Diferencijalni i integralni račun 1

Skripta iz vježbi

Luka Cigler, Matko Ljulj, Marko Radulović

7. kolovoza 2022.

Sadržaj

1

Područje definicije funkcije

U ovoj lekciji prisjetit ćemo se elementarnih funkcija koje već poznajemo, kako izgledaju njihove domene (ili drugim riječima: područje definicije funkcije), kako izgledaju njihovi grafovi, a nekim funkcijama prokomentirat ćemo i njihove inverze.

Lekcija većinom obrađuje znanja koja već znate s nekih prošlih kolegija, ali ih se podsjećamo jer će nam trebati u ovom kolegiju. Nećemo ih detaljno analizirati i dokazivati, ali ako uvidite da vam neke stvari nisu toliko poznate, savjetujemo da ih se što prije podsjetite.

Polinomi

Polinomi su najjednostavnije funkcije jer se tvore samo zbrajanjem, oduzimanjem i množenjem. Općeniti oblik polinoma s realnim koeficijentima:

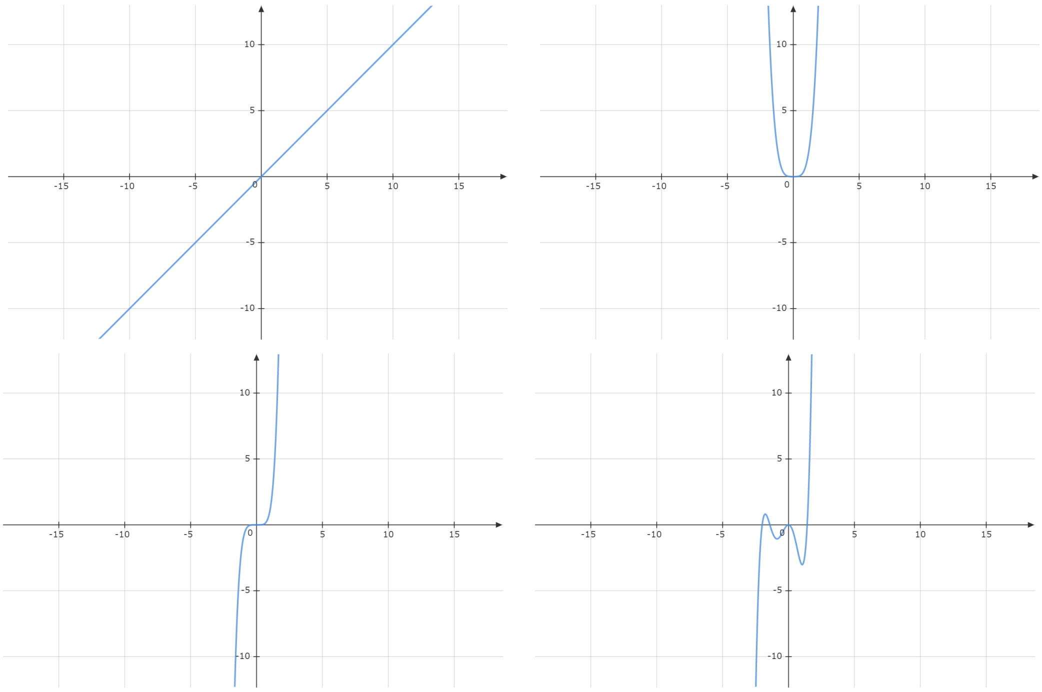
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} + a_{n-1} x^{n-1} + + \dots a_1 x + a_0.$$

Domena im je uvijek $\mathbb{R}$. Graf za općeniti polinom ne znamo nacrtati, ali znamo kako izgledaju grafovi za posebne slučajeve: x, x^2, x^3, ...

Općenito polinomi ne moraju biti bijekcije, pa ne moraju imati inverz. U posebnim slučajevima:

- $f(x) = x^{2n+1}$: bijekcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$; njen inverz je $g(x) = \sqrt[2n+1]{x}$, također funkcija kojoj su i domena i kodomena $\mathbb{R}$.
- $f(x) = x^{2n}$: nije bijekcija, jer nije injekcija (funkcija je parna). No, ako restringiramo domenu na nenegativne realne brojeve, tada funkcija $f\Big|_{[0,+\infty\rangle} : [0, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ jest bijekcija. Njen inverz (s istim domenom i kodomenom) je $g(x) = \sqrt[2n]{x}$.

Ako ne znamo, napomenimo da je funkcija $f(x)$ **parna** ako za svaki x vrijedi $f(x) = f(-x)$. Njezin graf osnosimetričan je u odnosu na os y. Funkcija može biti i **neparna**: za takvu za svaki x vrijedi da je $f(x) = -f(-x)$, a graf im je centralnosimetričan u odnosu na ishodište. Funkcija ne mora biti ni parna ni neparna, što najčešće i jest slučaj. Jedina funkcija koja je i parna i neparna je $f(x) = 0$.



Slika 1.1: Grafovi funkcija x, x^{2n}, x^{2n+1} i $x^2(x^2-2)(x+2)$ redom.

Prije sljedećih funkcija, napomenimo još nešto što znamo o polinomima. Polinom stupnja n ima n kompleksnih nultočaka, brojeći i njihovu kratnost, pa se polinom s početka može pisati i na sljedeći način:

$$P(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_m)^{k_m},$$

gdje su $x_1,\dots,x_m$ različite nultočke, a $k_1,\dots,k_m$ prirodni brojevi koji označavaju njihove kratnosti. Jasno, mora vrijediti $k_1+\dots+k_m=n$. Taj polinom može imati realne i kompleksne nultočke. Ako su mu neke nultočke kompleksne, a koeficijenti polinoma su realni, tada kompleksne nultočke dolaze u konjugirano kompleksnim parovima. Tada možemo pisati i

$$P(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_r)^{k_r}(x-z_1)^{l_1}(x-\overline{z_1})^{l_1}\dots(x-z_s)^{l_s}(x-\overline{z_s})^{l_s},$$

gdje su $x_1,\dots,x_r$ r realnih nultočaka, $z_1,\overline{z_1},\dots,z_s,\overline{z_s}$ s parova kompleksno konjugiranih nultočaka, te k_i i l_j odgovarajuće kratnosti. Mora vrijediti $k_1+\dots+k_r+2l_1+\dots+2l_s=n$. Ako grupiramo parove kompleksno konjugiranih nultočaka (izmnožimo zagrade koje uključuju njihove nultočke), dobivamo kvadratne polinome s realnim koeficijentima. Zato možemo pisati i

$$P(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_r)^{k_r}(x^2+c_1x+d_1)^{l_1}\dots(x^2+c_sx+d_s)^{l_s},$$

