma$. Σ je konačno ispunjiv u X ako je svaki konačni podskup od Σ ispunjiv u X.
Za model $\mathfrak{M}$ kažemo da je m-saturiran ako za svaki svijet $w \in W$ i svaki skup modalnih formula Σ vrijedi:

> *ako je Σ konačno ispunjiv u skupu svih sljedbenika od W, tada je Σ ispunjiv u skupu svih sljedbenika od W.*

Propozicija 3.1
Svaka klasa m-saturiranih modela modalne logike ima Hennessy-Milnerovo svojstvo.

Dokaz.
Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ dva m-saturirana modela. Dovoljno je dokazati da je relacija $\leftrightsquigarrow$ modalne ekvivalencije između svijetova iz $\mathfrak{M}$ i svijetova iz $\mathfrak{M}'$ bisimulacija. Ograničit ćemo se na dokaz uvjeta "forth" (uvjet za propozicionalne varijable je trivijalno zadovoljen, a dokaz uvjeta "back" ide analogno ovome).
Pretpostavimo da su w, v iz $\mathfrak{M}$ i w' iz $\mathfrak{M}'$ takvi da vrijedi Rwv i $w \leftrightsquigarrow w'$. Neka je Σ skup svih formula koje su istinite na svijetu v. Očito je da za svaki konačni podskup Δ od Σ imamo $\mathfrak{M}, v \Vdash \bigwedge \Delta$. Stoga vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond \bigwedge \Delta$. S obzirom da je $w \leftrightsquigarrow w'$, slijedi da je $\mathfrak{M}', w' \Vdash \Diamond \bigwedge \Delta$ pa w' ima R'-sljedbenika v_Δ takvog da vrijedi $\mathfrak{M}, v_\Delta \Vdash \bigwedge \Delta$. Drugim riječima, Σ je konačno ispunjiv u skupu sljedbenika od w'. Tada, zbog m-saturacije, slijedi da postoji $v' \in \mathfrak{M}'$ takav da je $R'w'v'$ i $v' \Vdash \Sigma$.
Time smo dokazali da za svaku modalnu formulu ϕ za koju je $v \Vdash \phi$ imamo $v' \Vdash \phi$. Dokažimo da vrijedi i obrat. Pretpostavimo da je ϕ modalna formula takva da vrijedi $v \nVdash \phi$. Tada je $v \Vdash \neg\phi$. Međutim, zbog upravo dokazanog, imamo $v' \Vdash \neg\phi$, tj. $v' \nVdash \phi$. Stoga, vrijedi $v \leftrightsquigarrow v'$.

■

3.2 Ultrafiltar proširenja

U prošlom smo se odjeljku upoznali s pojmom m-saturiranih modela. Pitamo se kako zapravo gradimo takve modele. Tu nam pomažu takozvana ultrafiltar proširenja. Ultrafiltar proširenje strukture je svojevrsno dovršenje originalne strukture. Konstrukcija dodaje nove svijetove modelu da bi ga načinila m-saturiranim. Rezultat je nekad model izomorfan originalu, ali kad radimo s beskonačnim modelima, ultrafiltar proširenje uvijek dodaje mnogo novih točaka.

Da bi definirali što su zapravo ultrafiltar proširenja, prvo moramo uvesti dvije nove operacije.

Definicija 3.3
Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model modalne logike. Za binarnu relaciju R definiramo dvije operacije $m_\Diamond$ i $m_\Diamond^\delta$ na partitivnom skupu $\mathcal{P}(W)$ od W.

$$\begin{aligned} m_\Diamond (X) &:= \{w \in W \mid \text{ postoji } v \text{ takav da } Rwv \text{ i } v \in X\} \\ m_\Diamond^\delta (X) &:= \{w \in W \mid \text{ za svaki } v \text{ takav da je } Rwv \text{ vrijedi } v \in X\}. \end{aligned}$$

Drugim riječima, $m_\Diamond (X)$ je skup svih svijetova koji su u relaciji s nekim svijetovima iz X, a $m_\Diamond^\delta (X)$ je skup svih svijetova koji su u relaciji jedino sa svijetovima iz X.

Iz definicije direktno slijedi da za svaki model $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i svaku formulu ϕ vrijedi

$$V(\Diamond\phi) = m_\Diamond (V(\phi)) \text{ i } V(\Box\phi) = m_\Diamond^\delta (V(\phi)).$$

Sljedeća propozicija nam pokazuje dualnost operacija $m_\Diamond$ i $m_\Diamond^\delta$.

Propozicija 3.2
Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model modalne logike. Za unarni modalni operator $\Diamond$ i za svaki X podskup od W vrijedi

$$m_\Diamond^\delta (X) = W \setminus m_\Diamond (W \setminus X).$$

Dokaz.
Promotrimo desnu stranu gornje skupovne jednakosti. Iz definicije operacije $m_\Diamond^\delta$ slijedi da vrijedi

$$m_\Diamond (W \setminus X) = \{w \in W \mid \text{ postoji } v \text{ takav da je } Rwv \text{ i } v \in W \setminus X\}.$$

Sada imamo

$$
\begin{aligned}
W \setminus m_{\Diamond}(W \setminus X) &= \{w \in W \mid w \notin m_{\Diamond}(W \setminus X)\} \\
&= \{w \in W \mid \neg(\text{ postoji } v \text{ takav da } Rwv \text{ i } v \in W \setminus X)\} \\
&= \{w \in W \mid \text{ za svaki } v \text{ vrijedi } \neg(Rwv) \text{ ili } v \notin W \setminus X\} \\
&= \{w \in W \mid \text{ za svaki } v \text{ vrijedi } \neg(Rwv) \text{ ili } v \in X\} \\
&= \{w \in W \mid \text{ za svaki } v \text{ takav da je } Rwv \text{ slijedi } v \in X\} \\
&= m_{\Diamond}^{\delta}(X).
\end{aligned}
$$

■

Sada možemo definirati ultrafiltar proširenja. Primijetit ćemo da će svijetovi u ultrafiltar proširenju modela $\mathfrak{M}$ biti ultrafiltri nad nosačem modela $\mathfrak{M}$.

Definicija 3.4
Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model modalne logike. Ultrafiltar proširenje modela $\mathfrak{M}$ je model $\mathfrak{ue}\mathfrak{M} = (Uf(W), R^{ue}, V^{ue})$, gdje je $Uf(W)$ skup svih ultrafiltara nad W, R^{ue} binarna relacija na skupu $Uf(W)$ za koju vrijedi $R^{ue}u_0u_1$ ako i samo ako za sve $X \subseteq W$ takve da $X \in u_1$ vrijedi $m_{\Diamond}(X) \in u_0$, a $V^{ue}(p_i)$ je skup svih ultrafiltara koji sadrže $V(p_i)$.

Bitno je dobro razumjeti što nam govori ova definicija. Primijetimo da sastavni dijelovi novog modela imaju logičku interpretaciju. Podskup od W možemo promatrati kao interpretaciju suda. Tada bi filtar nad nosačem bio skup sudova istinitih u novom modelu, i to logički zatvoren skup s obzirom na lijepa svojstva koja ima filtar po definiciji. Stoga bi ultrafiltar mogao igrati ulogu svijeta, ili, kako ćemo ga zvati, svijet proširenja. Naime, za svaki sud, ultrafiltar odlučuje da li je taj sud istinit na njemu ovisno o tome da li ga sadrži. Pritom ne moramo brinuti o sudu koji odgovara logičkoj konstanti $\perp$ (to je, očito, prazan skup), zato što ultrafiltar ne sadrži $\emptyset$.

