

Diferencijalni i integralni račun 1

drugi kolokvij, 28.06.2022.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora niti ikakvih formula osim onih koje će vam biti podijeljene na početku pisanja.

1. (ukupno 20 bodova) Izračunajte:

(a) (10 bodova) Izračunajte integral

$$\int \frac{e^{\cos x} \sin x}{\sqrt{1 + e^{\cos x}}} dx.$$

(b) (10 bodova) Izračunajte integral

$$\int (4x^3 + x + 1) \ln x \, dx.$$

Diferencijalni i integralni račun 1
drugi kolokvij, 28.06.2022.

2. (ukupno 15 bodova) Izračunajte integral

$$\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x}}{(\sqrt[3]{x} + 1)^2 (\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[3]{x^2})} dx.$$

Diferencijalni i integralni račun 1
drugi kolokvij, 28.06.2022.

3. (ukupno 15 bodova)

- (a) (7 bodova) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = x^3 + 1$ i $y = \sqrt{x} + 1$ oko x -osi.
- (b) (8 bodova) Ako konvergira, odredite vrijednost nepravog integrala

$$\int_0^1 \operatorname{ctg} x \frac{\cos(8x) + \cos(4x)}{\sin(7x) - \sin(5x)} dx.$$

4	5	6	7	8

JMBAG

IME I PREZIME

PROFESOR

Diferencijalni i integralni račun 1

drugi kolokvij, 28.06.2022.

4. (10 bodova) Neka je $\{-1, -1 + \frac{1}{n}, -1 + \frac{2}{n}, \dots, -1 + \frac{2n-1}{n}, 1\}$ ekvidistantna particija segmenta $[-1, 1]$. Za tu particiju izračunajte donju Darbouxovu sumu funkcije $f(x) = x^2$. Nađite limes te sume kada $n \rightarrow \infty$.

Napomena: Vrijedi sljedeća formula

$$\sum_{j=1}^k j^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1).$$

5. (10 bodova) Dokažite da za svaku funkciju f koja ima neprekidnu derivaciju na segmentu $[-\pi/2, \pi/2]$ vrijedi

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x f(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x f'(x) dx.$$

6. (10 bodova) Dokažite da za parne funkcije f neprekidne na segmentu $[-a, a]$ vrijedi

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

7. (10 bodova) Skup $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zadan je kao područje omeđeno parabolama $y = x^2$ i $y = -x^2 + 1$. Nađite težište od Ω .

8. (10 bodova) Izračunajte limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\operatorname{arctg} n)^n}{n!}.$$

Diferencijalni i integralni račun 1

drugi kolokvij, 28.06.2022.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora niti ikakvih formula osim onih koje će vam biti podijeljene na početku pisanja.

1. (ukupno 20 bodova) Izračunajte:

(a) (10 bodova) Izračunajte integral

$$\int \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \ln(\cos x)}} dx.$$

(b) (10 bodova) Izračunajte integral

$$\int (5x^4 + x^2 + 3) \ln x \, dx.$$

Diferencijalni i integralni račun 1
drugi kolokvij, 28.06.2022.

2. (ukupno 15 bodova) Izračunajte integral

$$\int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 2}{(\sqrt[3]{x} + 1)^2 (\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[3]{x^2})} dx.$$

Diferencijalni i integralni račun 1
drugi kolokvij, 28.06.2022.

3. (ukupno 15 bodova)

- (a) (7 bodova) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = x^2 + 1$ i $y = \sqrt[4]{x} + 1$ oko x -osi.
- (b) (8 bodova) Ako konvergira, odredite vrijednost nepravog integrala

$$\int_0^1 \operatorname{ctg} x \frac{\sin(6x) + \sin(2x)}{\cos(5x) - \cos(3x)} dx.$$

4	5	6	7	8

JMBAG

IME I PREZIME

PROFESOR

Diferencijalni i integralni račun 1

drugi kolokvij, 28.06.2022.

4. (10 bodova) Neka je $\{-1, -1 + \frac{1}{n}, -1 + \frac{2}{n}, \dots, -1 + \frac{2n-1}{n}, 1\}$ ekvidistantna particija segmenta $[-1, 1]$. Za tu particiju izračunajte gornju Darbouxovu sumu funkcije $f(x) = x^2$. Nađite limes te sume kada $n \rightarrow \infty$.
Napomena: Vrijedi sljedeća formula

$$\sum_{j=1}^k j^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1).$$

5. (10 bodova) Dokažite da za svaku funkciju f koja ima neprekidnu derivaciju na segmentu $[0, \pi]$ vrijedi

$$\int_0^\pi \cos x f(x) dx = - \int_0^\pi \sin x f'(x) dx.$$

6. (10 bodova) Dokažite da za neparne funkcije f neprekidne na segmentu $[-a, a]$ vrijedi

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

7. (10 bodova) Skup $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zadan je kao područje u gornjoj poluravnini omeđeno kružnicama sa središtem u ishodištu i radijusima r i R , gdje je $0 < r < R$. Nađite težište od Ω .
8. (10 bodova) Izračunajte limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n \operatorname{arctg} n)}{n}.$$