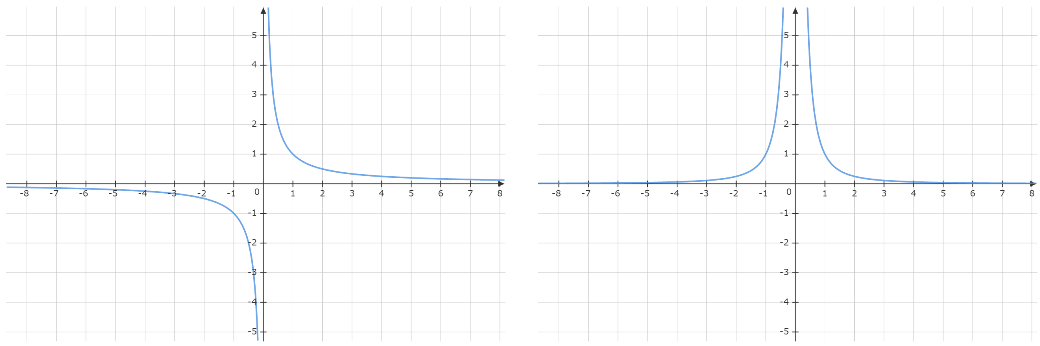
gdje su $(x^2+c_ix+d_i)=(x-z_i)(x-\overline{z_i})$, za sve $i=1,\dots,s$. Ovakav zapis trebat će nam u drugom dijelu semestra kod integrala.

Racionalne funkcije

Općenito, racionalne funkcije su funkcije koje su dobivene kao omjer dva polinoma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

gdje su $P(x), Q(x)$ neki polinomi. Njihova domena je $\mathbb{R}$ osim (realne) nultočke polinoma Q.



Slika 1.2: Grafovi funkcija x^{-2n+1} i x^{-2n} redom.

Kao i kod polinoma, njihove grafove i bijektivnost je teško odrediti u općenitoj formi. Zato se fokusiramo na neku jednostavnu familiju funkcija $f(x) = \frac{1}{x^n}$. Opet su za neparne n takve funkcije neparne, i imaju inverz na svojoj domeni, dok za parne n su funkcije parne i možemo im naći inverz tek kad restringiramo domenu na $\langle 0, +\infty\rangle$. Kako izgledaju njihove inverzne funkcije?

Prije nego krenemo dalje, recimo još nešto što će nam trebati u vezi racionalnih funkcija. Ukoliko je stupanj polinoma u brojniku veći ili jednak od stupnja polinoma u nazivniku racionalne funkcije f, tada ta dva polinoma možemo podijeliti (s ostatkom): $P(x) = R(x) \cdot Q(x) + S(x)$. Polinom $S(x)$ sada ima strogo manji stupanj od polinoma $Q(x)$. Tada pišemo

$$f(x) = R(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}.$$

Racionalna funkcija kojoj je stupanj u brojniku strogo manji od stupnja u nazivniku naziva se **prava racionalna funkcija**. Gore smo pokazali da se svaka racionalna funkcija na jedinstven način prikazuje kao zbroj polinoma i prave racionalne funkcije.

Ako se ne sjećate kako se polinomi dijele, ovo je dobar trenutak da se prisjetite. Dijeljenje polinoma bit će nam korisno uskoro kad ćemo derivirati funkcije. Derivacija omjera funkcija ima relativno kompliciranu formulu, i korisno je prije toga racionalnu funkciju na neki način pojednostaviti.

Osim ovoga, u drugom dijelu semestra podsjetit ćemo se još i da se prava racionalna funkcija može na jedinstven način rastaviti na parcijalne razlomke. Kako ćemo to raditi u drugom dijelu semestra, nema potrebe da o tome sada razmišljamo, ali budite svjesni da ćemo se trebati i toga prisjetiti.

Iracionalne funkcije

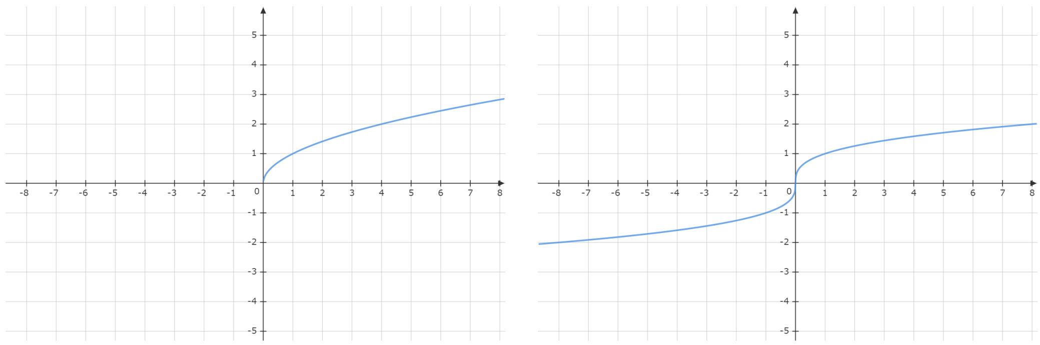
Iracionalna funkcija je svaka funkcija koja u svojoj definiciji ima korijen. Osim jednostavnih primjera, oni mogu biti i komplicirani, pa su tako sve funkcije

$$\sqrt{x}, \sqrt{2x+3}+7, \frac{\sqrt[7]{5x^2-1}+\sqrt[4]{\frac{1+x}{x^2}}}{7-\sqrt{x-1}}$$

sve primjeri iracionalnih funkcija. Ključno je da taj korijen ne ovisi o varijabli, jer primjerice $\sqrt[x]{7}$ nije iracionalna funkcija.