Pitanje je kako ovo povezati sa ultrafiltar proširenjima. U danom modelu neće svaki svijet proširenja biti iskorišten, u smislu da postoji svijet originalnog modela koji zadovoljava sve i samo one sudove koji pripadaju svijetu proširenja. Samo oni svijetovi proširenja koji odgovaraju glavnim ultrafiltrima su iskorišteni. Gradimo model $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}$ dodajući mu svaki svijet proširenja za $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}$ kao svijetove nosača. Stoga, u $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}$ je ispunjiv svaki sud iz $\mathfrak{M}$.

Sada bi trebalo definirati relaciju R^{ue} tako da je $R^{ue}u_0u_1$ ako je u_0 na neki način u relaciji R sa u_1. S obzirom da smo uz pomoć operacije $m_\Diamond$ proširili djelovanje relacije R na skupove, prirodno je definirati da vrijedi $R^{ue}u_0u_1$ ako su elementi od u_0 i u_1 u relaciji, tj. da $X \in u_1$ povlači $m_\Diamond(X) \in u_0$.

Sljedeći primjer nam pokazuje kako se dio gornje definicije može reformulirati.

Primjer 3.1

Za dani model $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i ultrafiltre u i v nad W želimo pokazati da vrijedi

$$R^{ue}uv \text{ ako i samo ako } \left\{Y \mid m_\Diamond^\delta(Y) \in u\right\} \subseteq v.$$

Neka je $R^{ue}uv$ i označimo sa w skup $\left\{Y \mid m_\Diamond^\delta(Y) \in u\right\}$. Želimo dokazati da je $w \subseteq v$.
Za proizvoljni skup X vrijedi:

$$\begin{aligned} X \in w &\Rightarrow m_\Diamond^\delta(X) \in u \\ &\Rightarrow W \setminus m_\Diamond^\delta(X) \notin u \\ &\Rightarrow m_\Diamond(W \setminus X) \notin u \text{ (zbog prop. 3.2)} \\ &\Rightarrow W \setminus X \notin v \\ &\Rightarrow X \in v. \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $w \subseteq v$.
Dokažimo sada obrat. Neka je $w \subseteq v$. Treba pokazati da vrijedi $R^{ue}uv$, tj da za svaki $X \in v$ vrijedi $m_\Diamond(X) \in u$. Pretpostavimo suprotno. Neka postoji $X \in v$ takav da $m_\Diamond(X) \notin u$. Tada imamo

$$\begin{aligned} m_\Diamond(X) \notin u &\Rightarrow W \setminus m_\Diamond(X) \in u \\ &\Rightarrow m_\Diamond^\delta(W \setminus X) \in u \text{ (zbog prop. 3.2)} \\ &\Rightarrow W \setminus X \in w \\ &\Rightarrow W \setminus X \in v \text{ (zbog } w \subseteq v) \\ &\Rightarrow X \notin v, \end{aligned}$$

a to je kontradikcija s pretpostavkom $X \in v$. Stoga vrijedi $R^{ue}uv$.

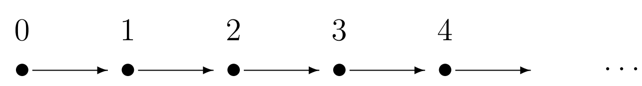
Posebnu ulogu u ultrafiltar proširenjima igraju tzv. glavni ultrafiltri nad W. Ako identificiramo svijet w modela $\mathfrak{M}$ s glavnim ultrafiltrom π_w, lako se vidi da je svaki model $\mathfrak{M}$ izomorfan nekom podmodelu svog ultrafiltar proširenja. Naime, vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned} Rwv &\Leftrightarrow w \in m_{\Diamond}(X) \text{ za sve } X \subseteq W \text{ takve da je } v \in X \\ &\Leftrightarrow m_{\Diamond}(X) \in \pi_w \text{ za sve } X \subseteq W \text{ takve da je } X \in \pi_v \\ &\Leftrightarrow R^{ue}\pi_w\pi_v. \end{aligned}$$

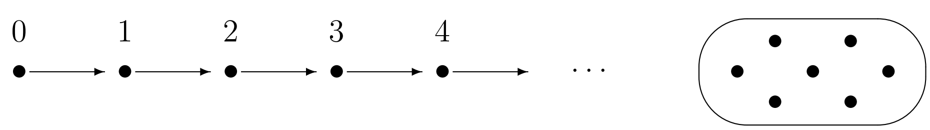
Da bi bolje razumjeli ultrafiltar proširenja, poslužit će nam idući primjer.

Primjer 3.2

Promotrimo model $\mathfrak{N}$ baziran na strogom uređaju prirodnih brojeva.



Treba pronaći ultrafiltar proširenje od $\mathfrak{N}$. Postoje dvije vrste filtara nad beskonačnim skupom: glavni ultrafiltri koji su injektivno preslikani elementi skupa, i ostali koji sadrže sve kofinitne skupove, i to samo beskonačne (vidi Lemu 1.4). S obzirom da znamo da glavni ultrafiltri tvore izomorfnu sliku modela $\mathfrak{N}$ unutar $\mathfrak{ue}\mathfrak{N}$, pitamo se gdje su ostali. Za odgovor na to pitanje ključna je činjenica da za svaki par ultrafiltara w i v vrijedi da ako v nije glavni filtar, tada je Rwv. To se lako vidi zato što za svaki $X \in v$ vrijedi $m_{\Diamond}(X) = \mathbb{N} \in w$ (X je beskonačan pa za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji m takav da je $n < m$ i $m \in X$). Ovo nam pokazuje da se $\mathfrak{ue}\mathfrak{N}$ sastoji od izomorfne slike od $\mathfrak{N}$ na koju se nastavlja neprebrojiva hrpa filtara koji nisu glavni.



Slijede neki bitni rezultati u vezi s ultrafiltar proširenjima. Prvo ćemo pokazati svojstvo invarijantnosti, a zatim da su m-saturirani. Na kraju ćemo pokazati novu karakterizaciju modalne ekvivalencije svijetova preko pojma ultrafiltar proširenja.

Propozicija 3.3

Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model modalne logike. Za svaku formulu ϕ i svaki ultrafiltar u nad W vrijedi

$$V(\phi) \in u \text{ ako i samo ako } \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \phi.$$

Odavde, za svaki svijet w od $\mathfrak{M}$ imamo $w \leftrightsquigarrow \pi_w$.

Dokaz.
Dokaz prve tvrdnje provest ćemo indukcijom po složenosti formule ϕ.
Za $k(\phi) = 0$, tvrdnja slijedi direktno iz definicije od V^{ue}. Naime, za $\phi = p$ (gdje je p propozicionalna varijabla), imamo

$$V(p) \in u \Leftrightarrow u \in V^{ue}(p) \Leftrightarrow \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash p.$$

Ako je $\phi = \bot$, po definiciji imamo $V(\bot) \notin u$ (zbog $V(\bot) = \emptyset$) i $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \nVdash \bot$.
Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i za sve formule ψ složenosti manje od n.
Neka je ϕ formula složenosti točno n. Ovisno o obliku formule ϕ, imamo sljedeće slučajeve.

