

Diferencijalni i integralni račun 1

prvi kolokvij, 24.04.2019.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 15 bodova) Izračunajte:

(a) (7 bodova)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{\sin x}{x^3}},$$

(b) (8 bodova)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

Diferencijalni i integralni račun 1

prvi kolokvij, 24.04.2019.

2. (ukupno 10 bodova) Ivica se nalazi u šumi, te su njegove početne koordinate $(3, 5)$. Šuma graniči s jezerom čija se obala poklapa s grafom funkcije $f(x) = \ln(x + 1)$. Ivici je cilj doći do bilo koje točke na jezeru na x -osi tako da potroši što manje energije. Ako je potrošnja energije proporcionalna razlici kvadrata duljina putova kroz šumu i po jezeru, koliko će minimalno energije potrošiti? Ivica se kroz šumu kreće pravocrtno, a kad dođe do obale jezera, kreće se pravocrtno do najbliže točke na x -osi od one u kojoj se trenutno nalazi.

3a	3b	3c	3d	3e	3f

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 1

prvi kolokvij, 24.04.2019.

3. (ukupno 25 bodova) Zadana je funkcija

$$f(x) = \frac{\ln(x^3)}{x}.$$

- (a) (6 bodova) Odredite intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije f .
- (b) (6 bodova) Odredite asimptote funkcije f .
- (c) (5 bodova) Bez računanja zakrivljenosti, skicirajte graf od f .
- (d) (8 bodova) Odredite točke na grafu funkcije f u kojima je normala na graf paralelna s y - osi.

4	5	6	7	8	9

JMBAG

IME I PREZIME

PROFESOR

Diferencijalni i integralni račun 1

prvi kolokvij, 24.04.2019.

4. (5 bodova) Dajte primjer racionalne funkcije $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ čija je slika skup $\langle -1, 1 \rangle$.
5. (10 bodova) Dajte primjer racionalne funkcije koja nije polinom i koja nema vertikalnih asimptota.
6. (5 bodova) Dokažite ili opovrgnite primjerom: ako je $f(x)$ neprekidna u $x = c$, onda je $|f(x)|$ neprekidna u $x = c$.
7. (10 bodova) Neka je funkcija f neprekidna na $[1, 2]$ i neka vrijedi $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ za sve $x \in [1, 2]$. Dokažite da tada postoji barem jedan $c \in [1, 2]$ takav da vrijedi $f(c) = \frac{1}{c}$.
8. (5 bodova) Tangenta na krivulju $y = f(x)$ u točki $(1, 2)$ prolazi kroz točku $(-1, -1)$. Izračunajte $f'(1)$.
9. (10 bodova) Dokažite ili opovrgnite primjerom: ako su funkcije f i g rastuće na $[a, b]$, onda je i $f \cdot g$ rastuća na $[a, b]$.

Diferencijalni i integralni račun 1
prvi kolokvij, 24.04.2019.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 16 bodova) Izračunajte:

(a) (8 bodova)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{\cos x - 1}{x^3}},$$

(b) (8 bodova)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x+2}{x+1} - \frac{1}{\ln(x+2)} \right).$$

Diferencijalni i integralni račun 1

prvi kolokvij, 24.04.2019.

2. (ukupno 10 bodova) Marica se nalazi na moru, te su njene trenutne koordinate $(4, 7)$. More graniči s kopnom čija se obala poklapa s grafom funkcije $f(x) = \ln(x+2)$. Marici je cilj doći do bilo koje točke na kopnu na x -osi tako da potroši što manje energije. Ako je potrošnja energije proporcionalna razlici kvadrata duljina putova po moru i po kopnu, koliko će minimalno energije potrošiti? Marica se po moru kreće pravocrtno, a kad dođe do obale, kreće se pravocrtno do najbliže točke na x -osi od one u kojoj se trenutno nalazi.

3a	3b	3c	3d	3e	3f

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 1

prvi kolokvij, 24.04.2019.

3. (ukupno 25 bodova) Zadana je funkcija

$$f(x) = \frac{\ln(x^5)}{x}.$$

- (a) (6 bodova) Odredite intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije f .
- (b) (6 bodova) Odredite asimptote funkcije f .
- (c) (5 bodova) Bez računanja zakrivljenosti, skicirajte graf od f .
- (d) (8 bodova) Odredite točke na grafu funkcije f u kojima je normala na graf paralelna s y - osi.

4	5	6	7	8	9

JMBAG

IME I PREZIME

PROFESOR

Diferencijalni i integralni račun 1

prvi kolokvij, 24.04.2019.

4. (5 bodova) Dajte primjer racionalne funkcije $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ čija je slika skup $[-1, 1] \setminus \{0\}$. Može li takva funkcija biti neprekidna?
5. (10 bodova) Dajte primjer funkcije koja ima točno 17 vertikalnih asimptota.
6. (5 bodova) Dokažite ili opovrgnite primjerom: ako je $|f(x)|$ neprekidna u $x = c$, onda je $f(x)$ neprekidna u $x = c$.
7. (10 bodova) Neka je funkcija f neprekidna na $[0, 1]$ i neka vrijedi $0 \leq f(x) \leq 1$ za sve $x \in [0, 1]$. Dokažite da tada postoji barem jedan $c \in [0, 1]$ takav da vrijedi $f(c) = c$.
8. (5 bodova) Tangenta na krivulju $y = f(x)$ u točki $(2, 1)$ prolazi kroz točku $(1, 1)$. Izračunajte $f'(2)$.
9. (10 bodova) Dokažite ili opovrgnite primjerom: ako su funkcije f i g konveksne na $[a, b]$, onda je i $f \cdot g$ konveksna na $[a, b]$.