Vidimo, dakle, da su korijeni osnovni objekti kojima stvaramo iracionalne funkcije. Oni utječu na domenu funkcije: ako je korijen paran, onda ono što se nalazi ispod korijena mora biti nenegativno.

Općeniti graf neke iracionalne funkcije opet ne znamo nacrtati, ali znamo kako izgledaju grafovi posebne klase funkcija $f(x) = x^{1/n}$, jer smo ih dobili kao inverze posebne klase polinoma. Prisjetimo se: graf inverzne funkcije dobije se preslikavanjem grafa originalne funkcije preko pravca $y = x$.



Slika 1.3: Grafovi funkcija $\sqrt[2n]{x}$ i $\sqrt[2n+1]{x}$ redom.

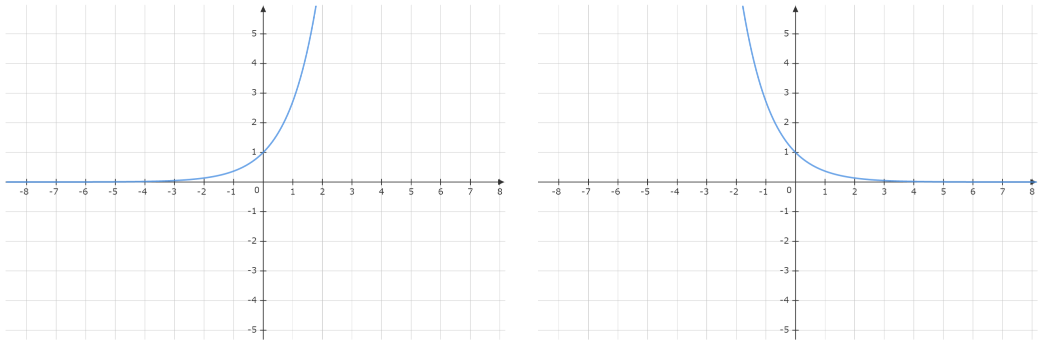
Eksponencijalne i logaritamske funkcije

Eksponencijalne funkcije općenito su funkcije oblika $f(x) = a^x$. Znamo uvjete: $a > 0$, $a \neq 1$.

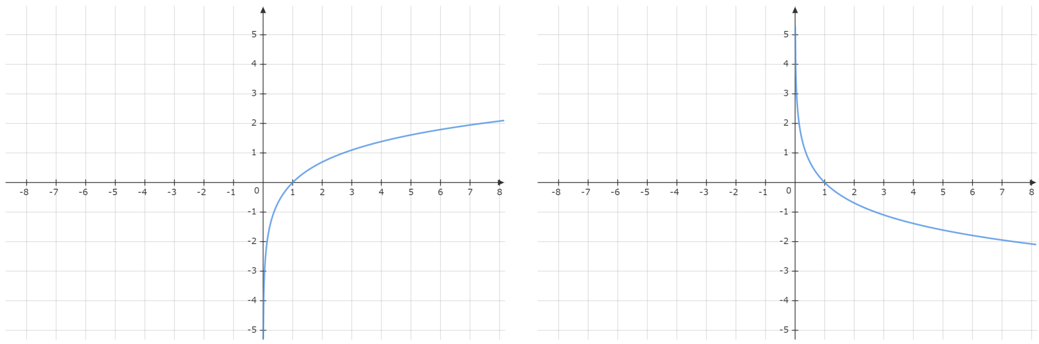
Napomenimo za svaki slučaj: izraz oblika a^b može biti definiran i u nekim slučajevima kada je a negativan (ili jednak 1), no u definiciji eksponencijalne funkcije tražimo nužno uvjet $a > 0$. U tom slučaju, izraz a^b izraz je dobro definiran za sve b. Također, tražimo i $a \neq 1$, jer inače imamo konstantnu funkciju, koja nema ostala svojstva eksponencijalnih funkcija.

Eksponencijalna funkcija je bijekcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^+ := \langle 0, +\infty\rangle$. Ovisno o $a > 1$ ili $a < 1$, funkcija je rastuća ili padajuća. Kako je bijekcija, funkcija ima inverz, koji zovemo logaritam.

Logaritamska funkcija je funkcija oblika $f(x) = \log_a x$, uz iste uvjete na a kao za eksponencijalnu funkciju. Te funkcije su bijekcije iz $\mathbb{R}^+$ u $\mathbb{R}$, te su ponovno rastuće ili



Slika 1.4: Grafovi funkcija a^x i b^x redom, uz $a > 1 > b$.



Slika 1.5: Grafovi funkcija $\log_a x$ i $\log_b x$ redom, uz $a > 1 > b$.

padajuće ovisno o tome je li im baza veća ili manja od 1. Implicitno smo sada rekli: ako neka funkcija u sebi ima logaritamsku, za pronalaženje njene domene nužno je da je ono što se nalazi u argumentu logaritamske funkcije pozitivno.