a) Neka je ϕ oblika $\neg\psi$. Imamo sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned} V(\neg\psi) \in u &\Leftrightarrow W \setminus V(\psi) \in u \\ &\Leftrightarrow V(\psi) \notin u \text{ (} u \text{ je ultrafiltar)} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \nVdash \psi \text{ (pp indukcije)} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \neg\psi. \end{aligned}$$

b) Formula ϕ je oblika $\psi \vee \eta$. Zbog Leme 1.3, slijedi

$$\begin{aligned} V(\psi \vee \eta) \in u &\Leftrightarrow V(\psi) \cup V(\eta) \in u \\ &\Leftrightarrow V(\psi) \in u \text{ ili } V(\eta) \in u \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \psi \text{ ili } \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \eta \text{ (pp indukcije)} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \psi \vee \eta. \end{aligned}$$

c) Neka je sada $\phi = \Diamond\psi$.
Pretpostavimo prvo da je $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\psi$. Tada postoji ultrafiltar v takav da je $R^{ue}uv$ i $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. Po pretpostavci indukcije, imamo da je $V(\psi) \in v$. Iz definicije relacije R^{ue} slijedi da je $m_\Diamond(V(\psi)) \in u$ pa tvrdnja slijedi zbog $m_\Diamond(V(\psi)) = V(\Diamond\psi)$.
Pretpostavimo sada da je $V(\Diamond\psi) \in u$. Želimo pronaći ultrafiltar v takav da je $V(\psi) \in v$ i $R^{ue}uv$. Zbog definicije relacije R^{ue} i primjera 3.1, uvjet $R^{ue}uv$ možemo zamijeniti uvjetom

$$v' := \left\{Y \mid m_\Diamond^\delta(Y) \in u\right\} \subseteq v.$$

Prvo ćemo dokazati da je skup v' zatvoren na konačne presjeke. Neka su X i Y elementi od v'. Po definiciji skupa v', $m_\Diamond^\delta(X)$ i $m_\Diamond^\delta(Y)$ su elementi ultrafiltra u. Lako se vidi da vrijedi $m_\Diamond^\delta(X \cap Y) = m_\Diamond^\delta(X) \cap$

$m_{\Diamond}^{\delta}(Y)$, pa je $m_{\Diamond}^{\delta}(X \cap Y) \in u$. Tada je $X \cap Y \in v'$.
Sada se želimo uvjeriti da za svaki $Y \in v'$ vrijedi $Y \cap V(\psi) \neq \emptyset$. Neka je Y proizvoljan element skupa v'. Tada je, po definiciji od v', $m_{\Diamond}^{\delta}(Y) \in u$. Kako je u zatvoren na konačne presjeke i ne sadrži $\emptyset$ (zato što je ultrafiltar), mora postojati x takav da je $x \in m_{\Diamond}^{\delta}(Y) \cap V(\Diamond\psi)$ (po pretpostavci je $V(\Diamond\psi) \in u$). Činjenica $x \in V(\Diamond\psi)$ povlači da x ima sljedbenika y u $V(\psi)$, a $x \in m_{\Diamond}^{\delta}(Y)$ povlači da je taj y iz Y. Dakle, $Y \cap V(\psi) \neq \emptyset$.
Konačno, iz činjenice da je v' zatvoren na konačne presjeke i da za svaki $Y \in v'$ vrijedi $Y \cap V(\psi) \neq \emptyset$, slijedi da je skup $v' \cup \{V(\psi)\}$ podskup od $\mathcal{P}(W)$ koji ima svojstvo konačnog presjeka (očito $\emptyset \notin v'$). Iz Teorema o ultrafiltru slijedi da postoji ultrafiltar v takav da je $v' \cup \{V(\psi)\} \subseteq v$. Taj ultrafiltar ima željena svojstva, $V(\psi) \in v$ i $R^{ue}uv$. Sada, zbog pretpostavke indukcije, slijedi $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$, a odavde $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\psi$ (zbog $R^{ue}uv$).

Druga tvrdnja propozicije slijedi direktno iz prve zato što vrijedi:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \Leftrightarrow w \in V(\phi) \Leftrightarrow V(\phi) \in \pi_w.$$

■

Primjer 3.3
Gornju propoziciju možemo upotrijebiti da bi usporedili relativnu izražajnu moć modalnih jezika. Promotrimo modalnu konstantu $\circlearrowleft$ za koju vrijedi

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \circlearrowleft \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \vDash \neg Rxx\,[v] \text{ za neki } v \text{ u } \mathfrak{M}.$$

Iz primjera 2.7 je jasno da se u modalnom jeziku ovakva modalnost ne može definirati. Isto možemo zaključiti i na primjeru 3.2 gdje je jasno da početni model ne podržava $\circlearrowleft$, a njegovo ultrafiltar proširenje da.

Sada ćemo povezati ključne pojmove ovog poglavlja - m-saturiranost i ultrafiltar proširenja.

Propozicija 3.4
Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model modalne logike. Tada je m-saturirano ultrafiltar proširenje $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}$.

Dokaz.
Neka je u ultrafiltar nad W, a Σ skup modalnih formula koji je konačno ispunjiv u skupu sljedbenika od u. Trebamo pronaći ultrafiltar u' takav da je $R^{ue}uu'$ i $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u' \Vdash \Sigma$. Definiramo

$$\Delta = \{V(\phi) \mid \phi \in \Sigma'\} \cup \left\{Y \mid m_{\Diamond}^{\delta}(Y) \in u\right\},$$

gdje je Σ' skup svih (konačnih) konjukcija formula iz Σ. Tvrdimo da skup Δ ima svojstvo konačnog presjeka. Skup $\left\{Y \mid m_{\Diamond}^{\delta}(Y) \in u\right\}$ je zatvoren na konačne presjeke (vidi dokaz Propozicije 3.3 *c)*). Lako se vidi da isto vrijedi za skup $\{V(\phi) \mid \phi \in \Sigma'\}$. Naime, za $V(\phi)$ i $V(\psi)$ vrijedi

$$V(\phi) \cap V(\psi) = V(\phi \wedge \psi),$$

a $\phi \wedge \psi$ je očito element od Σ'.
Treba još pokazati da za proizvoljni ϕ iz Σ' i proizvoljni skup $Y \subseteq W$ za koji je $m_{\Diamond}^{\delta}(Y) \in u$ imamo $V(\phi) \cap Y \neq \emptyset$. Ali, ako je $\phi \in \Sigma'$, tada, po pretpostavci, postoji u'', sljedbenik od u, takav da je $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u'' \Vdash \phi$, tj. $V(\phi) \in u''$. Zbog primjera 3.1, $m_{\Diamond}^{\delta}(Y) \in u$ povlači $Y \in u''$. Stoga je $V(\phi) \cap Y$ element ultrafiltra u'' pa ne može biti prazan.
Sada se, zbog Teorema o ultrafiltru, Δ može proširiti do ultrafiltra u'. Zbog konstrukcije skupa Δ, ultrafiltar u' je traženi sljedbenik od u u kojem je Σ istinit.

■

Konačno, stigli smo do glavnog rezultata ovog odjeljka, karakterizacije modalne ekvivalencije preko bisimularnosti negdje drugdje: između ultrafiltar proširenja.

Teorem 3.1
Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ *modeli modalne logike,* $w \in \mathfrak{M}$ *i* $w' \in \mathfrak{M}'$ *proizvoljni svijetovi. Tada*

$$\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}', w' \text{ ako i samo ako } \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \pi_w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{ue}\mathfrak{M}', \pi_{w'}.$$

Dokaz.
Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}', w'$. Ta tvrdnja je, zbog Propozicije 3.3, ekvivalentna sa $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \pi_w \leftrightsquigarrow \mathfrak{ue}\mathfrak{M}', \pi_{w'}$. S obzirom da su ultrafiltar proširenja m-saturirana (prethodna propozicija), i da m-saturirani modeli imaju Henessy-Milnerovo svojstvo (vidi propoziciju 3.1), slijedi da vrijedi $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \pi_w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{ue}\mathfrak{M}', \pi_{w'}$.
Obrat. Neka vrijedi $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \pi_w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{ue}\mathfrak{M}', \pi_{w'}$. Tada, zbog Teorema 1.1, vrijedi $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \pi_w \leftrightsquigarrow \mathfrak{ue}\mathfrak{M}', \pi_{w'}$, a to je ekvivalentno sa $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}', w'$.

