

## Diferencijalni i integralni račun 1

drugi kolokvij, 26.6.2023.

**Napomene:** Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora niti ikakvih formula osim onih koje će vam biti podijeljene na početku pisanja. Svaki oblik varanja (uključujući i samo posjedovanje pametnih uređaja blizu sebe) može biti sankcionirano prijavom Stegovnom povjerenstvu i privremenom zabranom polaganja kolegija.

1. Izračunajte sljedeće integrale

(a) (8 bodova)  $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx,$

(b) (8 bodova)  $\int x \operatorname{arcctg} x dx$

Diferencijalni i integralni račun 1  
drugi kolokvij, 26.6.2023.

2. (ukupno 15 bodova) Izračunajte integral

$$\int \frac{5^{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx.$$

3a	3b	3c	3d
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

## Diferencijalni i integralni račun 1

drugi kolokvij, 26.6.2023.

3. (ukupno 15 bodova)

- (a) (7 bodova) U ovisnosti o parametru  $a > 0$  izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom lika omeđenog krivuljom  $y = x^2$  i pravcem  $y = a$  oko  $y$ -osi.
- (b) (8 bodova) Ako konvergira, odredite vrijednost nepravog integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + 2x}$$

## Diferencijalni i integralni račun 1

drugi kolokvij, 26.6.2023.

4. (10 bodova) Neka je  $\mathcal{P}_n$  particija segmenta  $[0, 1]$  generirana čvorovima  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  za  $x_k = \frac{1}{2^{n-k}}$ . Neka je  $f(x) = x^2$ .

- Izračunajte gornju Darbouxovu sumu  $S_n$  za  $f$  s particijom  $\mathcal{P}_n$ .

- Izračunajte  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Je li on jednak  $\int_0^1 x^2 dx$  ?

5. (10 bodova) Neka je  $f(x) = x^3$  te neka je  $\Gamma_f$  njen graf. Izračunajte površinu lika koji je odozdo omeđen s  $\Gamma_f$ , a odozgo s tangentom na  $\Gamma_f$  u točki  $A(-1, -1)$ .

6. (10 bodova) Niz  $(a_n)$  rekurzivno je zadan s

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2a_n} \end{cases} .$$

Provjerite konvergenciju i, ako konvergira, izračunajte mu limes.

7. (10 bodova) Pokažite da za svake dvije funkcije  $f$  i  $g$ , neprekinute na  $[a, b]$  vrijedi nejednakost

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_a^b f(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b g(x)^2 dx .$$

8. (10 bodova) Pokažite da za periodičku neprekinutu funkciju  $f$ , s temeljnim periodom  $T$ , vrijedi:

$$\int_0^T f(nx) dx = \int_0^T f(x) dx ,$$

za svaki  $n \in \mathbf{N}$ .

## Diferencijalni i integralni račun 1

drugi kolokvij, 26.6.2023.

**Napomene:** Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora niti ikakvih formula osim onih koje će vam biti podijeljene na početku pisanja. Svaki oblik varanja (uključujući i samo posjedovanje pametnih uređaja blizu sebe) može biti sankcionirano prijavom Stegovnom povjerenstvu i privremenom zabranom polaganja kolegija.

1. Izračunajte sljedeće integrale

(a) (8 bodova)  $\int \sin^5 x \sqrt{\cos x} dx,$

(b) (8 bodova)  $\int x \operatorname{arctg} x dx$

Diferencijalni i integralni račun 1  
drugi kolokvij, 26.6.2023.

2. (ukupno 15 bodova) Izračunajte integral

$$\int \frac{7^{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx.$$

3a	3b	3c	3d
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

---

JMBAG

IME I PREZIME

## Diferencijalni i integralni račun 1

drugi kolokvij, 26.6.2023.

3. (ukupno 15 bodova)

- (a) (7 bodova) U ovisnosti o parametru  $a > 0$  izračunajte volumen tijela nastalog rotacijom lika omeđenog krivuljom  $y = x^2$  i pravcem  $y = a$  oko  $y$ -osi.
- (b) (8 bodova) Ako konvergira, odredite vrijednost nepravog integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + x}$$

## Diferencijalni i integralni račun 1

drugi kolokvij, 26.6.2023.

4. (10 bodova) Neka je  $\mathcal{P}_n$  particija segmenta  $[0, 1]$  generirana čvorovima  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  za  $x_k = \frac{1}{2^{n-k}}$ . Neka je  $f(x) = x^2$ .

- Izračunajte gornju Darbouxovu sumu  $S_n$  za  $f$  s particijom  $\mathcal{P}_n$ .

- Izračunajte  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Je li on jednak  $\int_0^1 x^2 dx$  ?

5. (10 bodova) Neka je  $f(x) = x^3$  te neka je  $\Gamma_f$  njen graf. Izračunajte površinu lika koji je odozdo omeđen s  $\Gamma_f$ , a odozgo s tangentom na  $\Gamma_f$  u točki  $A(-1, -1)$ .

6. (10 bodova) Niz  $(a_n)$  rekurzivno je zadan s

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2a_n} \end{cases} .$$

Provjerite konvergenciju i, ako konvergira, izračunajte mu limes.

7. (10 bodova) Pokažite da za svake dvije funkcije  $f$  i  $g$ , neprekinute na  $[a, b]$  vrijedi nejednakost

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_a^b f(x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b g(x)^2 dx .$$

8. (10 bodova) Pokažite da za periodičku neprekinutu funkciju  $f$ , s temeljnim periodom  $T$ , vrijedi:

$$\int_0^T f(nx) dx = \int_0^T f(x) dx ,$$

za svaki  $n \in \mathbf{N}$ .