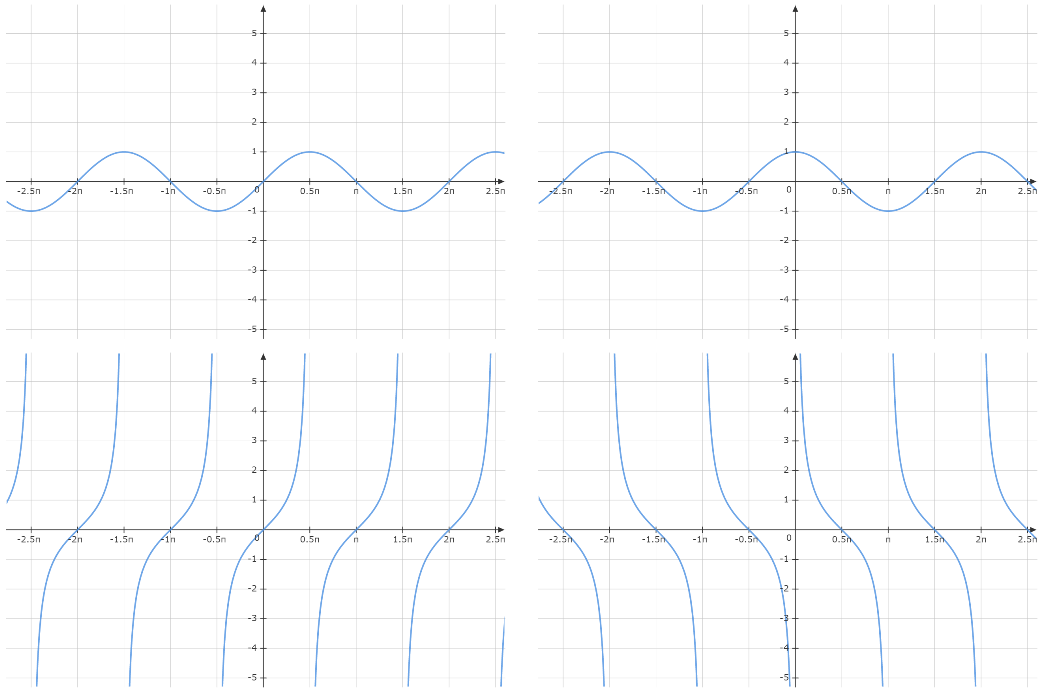
Među bazama a za eksponencijalnu funkciju i logaritamsku, uskoro ćemo najviše koristiti broj e. On je iracionalan (dapače, transcendentan) broj. Njegovih prvih nekoliko znamenaka: $e \approx 2.718281828\ldots$. Naziva se *Eulerovom konstantom*, a definiciju ćemo vidjeti u sljedećoj lekciji. Logaritam s bazom e kraće pišemo kao $\log_e x = \ln x$, i nazivamo ga *prirodnim logaritmom*.

Trigonometrijske i ciklometrijske funkcije

Već dobro poznajemo četiri trigonometrijske funkcije:

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1,1],\ \cos : \mathbb{R} \to [-1,1],$$
$$\operatorname{tg} : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R},\ \operatorname{ctg} : \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}.$$

Kao što piše gore, sinus i kosinus definirane su na cijelom skupu realnih brojeva, dok tangens i kotangens imaju točke u kojima nisu definirane. Kako znamo da su tangens i kotangens dobivene kao omjeri sinusa i kosinusa, točke u kojima nisu definirane pamtimo kao nultočke sinusa i kosinusa.



Slika 1.6: Grafovi funkcija $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ redom.

Trigonometrijske funkcije su najbolji primjer periodičnih funkcija: postoji neki $P > 0$ takav da je $f(x) = f(x+P)$ za sve x iz domene od f. Za prve dvije funkcije, temeljni period je 2π, a za druge dvije je π.

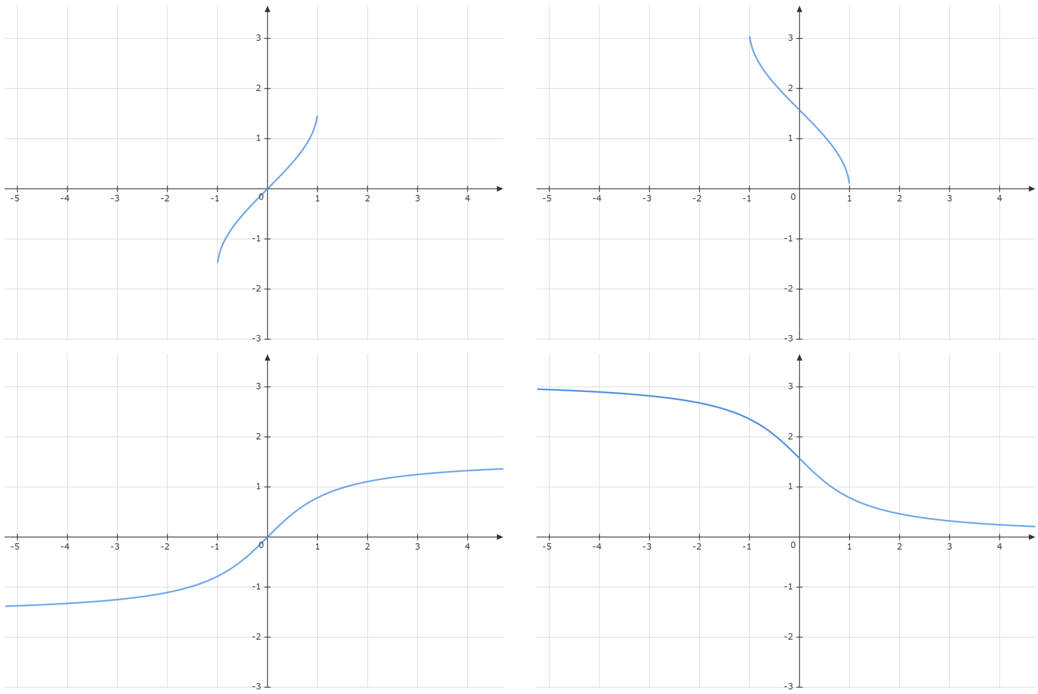
Tangens i kotangens su surjekcije na cijeli $\mathbb{R}$, dok su sinus i kosinus surjekcije tek na interval $[-1, 1]$. No, zbog periodičnosti funkcije nisu injekcije, pa nemaju inverz.