■

Za kraj, pokazat ćemo da, općenito, istinitost formula teorije prvog reda nije očuvana na ultrafiltar proširenjima.

Primjer 3.4
Uzmimo formulu $\alpha(x)$ *i model* $\mathfrak{N}$ *kao u primjeru 2.5 i promotrimo svijet* 1. *Očito vrijedi* $\mathfrak{N} \vDash \alpha(x)[1]$. *Zanima nas da li vrijedi* $\mathfrak{ueN} \vDash \alpha(x)[\pi_1]$.
Iz definicije znamo da je $\pi_1 = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$. *Pitanje je da li postoje različiti ultrafiltri* u_1 *i* u_2 *takvi da* $R^{ue}\pi_1 u_1$ *i* $R^{ue}\pi_1 u_2$. *Razmislimo malo što zapravo znači* $R^{ue}\pi_1 u_1$*? To znači da vrijedi*

$$\left\{Y \mid m^{\delta}_{\Diamond}(Y) \in \pi_1\right\} \subseteq u_1.$$

S obzirom da svijetovi 2 i 3 nemaju sljedbenike, očito je $m^{\delta}_{\Diamond}(Y) = \{1\}$. *Stoga je* $\{\{2\}, \{3\}, \{2,3\}\} \subseteq u_1$. *No, tada je* $\{2\} \cap \{3\} = \emptyset \in u_1$, *što je kontradikcija s činjenicom da je* u_1 *ultrafiltar. Dakle, ne postoji* u_1 *takav da* $R^{ue}\pi_1 u_1$. *Odnosno, vrijedi*

$$\mathfrak{ueN} \nvDash \alpha(x)[\pi_1].$$

Poglavlje 4

Karakterizacija i definabilnost

U Poglavlju 2 definirali smo vezu između modalne logike i logike prvog reda. Međutim, još nismo odgovorili na pitanje što je modalni fragment logike prvog reda, tj. koje su formule logike prvog reda ekvivalentne standardnim translacijama modalnih formula. Drugo bitno pitanje tiče se definabilnosti, tj. zanima nas koja svojstva modela su definabilna s modalnim formulama.

U ovom poglavlju odgovorit ćemo na oba pitanja. Koristeći saturirane modele, opisat ćemo modalni fragment logike prvog reda. Kao posljedicu, dobit ćemo rezultate o modalnoj definabilnosti svojstava modela.

4.1 Van Benthemov teorem karakterizacije

Da bi pronašli koji dio logike prvog reda odgovara modalnoj logici, treba nam druga karakterizacija modalne ekvivalencije preko bisimularnosti negdje drugdje. O tome govori Lema o zaobilaženju. Za razliku od tek dokazane karakterizacije u Teoremu 3.1, Lema o zaobilaženju se osniva na nekim nemodalnim konceptima i rezultatima, i to na saturiranim modelima (vidi Poglavlje 1.3).

Sljedeći teorem nam pokazuje zašto su nam bitni prebrojivo saturirani modeli.

Teorem 4.1
Svaki prebrojivo saturirani model modalne logike je m-saturiran. Slijedi da svaka klasa prebrojivo saturiranih modela ima Hennessy-Milnerovo svojstvo.

Dokaz.
Pretpostavimo da je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, gledan kao model jezika prvog reda,

prebrojivo saturiran. Neka je a svijet u W i promotrimo skup modalnih formula Σ koji je konačno ispunjiv u skupu sljedbenika od a. Definiramo skup

$$\Sigma' = \{R\underline{a}x\} \cup ST_x(\Sigma),$$

gdje je $ST_x(\Sigma)=\{ST_x(\phi) \mid \phi \in \Sigma\}$. Očito je skup Σ' konačno ispunjiv u modelu $\mathfrak{M}_a$, i to na nekom sljedbeniku od a. Iz Propozicije 1.1 sada slijedi da je Σ' konzistentan s teorijom modela $\mathfrak{M}_a$. S obzirom da je po pretpostavci model $\mathfrak{M}$ prebrojivo saturiran, skup Σ' je istinit na nekom svijetu b modela $\mathfrak{M}_a$. Zbog $\mathfrak{M}_a \models ST_x(\phi)[b]$ za sve $\phi \in \Sigma$, slijedi da $\mathfrak{M}, b \Vdash \Sigma$. Činjenica $R\underline{a}x \in \Sigma'$ za posljedicu ima da je svijet b sljedbenik svijeta a. Dakle, Σ je ispunjiv na sljedbeniku svijeta a.

■

U Poglavlju 1.3 definirali smo ultraprodukte modela jezika teorije prvog reda. Slijedeći tu općenitu definiciju, sada ćemo definirati ultraprodukte modela modalne logike.

Definicija 4.1
Za danu familiju modela $(\mathfrak{M}_i \mid i \in I)$ modalne logike, definiramo ultraprodukt $\prod_U \mathfrak{M}_i$ kao model koji ima sljedeća svojstva:

(i) *Nosač modela $\prod_U \mathfrak{M}_i$ je skup $\prod_U W_i$, gdje je W_i nosač modela $\mathfrak{M}_i$.*

(ii) *Neka je V_i valuacija od $\mathfrak{M}_i$. Tada je valuacija V^U od $\prod_U \mathfrak{M}_i$ definirana sa*

$$f^U \in V^U(p) \text{ ako i samo ako } \{i \in I \mid f(i) \in V_i(p)\} \in U.$$

(iii) *Neka je R_i pripadna binarna relacija modela $\mathfrak{M}_i$. Tada je binarna relacija R^U u modelu $\prod_U \mathfrak{M}_i$ dana sa*

$$R^U f^U g^U \text{ ako i samo ako } \{i \in I \mid R_i f(i)\, g(i)\} \in U.$$

Ultrapotenciju $\prod_U \mathfrak{M}$ definiramo kao ultraprodukt $\prod_U \mathfrak{M}_i$ gdje su svi modeli $\mathfrak{M}_i$ jednaki jednom modelu $\mathfrak{M}$.

Da bi pokazali da je gornja definicija dobra, trebali bi provjeriti da V^U i R^U ovise jedino o klasama ekvivalencije f^U i g^U. Pokazat ćemo to za V^U. Dokaz za R^U je sličan.

Neka su f i g funkcije sa svojstvom $f \sim_U g$. Treba pokazati

$$f^U \in V^U(p) \text{ ako i samo ako } g^U \in V^U(p).$$

Neka je $f^U \in V^U(p)$. To je, po definiciji valuacije ultraprodukta, ekvivalentno sa $\{i \in I \mid f(i) \in V_i(p)\} \in U$. S druge strane, $f \sim_U g$ nam daje $\{i \mid f(i) = g(i)\} \in U$. S obzirom da je U ultrafiltar, imamo

$$U_1 := \{i \in I \mid f(i) \in V_i(p)\} \cap \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in U.$$

Međutim, očito je $U_1 \subseteq \{i \in I \mid g(i) \in V_i(p)\}$, pa je, zbog svojstava ultrafiltra, $\{i \in I \mid g(i) \in V_i(p)\} \in U$, tj. $g^U \in V^U(p)$. Analogno se dokaže obrat.

S ultraproduktima smo stvorili nešto bogatiji model od početnog. Želimo pokazati da time nismo "pokvarili" njegova svojstva.

Propozicija 4.1
Neka je $\prod_U \mathfrak{M}$ ultrapotencija od $\mathfrak{M}$. Tada, za sve modalne formule ϕ imamo $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ ako i samo ako $\prod_U \mathfrak{M}, f_w^U \Vdash \phi$, gdje je f_w konstantna funkcija takva da $f_w(i) = w$ za svaki $i \in I$.

Dokaz.
Tvrdnju dokazujemo indukcijom po složenosti formule ϕ. Neka je $\phi = p$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}, w \Vdash p &\Leftrightarrow w \in V(p) \\
&\Leftrightarrow \{i \in I \mid w \in V(p)\} = I \\
&\Leftrightarrow \{i \in I \mid w \in V(p)\} \in U \\
&\Leftrightarrow \{i \in I \mid f_w(i) \in V(p)\} \in U \\
&\Leftrightarrow f_w^U \in V^U(p) \\
&\Leftrightarrow \prod_U \mathfrak{M}, f_w^U \Vdash p.
\end{aligned}$$

Za $\phi = \bot$ trivijalno vrijedi $\mathfrak{M}, w \nVdash \bot$ i $\prod_U \mathfrak{M}, f_w^U \nVdash \bot$.
Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za sva formule ψ složenosti manje od n.
Neka je ϕ formula složenosti n. Tada je $\phi = \neg\psi$ ili $\phi = \psi \vee \eta$ ili $\phi = \Diamond\psi$, gdje su složenosti formula ψ i η strogo manje od n. Lako se dokaže da tvrdnja vrijedi za prva dva slučaja. Zato ćemo mi promatrati samo slučaj $\phi = \Diamond\psi$.
Prvo ćemo dokazati pomoćnu tvrdnju:

$$Rwv \text{ ako i samo ako } R^U f_w^U f_v^U,$$

gdje su f_w i f_v konstantne funkcije takve da $f_w(i) = w$ i $f_v(i) = v$ za svaki $i \in I$. Vrijede sljedeće ekvivalencije

$$\begin{aligned} R^U f_w^U f_v^U &\Leftrightarrow \{i \in I \mid Rf_w(i) f_v(i)\} \in U \\ &\Leftrightarrow \{i \in I \mid Rwv\} \in U \\ &\Leftrightarrow \{i \in I \mid Rwv\} = I \\ &\Leftrightarrow Rwv. \end{aligned}$$

Neka vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$. Tada, po definiciji istinitosti formule $\Diamond\psi$, postoji svijet v takav da Rwv i $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. Međutim, zbog prethodno dokazanog i pretpostavke indukcije, to je ekvivalentno tvrdnji: postoji funkcija f_v takva da $R^U f_w^U f_v^U$ i $\prod_U \mathfrak{M}, f_v^U \Vdash \psi$, dakle $\prod_U \mathfrak{M}, f_w^U \Vdash \Diamond\psi$. Time je dokazana ova propozicija.

■

Spremni smo za novu karakterizaciju bisimularnosti negdje drugdje - na odgovarajućim ultrapotencijama originalnih modela.

Teorem 4.2
Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ modeli modalne logike, a $w \in \mathfrak{M}$ i $v \in \mathfrak{N}$ njihovi svijetovi. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

(i) *Za sve modalne formule ϕ vrijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ ako i samo ako $\mathfrak{N}, v \Vdash \phi$.*

(ii) *Postoje ultrapotencije $\prod_U \mathfrak{M}$ i $\prod_U \mathfrak{N}$ i bisimulacija*

$$Z : \prod_U \mathfrak{M}, f_w^U \underline{\leftrightarrow} \prod_U \mathfrak{N}, f_v^U,$$

gdje su f_w i f_v konstantne funkcije takve da $f_w(i) = w$ i $f_v(i) = v$ za svaki $i \in I$.

Dokaz.
Lako se vidi da *(ii)⇒(i)*. Zbog propozicije 4.1, činjenica $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{N}, v$ je ekvivalentna tvrdnji $\prod_U \mathfrak{M}, f_w^U \leftrightsquigarrow \prod_U \mathfrak{N}, f_v^U$, a to vrijedi zbog bisimularnosti (vidi Teorem 1.1).
Pretpostavimo sada da vrijedi tvrdnja *(i)*. Tada su, zbog propozicije 4.1, f_w^U i f_v^U modalno ekvivalentni. Trebamo konstruirati bisimularne ultrapotencije od $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$.
Neka je U prebrojivo nepotpun ultrafiltar nad $\mathbb{N}$ (vidi primjer 1.7). Iz Leme 1.6 slijedi da su ultrapotencije $\prod_U \mathfrak{M}$ i $\prod_U \mathfrak{N}$ prebrojivo saturirane, dakle posjeduju Hennessy-Milnerovo svojstvo (vidi Teorem 4.1). Međutim, tada modalna ekvivalentnost f_w^U i f_v^U povlači njihovu bisimularnost.

■

Da bi iskazali Lemu o zaobilaženju potrebna nam je definicija elementarnog smještenja modela.

Definicija 4.2
Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *i* $\mathfrak{N} = (W', R', V')$ *modeli modalne logike. Za preslikavanje* $f : W \to W'$ *kažemo da je elementarno smještenje* $\mathfrak{M}$ *u* $\mathfrak{N}$ *(u oznaci* $f : \mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$*) ako za sve formule* ϕ *i svijetove* $w \in W$ *imamo*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{N}, f(w) \Vdash \phi.$$

Sada jednostavno možemo dokazati Lemu o zaobilaženju.

Lema 4.1 (Lema o zaobilaženju)
Neka su $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{N}$ *modeli modalne logike, a* $w \in \mathfrak{M}$ *i* $v \in \mathfrak{N}$ *njihovi svijetovi. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) *Za sve modalne formule* ϕ *vrijedi:* $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ *ako i samo ako* $\mathfrak{N}, v \Vdash \phi$.

(ii) *Postoji bisimulacija* $Z : \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \pi_w \,\underline{\leftrightarrow}\, \mathfrak{ue}\mathfrak{N}, \pi_v$.

(iii) *Postoje prebrojivo saturirani modeli* $\mathfrak{M}^*$, w^* *i* $\mathfrak{N}^*$, v^* *i elementarna smještenja* $f : \mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{M}^*$ *i* $g : \mathfrak{N} \preccurlyeq \mathfrak{N}^*$ *takva da*

   (a) $f(w) = w^*$ *i* $g(v) = v^*$,

   (b) $\mathfrak{M}^*$, $w^* \,\underline{\leftrightarrow}\, \mathfrak{N}^*$, v^*.

Dokaz.
(i)⇔(ii)
Tvrdnja $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{M}', w'$ je, zbog Propozicije 3.3, ekvivalentna sa tvrdnjom $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \pi_w \leftrightsquigarrow \mathfrak{ue}\mathfrak{M}', \pi_{w'}$. Ultrafiltar proširenja su m-saturirana (vidi propoziciju 3.4) i stoga imaju Henessy-Milnerovo svojstvo (vidi propoziciju 3.1), pa je $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \pi_w \leftrightsquigarrow \mathfrak{ue}\mathfrak{M}', \pi_{w'}$ ekvivalentno sa tvrdnjom $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \pi_w \,\underline{\leftrightarrow}\, \mathfrak{ue}\mathfrak{M}', \pi_{w'}$ (vidi Teorem 1.1).
(i)⇔(iii)
Dovoljno je pokazati da ultrapotencije iz Teorema 4.2 *(ii)* zadovoljavaju uvjete iz tvrdnje *(iii)*.
Neka je opet U prebrojivo nepotpun ultrafiltar nad $\mathbb{N}$. Tada su ultrapotencije $\prod_U \mathfrak{M}$ i $\prod_U \mathfrak{N}$ prebrojivo saturirane (vidi Lemu 1.6).
Treba još pokazati da je preslikavanje $f : W \to \prod_U W_i$ definirano sa

$$f(w) = f_w$$

elementarno smještenje. Međutim, to trivijalno slijedi iz propozicije 4.1.