Ipak, kao i u slučajevima nekih drugih funkcija koje nisu bijekcije (npr x^2), možemo restringirati njihovu domenu tako da funkcije postanu bijekcije. To radimo na tako da uzmemo najveći mogući interval koji sadrži (ili ima kao jedan od rubova) nulu, te je ili simetričan u odnosu na ishodište ili se nalazi u nenegativnom dijelu domene $\mathbb{R}$. Kada to napravimo, dobijemo funkcije kojima možemo naći inverz. Njihove inverzne funkcije nazivaju se *ciklometrijskima* i to su

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \ \arccos : [-1, 1] \to [0, \pi],$$

$$\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \ \operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to \langle 0, \pi \rangle.$$

Napomena 1.1. Promotrimo sljedeće. S jedne strane, promotrimo sve x koji zadovolja-



Slika 1.7: Grafovi funkcija $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arcctg} x$ redom.

vaju jednadžbu

$$\sin x = \frac{1}{3},$$

a s druge strane, promotrimo sve y koji zadovoljavaju

$$y = \arcsin \frac{1}{3}.$$

Ove dvije jednadžbe imaju mnogo toga zajedničkog (dapače, funkcija arcsin jest uvedena da bismo mogli rješavati jednadžbe prvog tipa), ali i mnogo toga različitog.
Postoji točno jedan y takav da je zadovoljena druga jednadžba. Kako je arcsin funkcija, a funkcija ima svojstvo da svakoj vrijednosti iz domene pridružuje točno jednu vrijednost iz kodomene, y je točno jedan broj. Nije lijep, iznosi $y \approx 0.33984$, ali je samo jedan broj. S druge strane, jednadžba po x ima beskonačno rješenja, među kojima je y samo jedno od njih. Sva rješenja za x dana su s

$$\arcsin \frac{1}{3} + 2k\pi \text{ i } \left(\pi - \arcsin \frac{1}{3}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Provjerite ovo i na primjeru neke "ljepše" vrijednosti (npr za $1/2$ umjesto $1/3$).

Analogno vrijedi i malo jednostavnijoj varijanti: skup svih x takvih da je $x^2 = 7$ nije isti kao skup svih y takvih da je $y = \sqrt{7}$. Vrijednost $y = \sqrt{7}$ je samo jedan broj, njenu vrijednost možemo vidjeti kalkulatorom. S druge strane, jednadžba $x^2 = 7$ ima dva rješenja: $\pm\sqrt{7}$, ponovno dobivena pomoću inverzne funkcije za x^2.

Ostalo

Među nespomenutim elementarnim funkcijama, postoje još i takozvane *hiperbolne funkcije*:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

no njihovo poznavanje nije presudno za ovaj kolegij.

U nastavku lekcije na stranicama kolegija možete naći mnogo zadataka kojima možete vježbati pronalazak domene raznih funkcija sastavljenih od ovdje spomenutih. Nećemo se mnogo fokusirati na takve zadatke, nego ćemo riješiti jedan komplicirani primjer, i što prije krenuti na ostatak gradiva u kojem ćemo učiti nešto novo.

Primjer 1.2. Odredimo područje definicije funkcije

$$f(x) = \log_{\sqrt[3]{e^x - 1}} \left(\operatorname{ctg}^2 \left(\sqrt{1 - \frac{x}{4}} \right) \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 2} \right).$$

Ovaj zadatak je jedan veliki, komplicirani zadatak koji nam je dovoljan da ponovimo sve što je bitno za račun područja definicije proizvoljne funkcije.
Za logaritam znamo da mu baza mora biti pozitivan broj različit od 1, a argument pozitivan broj. Kao prvo, imamo

$$\sqrt[3]{e^x - 1} > 0 \text{ i } \sqrt[3]{e^x - 1} \neq 1.$$

Sada imamo treći korijen. On nema uvjete u svojoj domeni (za razliku od parnih korijena). Gledajući mu graf, vidimo da je rastuća funkcija, pa ako je treći korijen iz nekog broja pozitivan, tada i ono što je ispod korijena je pozitivno, odnosno dobivamo uvjet $e^x > 1$. Sada znamo i da je e^x rastuća funkcija, pa dobivamo prvi uvjet: $x > 0$. Iz drugog uvjeta slično dobivamo da je $e^x - 1 \neq 1$, a zatim $x \neq \ln 2$.
Obratimo sada pažnju na argument logaritma. On mora biti pozitivan, a prvi faktor je već nenegativan. Dakle, prvi faktor mora biti različit od nule, a drugi mora biti pozitivan.
Pogledajmo prvi od ta dva faktora. U argumentu mu se nalazi parni korijen, koji nam daje još jedan uvjet: $1 - x/4 \geq 0$, tj $x \leq 4$.
Nadalje, izbacujemo točke u kojima ctg nije definiran ili je jednak nuli. To se događa u točkama oblika $\frac{k}{2}\pi$, zato imamo

$$\sqrt{1 - \frac{x}{4}} \neq \frac{k}{2}\pi \implies 4 - x \neq k^2\pi^2 \implies x \neq 4 - k^2\pi^2, k \in \mathbb{Z}.$$

Dakle, iz domene ćemo trebati izbaciti točke oblika $4, 4 - \pi, 4 - 4\pi, 4 - 9\pi \ldots$.
Sada pogledajmo faktor koji uključuje arctg. Prvi korak je, koliko god banalan, prebrojati broj slova "c" u funkciji. Vidimo da se radi u funkciji arkus tangens, a ne arkus kotangens. Ona je pozitivna ako je i njen argument pozitivan. Dakle, dobili smo uvjet

$$\frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 2} > 0.$$

	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	2	3	$+\infty$
$2x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$	
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$\frac{2x^2-5x-3}{x-2}$	$-$	$+$	$-$	$+$	

Ova nejednakost rješava se faktorizacijom brojnika i gledanjem tablice. Kako je $2x^2 - 5x - 3 = (2x+1)(x-3)$, imamo prikazanu tablicu.
Rješenje te nejednadžbe je $x \in \left\langle \frac{-1}{2}, 2 \right\rangle \bigcup \langle 3, +\infty \rangle$.
Konačnu domenu funkcije f dobit ćemo kao presjek svih uvjeta:

- $x > 0$,
- $x \neq \ln 2$,
- $x \leq 4$,
- $x \neq 4, 4 - \pi^2, 4 - 4\pi^2, 4 - 9\pi^2, \ldots$,
- $x \in \left\langle \frac{-1}{2}, 2 \right\rangle \bigcup \langle 3, +\infty \rangle$.