■

Novi rezultat do kojeg smo sada došli nam zapravo kaže da modele koji imaju modalno ekvivalentne svijetove možemo proširiti, štoviše elementarno proširiti, do prebrojivo saturiranih modela, a da zadrže svojstvo.

Uz pomoć Leme o zaobilaženju možemo precizno okarakterizirati vezu između logike prvog reda, modalne logike i bisimulacija. Prvo ćemo eksplicitno definirati koncept koji smo već nekoliko puta neformalno koristili.

Definicija 4.3
Formula $\alpha(x)$ jezika $\mathcal{L}^1$ teorije prvog reda je invarijantna na bisimulacije ako za sve modele $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$, sve svijetove $w \in \mathfrak{M}$ i $v \in \mathfrak{N}$ i sve bisimulacije Z između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ takve da wZv imamo

$$\mathfrak{M} \vDash \alpha(x)[w] \text{ ako i samo ako } \mathfrak{N} \vDash \alpha(x)[v].$$

Teorem 4.3 (Van Benthemov teorem karakterizacije)
Neka je $\alpha(x)$ formula jezika $\mathcal{L}^1$ teorije prvog reda. Tada je $\alpha(x)$ invarijantna na bisimulacije ako i samo ako je ekvivalentna standardnoj translaciji neke modalne formule.

Dokaz.
Ako je $\alpha(x)$ ekvivalentna standardnoj translaciji neke modalne formule, tada je i invarijantna na bisimulacije (vidi Teorem 1.1).
Pretpostavimo sada da je $\alpha(x)$ invarijantna na bisimulacije i promotrimo skup svih modalnih posljedica od α:

$$MOC(\alpha) = \{ST_x(\phi) \mid \phi \text{ je modalna formula i } \alpha(x) \vDash ST_x(\phi)\}.$$

Tvrdimo da ako vrijedi $MOC(\alpha) \vDash \alpha(x)$, tada je $\alpha(x)$ ekvivalentna translaciji neke modalne formule. Da bi to pokazali, pretpostavimo da vrijedi tvrdnja $MOC(\alpha) \vDash \alpha(x)$. Tada, zbog Teorema o kompaktnosti za logiku prvog reda, za neki konačni podskup $X \subseteq MOC(\alpha)$ imamo $X \vDash \alpha(x)$. Stoga, vrijedi $\vDash \bigwedge X \to \alpha(x)$. Zbog konstrukcije skupa $MOC(\alpha)$ imamo $\vDash \alpha(x) \to \bigwedge X$, pa vrijedi $\vDash \alpha(x) \leftrightarrow \bigwedge X$. Kako je svaka formula $\beta \in X$ standardna translacija neke modalne formule, onda je to i $\bigwedge X$. To dokazuje našu tvrdnju.
Dakle, dovoljno je pokazati da $MOC(\alpha) \vDash \alpha(x)$. Pretpostavimo da je $\mathfrak{M} \vDash MOC(\alpha)[w]$. Želimo pokazati da vrijedi $\mathfrak{M} \vDash \alpha(x)[w]$.
Neka je

$$T(x) = \{ST_x(\phi) \mid \mathfrak{M} \vDash ST_x(\phi)[w]\}.$$

Tvrdimo da je skup $T(x) \cup \{\alpha(x)\}$ konzistentan. Pretpostavimo suprotno, da je skup $T(x) \cup \{\alpha(x)\}$ inkonzistentan, tj. da vrijedi $T(x) \vDash \neg\alpha(x)$.

Tada, zbog kompaktnosti, za neki konačan podskup $T_0(x) \subseteq T(x)$ imamo $\vDash \bigwedge T_0(x) \to \neg\alpha(x)$, što je ekvivalentno sa $\vDash \alpha(x) \to \neg \bigwedge T_0(x)$. Stoga, $\neg \bigwedge T_0(x) \in MOC(\alpha)$. No, ovo povlači $\mathfrak{M} \vDash \neg \bigwedge T_0(x)[w]$ što je u kontradikciji sa $T_0(x) \subseteq T(x)$ i $\mathfrak{M} \vDash T(x)[w]$. Dakle, skup $T(x) \cup \{\alpha(x)\}$ je konzistentan kao što smo i tvrdili.
Neka su sad $\mathfrak{N}$, v takvi da je $\mathfrak{N} \vDash T(x) \cup \{\alpha(x)\}[v]$. Takav postoji zato što je skup $T(x) \cup \{\alpha(x)\}$ konzistentan. Primijetimo da su w i v modalno ekvivalentni. Naime, $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ povlači $ST_x(\phi) \in T(x)$, a iz toga slijedi $\mathfrak{N}, v \Vdash \phi$. Obrnuto, ako $\mathfrak{M}, w \nVdash \phi$, tada $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\phi$ pa slično $\mathfrak{N}, v \Vdash \neg\phi$. Kad bi modalna ekvivalencija povlačila bisimularnost, tada bi bili gotovi, jer bi tvrdnja slijedila iz pretpostavke da je $\alpha(x)$ invarijantna na bisimulacije. Međutim, to nije slučaj.
Zato ćemo iskoristiti Lemu o zaobilaženju da bi napravili zaobilaznicu preko Hennessy-Milnerovih klasa gdje modalna ekvivalencija stvarno povlači bisimularnost. Preciznije, Lema o zaobilaženju nam donosi dva prebrojivo saturirana modela $\mathfrak{M}^*, w^* \succcurlyeq \mathfrak{M}, w$ i $\mathfrak{N}^*, v^* \succcurlyeq \mathfrak{N}, v$ takve da $\mathfrak{M}^*, w^* \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{N}^*, v^*$:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}, w \arrow[d, dash, swap, "\preccurlyeq"] & & \mathfrak{N}, v \arrow[d, dash, "\preccurlyeq"] \\
\mathfrak{M}^*, w^* & \underline{\leftrightarrow} & \mathfrak{N}^*, v^*
\end{tikzcd}$$

Konačno, $\mathfrak{N} \vDash \alpha(x)[v]$ povlači $\mathfrak{N}^* \vDash \alpha(x)[v^*]$. S obzirom da je $\alpha(x)$ invarijantna na bisimulacije, imamo $\mathfrak{M}^* \vDash \alpha(x)[w^*]$. Iz definicije elementarnog smještenja sada slijedi $\mathfrak{M} \vDash \alpha(x)[w]$. Time je dokazan teorem.

■

Napomena.
Nova karakterizacija modalne ekvivalencije preko bisimulacije negdje drugdje koju nam je dao Teorem 4.2 nam je zapravo trebala radi dokaza prethodnog teorema. Trebali smo prebaciti formulu $\alpha(x)$ sa modela $\mathfrak{N}, v$ na model $\mathfrak{N}^*, v^*$. Po definiciji, istinitost formula teorije prvog reda je očuvana u elementarnim proširenjima, pa je to stvarno moglo biti učinjeno. Međutim, istinitost formula teorije prvog reda ne mora biti očuvana u ultrafiltar proširenjima (vidi primjer 3.4) i zbog toga nismo mogli iskoristiti ultrafilar proširenja $\mathfrak{ue}\mathfrak{N}, \pi_v$ umjesto $\mathfrak{N}^*, v^*$.

Van Benthemov teorem nam je okarakterizirao modalni fragment logike prvog reda kao klasu formula teorije prvog reda invarijantnih za bisimulacije.

4.2 Definabilnost

Pokazali smo koji dio logike prvog reda odgovara modalnoj logici. Sada nam je cilj odgovoriti na pitanje koja su svojstva modela definabilna modalnim formulama. Prvo moramo formalno definirati pojam definabilnosti.

Definicija 4.4
Neka je $\mathbf{C}$ *klasa modela modalne logike,* Γ *skup modalnih formula.*
Kažemo da Γ *definira ili karakterizira klasu* $\mathbf{K}$ *unutar* $\mathbf{C}$ *ako za sve modele* $\mathfrak{M}$ *u* $\mathbf{C}$ *vrijedi da je* $\mathfrak{M}$ *u* $\mathbf{K}$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M} \Vdash \Gamma$. *Ako je* $\mathbf{C}$ *klasa svih modela, samo kažemo da* Γ *definira ili karakterizira* $\mathbf{K}$. *Zagradu ispuštamo ako je* Γ *jednočlan.*
Kažemo da formula ϕ *definira svojstvo kad* ϕ *definira klasu modela koji zadovoljavaju to svojstvo.*

Sada direktno iz Propozicije 2.1 slijedi da ako je klasa modela definabilna preko skupa modalnih formula, tada je definabilna i preko formula teorije prvog reda.

Formulirat ćemo odgovor na naše pitanje u terminima točkovnih modela. Točkovni model definiramo kao uređeni par $(\mathfrak{M}, w)$ gdje je $\mathfrak{M}$ model modalne logike, a w svijet tog modela. Iako se donja diskusija može provesti i na modelima, upotreba točkovnih modela omogućava nam prirodniju formulaciju, uglavnom stoga što oni pokazuju lokalni način evaluacije modalnih formula.

Trebaju nam još neke definicije. Za klasu točkovnih modela kažemo da je zatvorena za bisimulacije ako $(\mathfrak{M}, w) \in \mathbf{K}$ i $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{N}, v$ povlači $(\mathfrak{N}, v) \in \mathbf{K}$. Kažemo da je zatvorena za ultraprodukte ako svaki ultraprodukt $\prod_U (\mathfrak{M}, w)$ familije točkovnih modela iz $\mathbf{K}$ pripada $\mathbf{K}$. Ako je $\mathbf{K}$ klasa točkovnih modela, sa $\overline{\mathbf{K}}$ označavamo komplement od $\mathbf{K}$ u klasi svih točkovnih modela. Konačno, $\mathbf{K}$ je definabilna skupom modalnih formula ako postoji skup modalnih formula Γ takav da za svaki točkovni model $(\mathfrak{M}, w)$ imamo $(\mathfrak{M}, w) \in \mathbf{K}$ ako i samo ako za sve $\gamma \in \Gamma$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \gamma$. Ako je skup Γ jednočlan, tada kažemo da je $\mathbf{K}$ definabilna jednom modalnom formulom.

Međutim, zbog propozicije 2.1, definabilne klase točkovnih modela moraju biti zatvorene za bisimulacije, a zbog Łošovog teorema moraju biti zatvorene i za ultraprodukte. Pokazat ćemo da su ova dva uvjeta dovoljna da u potpunosti opišu klase točkovnih modela koje su definabilne modalnim formulama.

Prvo ćemo dokazati pomoćnu lemu koja je neka vrsta imitacije Teorema o kompaktnosti. Za proizvoljni skup modalnih formula pokazat ćemo da ako je konačno ispunjiv u nekoj klasi točkovnih modela, tada je i ispunjiv u istoj klasi modela.

Lema 4.2
Neka je Σ skup modalnih formula, a $\mathbf{K}$ klasa točkovnih modela u kojoj je Σ konačno ispunjiv. Tada je Σ ispunjiv u nekom ultraproduktu modela iz $\mathbf{K}$.

Dokaz.
Definiramo I kao skup svih konačnih podskupova od Σ:

$$I = \{\Sigma_0 \subseteq \Sigma \mid \Sigma_0 \text{ je konačan }\}.$$

Po pretpostavci, za svaki $i \in I$ postoji točkovni model $(\mathfrak{N}_i, v_i) \in \mathbf{K}$ takav da $\mathfrak{N}_i, v_i \Vdash i$. Želimo konstruirati ultrafiltar U nad I takav da ultraprodukt $\prod_U \mathfrak{N}_i$ ima svijet f^U i $\prod_U \mathfrak{N}_i, f^U \Vdash \Sigma$.
Za svaki $\sigma \in \Sigma$ neka je $\hat{\sigma}$ skup svih $i \in I$ takvih da $\sigma \in i$. Tada skup $E = \{\hat{\sigma} \mid \sigma \in \Sigma\}$ ima svojstvo konačnog presjeka zbog

$$\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \in \hat{\sigma}_1 \cap \ldots \cap \hat{\sigma}_n.$$

Tada se, zbog Teorema o ultrafiltru, E može proširiti do ultrafiltra U nad I. Time smo konstruirali ultraprodukt $\prod_U \mathfrak{N}_i$.
Neka je W_i nosač modela $\mathfrak{N}_i$ i promotrimo funkciju $f \in \prod_{i\in I} W_i$ takvu da $f(i) = v_i$. Treba još pokazati da vrijedi

$$\prod_U \mathfrak{N}_i, f^U \Vdash \Sigma.$$

Primijetimo da za $i \in \hat{\sigma}$ imamo $\sigma \in i$ i $\mathfrak{N}_i, v_i \Vdash \sigma$. Stoga, za svaki $\sigma \in \Sigma$

$$\{i \in I \mid \mathfrak{N}_i, v_i \Vdash \sigma\} \supseteq \hat{\sigma} \text{ i } \hat{\sigma} \in U.$$

Tada je, prema definiciji filtra, $\{i \in I \mid \mathfrak{N}_i, v_i \Vdash \sigma\} \in U$. Łośov teorem nam sada daje $\prod_U \mathfrak{N}_i, f^U \Vdash \Sigma$.

$\blacksquare$

Sljedeći teorem nam pokazuje karakterizaciju definabilnih klasa točkovnih modela preko pojmova bisimulacije i ultraprodukata.