Kako je među brojevima u četvrtoj natuknici samo 4 pozitivan (jer je π^2 veći od 9), i kako je $\ln 2$ između 0 i 1 (jer je $e^0 = 1 < 2 < e = e^1$), vidimo da je konačno rješenje

$$\mathcal{D}_f = (\langle 0, 2 \rangle \setminus \{\ln 2\}) \cup \langle 3, 4 \rangle \, .$$

Moguće ga je napisati na mnogo načina. Onaj koji ćemo najčešće kasnije koristiti je pomoću unije disjunktnih intervala:

$$\mathcal{D}_f = \langle 0, \ln 2 \rangle \cup \langle \ln 2, 2 \rangle \cup \langle 3, 4 \rangle \, .$$

2

Limesi i neprekidnost

Funkcije iz prošle lekcije su "lijepe": njihovi grafovi mogu se nacrtati u jednom potezu, ili ako nisu definirane na cijeloj domeni, onda na svakom intervalu na kojem su definirane imaju to svojstvo. Takvo svojstvo nemaju sve funkcije - doslovno svako pridruživanje koje svakoj točki domene $\mathbb{R}$ pridaje točno jednu vrijednost kodomene $\mathbb{R}$ je jedna funkcija. Tako postoje i neki primjeri poput funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

kojojj se graf ni na kojem intervalu ne može nacrtati u jednom potezu (kasnije ćemo reći: ni na kojem intervalu nije neprekidna). Također, postoje i primjeri funkcija kojima je graf gust u $\mathbb{R}^2$. Ipak, na vježbama se nećemo baviti takvim primjerima - samo upamtite da nisu sve funkcije "lijepe".

Za funkcije koje nisu lijepe, ali i neke funkcije iz prošle lekcije, potrebna nam je sljedeća definicija.

Definicija 2.1. Funkcija $f : I \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ ima limes L u točki c ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in I \setminus \{c\})((|x - c| < \delta) \implies (|f(x) - L| < \varepsilon)).$$

Pišemo $\lim\limits_{x \to c} f(x) := L$.

Napomena 2.2.

- Stroga definicija napisana je radi potpunosti, ali nemojte ju jako gledati. Intuitivno: što je varijabla x "bliže" točke c, vrijednost funkcije $f(x)$ je sve "bliže" realnom broju L. Ta vrijednost L je neka vrijednost u kojoj je logično da f "nastavi svoje djelovanje". Također, limes L i njegovo postojanje ovisi o funkciji f, ali i točki c u kojoj promatramo limes.

- Ako limes postoji, jedinstven je. Također, limes je realan broj - ne može biti $\pm\infty$. Ako limes postoji, reći ćemo da funkcija konvergira, a inače da divergira.

- Funkcija ne mora biti definirana u c da bi imala limes u toj točki. Također, ako i jest definirana u toj točki, limes i njena vrijednost mogu se razlikovati (npr. u slučaju funkcije koja je identički jednaka 2 osim u nuli gdje je jednaka recimo 3). Ipak, u slučaju elementarnih funkcija iz prošle lekcije to nije slučaj: ako je funkcija elementarna i definirana u c, njezin limes iznosi $f(c)$.

- Razlog mogućeg nepostojanja limesa može biti:

  1. Limes u nekoj točki "eksplodira" u beskonačno, $f(x) \to \infty$ (ili $-\infty$), npr. za $f(x) = \frac{1}{x}$ i $c = 0$. Obratite pažnju na način izražavanja - reći ćemo da f teži u beskonačnost, ali beskonačnost nije njezin limes.
  2. Kada je varijabla "jako blizu" točke c, funkcijske vrijednosti $f(x)$ se približavaju dvjema različitim vrijednostima, npr. $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $c = 0$. Primijetite, kada se nalazimo bilo gdje lijevo od 0, funkcija je uvijek jednaka -1, a bilo gdje desno od 0, funkcija je jednaka 1. Rekli smo da je limes jedinstven realan broj (ako postoji), pa u ovom slučaju ne postoji.
  3. Vrijednosti u blizini c jednostavno podivljaju. Npr $f(x) = \sin(1/x)$ - što se više približavamo nuli, funkcija sve brže titra između vrijednosti -1 i 1.

- Pogledajmo ponovno primjer $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Rekli smo da ta funkcija nema limes u nuli, no ima lijepo ponašanje s lijeva i zdesna. Kad bismo promatrali samo vrijednosti koje se približavaju slijeva (ili samo zdesna), na taj čudan način mogli bismo reći da funkcija ima limes. Za to postoje i definiraju se jednostrani limesi:

  $$\lim_{x\to c^+} f(x) \text{ i } \lim_{x\to c^-} f(x)$$

  (jednostrani limes zdesna i slijeva, redom). Oni promatraju upravo ono željeno: kako se s iksevima približavamo točki c zdesna (ili slijeva), ako se f približava nekoj vrijednosti L, tada je to njezin jednostrani limes zdesna (slijeva). Koliko iznose ti limesi u našem primjeru?
  Općenito funkcija može imati jednostrane limese, a da nema "normalan" limes. Ali, postoji i sljedeća tvrdnja: funkcija ima "normalan" limes ako i samo ako ima oba jednostrana limesa koji se poklapaju.

- Osim jednostranih limesa, spomenimo da postoje još dva tipa limesa koji se ne uklapaju u definiciju s početka:

  $$\lim_{x\to +\infty} f(x) \text{ i } \lim_{x\to -\infty} f(x)$$

  su, ako postoje, vrijednosti kojima se $f(x)$ približavaju kako x ide u $+\infty$ ili $-\infty$. Kao i ostali limesi, ako postoje, jedinstveni su i nužno su realni brojevi. Primjerice, funkcija e^x ima $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ i jednak je nuli (jer joj se graf priljubljuje uz x-os), a nema $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

- Limesi se lijepo ponašaju s obzirom na osnovne operacije, no samo u slučaju kada limesi $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ postoje (dakle nisu $\pm\infty$!):
  $\lim\limits_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x)$
  $\lim\limits_{x\to c}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to c} g(x)$
  $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$.
  U posljednjoj jednakosti trebamo dodatnu pretpostavku $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$, da bi stvar imala smisla.