Teorem 4.4
Neka je $\mathbf{K}$ *klasa točkovnih modela. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

(i) $\mathbf{K}$ *je definabilna skupom modalnih formula.*

(ii) $\mathbf{K}$ *je zatvorena za bisimulacije i ultraprodukte, a* $\overline{\mathbf{K}}$ *je zatvorena za ultrapotencije.*

Dokaz.
(i)⇒(ii)
Neka je $\mathbf{K}$ je definabilna skupom modalnih formula. To znači da postoji skup modalnih formula Γ takav da za svaki točkovni model $(\mathfrak{M}, w)$ imamo $(\mathfrak{M}, w) \in \mathbf{K}$ ako i samo ako za sve $\gamma \in \Gamma$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \gamma$.
Neka je sada $(\mathfrak{N}, v)$ točkovni model takav da $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{N}, v$. Modalne formule su invarijantne za bisimulacije, pa tada iz $\mathfrak{M}, w \leftrightsquigarrow \mathfrak{N}, v$ slijedi $\mathfrak{N}, v \Vdash \gamma$ za svaku formulu $\gamma \in \Gamma$. Dakle, $(\mathfrak{N}, v) \in \mathbf{K}$.
Pokažimo sada da je $\mathbf{K}$ zatvorena za ultraprodukte. Neka je $((\mathfrak{M}_i, w_i) \mid i \in I)$ proizvoljna familija modela iz $\mathbf{K}$. Promatramo njihov ultraprodukt, model $\prod_U (\mathfrak{M}_i, w_i)$. Za proizvoljnu formulu $\gamma \in \Gamma$ imat ćemo $\prod_U (\mathfrak{M}_i, w_i) \Vdash \gamma$ ako i samo ako $\{i \in I \mid \mathfrak{M}_i, w_i \Vdash \gamma\} \in U$ (vidi Łośov teorem). Međutim, to očito vrijedi zato što je po pretpostavci

$$\{i \in I \mid \mathfrak{M}_i, w_i \Vdash \gamma\} = I.$$

Dakle, $\mathbf{K}$ je zatvorena za ultraprodukte.
Slično se pokaže da je $\overline{\mathbf{K}}$ zatvorena za ultrapotencije.
(ii)⇒(i)
Neka $\mathbf{K}$ i $\overline{\mathbf{K}}$ zadovoljavaju uvjete iz *(ii)*. Lako se vidi da je i $\overline{\mathbf{K}}$ zatvoren za bisimulacije. Definiramo T kao skup svih modalnih formula koje su istinite u K:

$$T = \{\phi \mid \text{ za sve } (\mathfrak{M}, w) \in \mathbf{K} \text{ vrijedi } \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\}.$$

Pokazat ćemo da T definira klasu $\mathbf{K}$. Iz definicije skupa T izlazi da $\mathfrak{M}, w \Vdash T$ za svaki točkovni model $(\mathfrak{M}, w) \in \mathbf{K}$. Treba pokazati i obratno, da $\mathfrak{M}, w \Vdash T$ povlači $(\mathfrak{M}, w) \in \mathbf{K}$.
Neka je

$$\Sigma = \{\phi \mid \mathfrak{M}, w \Vdash \phi\},$$

skup svih formula istinitih na svijetu w. Pokazat ćemo prvo da je Σ konačno ispunjiv u $\mathbf{K}$. Pretpostavimo da skup $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \subseteq \Sigma$ nije ispunjiv u $\mathbf{K}$. Tada bi formula $\neg(\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n)$ bila istinita na svim točkovnim modelima

u **K**, pa bi pripadala skupu T, iako je lažna na svijetu w. To je kontradikcija s pretpostavkom $\mathfrak{M}, w \Vdash T$. Dakle, Σ je konačno ispunjiv u **K**.
Iz Leme 4.2 izlazi da je Σ ispunjiv u nekom ultraproduktu modela iz **K**. S obzirom da je **K** zatvoren za ultraprodukte, Σ ispunjiv u nekom modelu $(\mathfrak{N}, v) \in \mathbf{K}$. No, tada $\mathfrak{N}, v \Vdash \Sigma$ povlači modalnu ekvivalenciju svijetova v i w. Naime, za svaku modalnu formulu ϕ za koju je $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ imamo $\mathfrak{N}, v \Vdash \phi$. Obratno, ako je $\mathfrak{M}, w \nVdash \phi$, tada je $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\phi$, pa imamo $\mathfrak{N}, v \Vdash \neg\phi$, tj. vrijedi $\mathfrak{N}, v \nVdash \phi$.
Teorem 4.2 nam sada daje ultrafiltar U' takav da

$$\prod_{U'} (\mathfrak{M}, w), f_w^{U'} \underline{\leftrightarrow} \prod_{U'} (\mathfrak{N}, v), f_v^{U'}.$$

Zbog zatvorenosti na ultrapodukte, točkovni model $\left(\prod_{U'} (\mathfrak{N}, v), f_v^{U'}\right)$ pripada klasi **K**. Stoga je, zbog zatvorenosti za bisimulacije, točkovni model $\left(\prod_{U'} (\mathfrak{M}, w), f_w^{U'}\right)$ također u **K**. Konačno, model $(\mathfrak{M}, w)$ pripada klasi **K** zato što je $\overline{\mathbf{K}}$ zatvorena za ultrapotencije. Time je teorem dokazan.

■

Nešto jača tvrdnja vrijedi za klase definabilna jednom modalnom formulom.

Teorem 4.5
Neka je **K** *klasa točkovnih modela. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

(i) **K** *je definabilna jednom modalnom formulom.*

(ii) **K** *i* $\overline{\mathbf{K}}$ *su zatvoreni za bisimulacije i ultraprodukte.*

Dokaz.
(i)⇒(ii)
Neka je **K** je definabilna jednom modalnom formulom. To znači da postoji modalna formula γ takva da za svaki točkovni model $(\mathfrak{M}, w)$ imamo $(\mathfrak{M}, w) \in \mathbf{K}$ ako i samo ako vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \gamma$.
Pokazat ćemo samo da je $\overline{\mathbf{K}}$ zatvorena za ultraprodukte. Ostatak dokaza je analogan onome u Teoremu 4.4.
Neka je $((\mathfrak{M}_i, w_i) \mid i \in I)$ proizvoljna familija modela iz $\overline{\mathbf{K}}$. Promatramo njihov ultraprodukt $\prod_U (\mathfrak{M}_i, w_i)$. Za formulu γ imat ćemo $\prod_U (\mathfrak{M}_i, w_i) \nVdash \gamma$ ako i samo ako $\{i \in I \mid \mathfrak{M}_i, w_i \Vdash \gamma\} \notin U$ (vidi Łośov teorem). Međutim, to očito vrijedi zato što je po pretpostavci

$$\{i \in I \mid \mathfrak{M}_i, w_i \Vdash \gamma\} = \emptyset.$$

(ii)⇒(i)
Neka su $\mathbf{K}$ i $\overline{\mathbf{K}}$ zatvoreni za bisimulacije i ultraprodukte. Stoga, prema Teoremu 4.4, postoje skupovi modalnih formula T_1 i T_2 koji definiraju klase $\mathbf{K}$ i $\overline{\mathbf{K}}$. Njihova unija nije ispunjiva s obzirom da ne postoji točkovni model $(\mathfrak{M}, w)$ takav da $(\mathfrak{M}, w) \Vdash T_1 \cup T_2$. Stoga, zbog kompaktnosti, postoje $\phi_1, \ldots, \phi_n \in T_1$ i $\psi_1, \ldots, \psi_m \in T_2$ takvi da za sve točkovne modele $(\mathfrak{M}, w)$

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \to \neg\psi_1 \vee \ldots \vee \neg\psi_m.$$

Pokazat ćemo da je klasa $\mathbf{K}$ definabilna formulom $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$. Po definiciji, za svaki model $(\mathfrak{M}, w) \in \mathbf{K}$ imamo $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$. Obrnuto, ako je $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$, tada po prethodnom imamo $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\psi_1 \vee \ldots \vee \neg\psi_m$. Stoga, $\mathfrak{M}, w \nVdash T_2$ pa $(\mathfrak{M}, w)$ nije u $\overline{\mathbf{K}}$. Dakle, $(\mathfrak{M}, w) \in \mathbf{K}$.

■

Bibliografija

[1] J. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic*, Springer-Verlag, 2003.

[2] C.C. Chang, H.J. Keisler, *Model Theory*, North-Holland, 1973.

[3] M. Vuković, *Matematička logika 1*, Zagreb, 2000.