- Nije definirano:
  $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \pm\infty \cdot 0, \infty^0, \infty - \infty, 1^{\pm\infty}, 0^0$.
  Ovo nisu brojevi, pa ni izrazi. Ovo samo znači da ako uvrštavanjem vrijednosti x u izraz dobijete da morate izračunati nešto od navedenog, znači da radite krivo i da morate promijeniti pristup rješavanja limesa, odnosno dalje "sređivati" izraz dok ne postane "pitomiji". Bit će jasnije kada krenemo rješavati.

Pogledajmo na konkretnim primjerima kako rješavati zadatke s limesima. Ne postoji neka špranca, nego svakom treba pristupiti odvojeno i naći odgovarajuću metodu.

Primjer 2.3. Odredimo sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{\sin x \cdot x^3}{x^2 - 2}$
Prvi pokušaj prilikom rješavanja limesa je sljedeći: funkcija koju dobijemo je zbroj, razlika, umnožak, kvocijent i/ili kompozicija elementarnih funkcija iz prošle lekcije. Ako je ta funkcija definirana u točki c u kojoj promatramo limes, taj limes je jednak vrijednosti u c.

Uvrštavanjem u ovaj izraz dobivamo

$$\frac{\sin 7 \cdot 7^3}{7^2 - 2} = \sin 7 \cdot \frac{343}{7},$$

pa je iz gore rečeno to ujedno i traženi limes.
Ova metoda jest prvi pokušaj, ali rijetko kada ćemo dobiti limes samo tako. Tada trebamo koristimo neke druge metode.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x}$.
Uvrštavanjem $x = 0$ dobijemo $\frac{0}{0}$, što je neodređeni izraz. Dakle, kada dobijemo jedan neodređeni izraz, naša metoda rješavanja je kriva i moramo naći neki drugi način.
Pogledajmo malo bolje funkciju kojoj određujemo limes. U svim točkama osim u nuli, ova funkcija je zapravo funkcija $f(x) = x$. Intuitivno, limes bi trebao nastaviti ponašanje te funkcije i u nuli, i zato je intuitivno limes jednak nula.

Preciznije, metoda koju koristimo je da podijelimo brojnik i nazivnik sa x. Tada slijedi

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{1}=\lim_{x\to 0}x.$$

Sada možemo uvrstiti $x=0$ (više nemamo neodređeni izraz), i dobivamo da je traženi limes jednak 0.
Primijetite da smo tu koristili činjenicu da funkcija u limesu ne mora biti definirana u c. Također limes ovisi samo o ponašanju funkcije blizu c, ali ne i u toj točki. Zato smo mogli podijeliti s x: funkcija $f(x)=x$ kad smo blizu nuli jest blizu nuli, ali nije jednaka nuli - pa ne dijelimo s nulom. Ovo više nećemo spominjati u nastavku

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$.
Uvrštavanje opet daje nedefiniran izraz (i nadalje će uvijek biti tako) oblika $\frac{0}{0}$. Primijetimo da je brojnik zapravo jednak $(x-1)(x+1)$, pa i nazivnik i brojnik imaju faktor $(x-1)$ zbog kojeg su oba jednaka nuli kada evaluiramo funkciju u 1. Stoga dijeljenjem brojnika i nazivnika s $(x-1)$ slijedi

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}.$$

Uvrštavanjem $x=1$, dobiveni izraz je oblika $\frac{2}{0}$, te taj limes ne postoji (ide u neku beskonačnost), dakle funkcija s početka divergira u $x=1$.
Dapače, taj izraz ne teži ni u $+\infty$, niti u $-\infty$. Preciznije, kada je x blizu 1, ali veći od njega, tada je izraz $\frac{x+1}{x-1}$ omjer broja blizu 2 i jako malog pozitivnog realnog broja. S druge strane, kada je x blizu 1, ali manji od njega, tada je izraz $\frac{x+1}{x-1}$ omjer broja blizu 2 i negativnog broja koji je po apsolutnoj vrijednosti jako malen. Zato zapravo vrijedi

$$\frac{x^2-1}{(x-1)^2}\to+\infty \text{ kada } x\to 1^+, \text{ te } \frac{x^2-1}{(x-1)^2}\to-\infty \text{ kada } x\to 1^-.$$

Primijetite oznake: nismo rekli da je ikoji od limesa slijeva ili zdesna jednak $+\infty$ ili $-\infty$, jer limes je uvijek realan broj.

d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.
Pokušajmo i ovaj zadatak riješiti kao prethodne: imali smo racionalnu funkciju kojoj smo dijelili brojnik i nazivnik s $(x-c)$ dok nismo dobili izraz koji je definiran. U ovom zadatku prvo treba svesti izraz na zajednički nazivnik. Budući da je $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$, slijedi

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2-2}{(1-x)(1+x+x^2)}.$$

Uvrštavanjem $x=0$, dobivamo neodređeni izraz $\frac{0}{0}$, pa dijelimo i brojnik i nazivnik s $(x-1)$ (ili $(1-x)$). Brojnik možemo podijeliti s $x-1$ ili algoritmom za dijeljenje polinoma, ili možemo naći nultočke kvadratne funkcije. Pokušajte sami dovršiti primjer.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+4}{x^3+1}$.
Za razliku od prijašnjih limesa, ovdje nemamo limesa u nekoj točki $c \in \mathbb{R}$, nego kada $x \to +\infty$.
Pogledajmo brojnik: u njemu je polinom, koji se sastoji od kubnog člana i konstante. Kada $x \to +\infty$, kubni član raste i ide u beskonačnost, dok konstanta "ostaje na mjestu". Intuitivno, odluka o limesu cijelog izraza ovisi o kubnom članu - kada je x npr. jednak tisuću, nije bitno je li brojnik jednak dvije miljarde ili dvije miljarde i četiri. Slična priča je i u nazivniku.
To opravdavamo dijeleći i brojnik i nazivnik s x^3:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+4\,/:x^3}{x^3+1\,/:x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+4/x^3}{1+1/x^3}.$$

Kako $1/x^3$ teži k nuli kada $x \to \infty$, cijeli izraz teži ka $\dfrac{2+0}{1+0} = 2$.
Sada je jasnije zašto smo dijelili s x^3 - htjeli smo podijeliti s najvećom potencijom koja se pojavljuje u brojniku ili nazivniku, tako da u zadnjem koraku imamo ili konstante ili izraze koji teže k nuli.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^4+x^3-5}{(x^2+1)(x+2)(x^2-7)}$.
Situacija je slična kao u prošlom primjeru. Ponovno tražimo najveću potenciju koja se pojavljuje u brojniku ili nazivniku. U brojniku je to x^4. U nazivniku, kada bismo raspisali sve zagrade, to bi bil $x^{(2+1+2)} = x^5$. Zato dijelimo s x^5:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4+x^3-5\,/:x^5}{(x^2+1)(3x+2)(x^2-7)\,/:x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^5}}{(1+\frac{1}{x^2})(3+\frac{2}{x})(1-\frac{7}{x^2})}.$$

Kada iskoristimo da x^{-n} teži k nuli za sve prirodne n, imamo da izraz teži k $\dfrac{0}{1\cdot 3\cdot 1} = 0$.
Primijetimo da zagrade u nazivniku nismo sve izmožili. Treba nam samo vrijednost najveće potencije. Izmnožavanjem samo povećavamo vjerojatnost da ćemo pogriješiti u zadatku.

Dakle, u ovim primjerima naučili smo dvije metode:

Metoda 1) Uvrsti $x = c$ u izraz. Rijetko daje rezultate odmah, no ako smo dobro primijenili neku drugu metodu, daje rezultate na kraju.

Metoda 2) U slučaju racionalnih (a uskoro ćemo vidjeti i nekih drugih sličnih funkcija), dijeli brojnik i nazivnik s $(x-c)^p$, gdje je p neka potencija (ako se traži limes kada $x \to c$, $c \in \mathbb{R}$), ili s x^m, gdje je m najveća potencija koja se pojavljuje u brojniku ili nazivniku (ako se traži limes kada $x \to \pm\infty$).

U slučaja limesa kada je $c \in \mathbb{R}$, uvijek smo do sada dijelili s $(x-c)^1$. Može se dogoditi da treba dijeliti i ponovno s istim faktorom, a može se dogoditi i da treba dijeliti s nekim korijenom. Ovaj drugi slučaj je rijedak, ali je jasno kada ga treba upotrijebiti jer će se tada pojaviti još neki korijeni u zadatku.

Pogledajmo još zadataka i naučimo još metoda.

Primjer 2.4. Odredimo sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x^4}}$.

U pimjerima ovog tipa (limes u beskonačnosti nečega što izgleda kao racionalna funkcija samo su tu i tamo ubačeni korijeni) zapravo nemamo ništa novoga. Dijelimo brojnik i nazivnik s najvećom potencijom od x, samo sada nam se sada ne javljaju samo prirodne potencije, nego i racionalne. Sjetite se, $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$. Dakle, treba podijeliti brojnik i nazivnik sa najvećom potencijom, a to je $x^{\frac{4}{3}}$. Dobivamo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{3}{x^{\frac{4}{3}}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + 1} = \frac{0+0}{0+1} = 0,$$

gdje smo u predzadnjoj jednakosti iskoristili činjenicu da za svaki pozitivan realan broj p vrijedi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0.$$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

Ovdje su skrivena dva zadatka: kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$. Za limes u $+\infty$, tražimo najveću potenciju od x u brojniku, što je $\sqrt{x^2} = x$; odnosno nazivniku, što je $x^1 = x$, te zatim podijelimo brojnik i nazivnik sa x. Dovršite primjer.

Za limes u $-\infty$, moramo biti oprezni, budući da za realne brojeve $y < 0$ vrijedi $\sqrt{y^2} = -y$ (zaista, općenito je $\sqrt{y^2} = |y|$, pa za negativne ispred apsolutne vrijednosti mijenjamo predznak). Zato, dijeleći brojnik i nazivnik sa x dobivamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = -1.$$

Ako želimo izbjeći poteškoće s predznakom, možemo naprosto uvesti supstituciju $t = -x$, jer tada zapravo računamo limes kada $t \to +\infty$. Dakle, umjesto originalnog limesa, tražimo

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{(-t)^2+1}}{(-t)+1} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t^2+1}}{-t+1},$$

što znamo (uvjerite se!) dovršiti.
Općenito, ako još niste sigurni u početku, predlažemo da koristite supstituciju. Pazite da kada napravite supstituciju, da promijenite i kamo nova varijabla sada teži.

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.
Ovaj je primjer najlakše riješiti supstitucijom, na način da se riješimo korijena. To će zadovoljiti supstitucija $t = x^{12}$ (zašto baš ta? $12 = NZV(3,4)$, najveći zajednički višekratnik). Kada $x \to 1$, očito i $t \to 1$. Limes postaje

$$\lim_{t\to 1} \frac{t^4-1}{t^3-1} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \ldots = \frac{4}{3}.$$

Drugi način kako možemo ovo riješiti je racionalizacija. Pokušajte se vratiti na ovaj zadatak nakon što riješimo sljedeći primjer.

Dakle, ovdje smo naučili da metodama koje smo spomenuli prije primjera možemo rješavati i zadatke koji uključuju korijen. Također, naučili smo da možemo koristiti i supstituciju, no nećemo to zvati nekom metodom.

Primjer 2.5. Odredimo sljedeće limese

a) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.
Limes je oblika $\frac{0}{0}$. U nazivniku nam se ta nula javlja zbog faktora $x-7$, pa takav faktor treba "pronaći" i u brojniku, kako bismo ih poništili. Tu u priču ulazi racionalizacija. Iako smo u školi naučili racionalizirati nazivnik, sada možemo generalizirati to pravilo: racionaliziramo ono što nam je "problematično". Ovdje je to očito brojnik, pa množenjem brojnika i nazivnika faktorom koji će nam dopuniti brojnik na razliku kvadrata, imamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}\,/\cdot(2+\sqrt{x-3})}{x^2-49\quad /\cdot(2+\sqrt{x-3})} &= \lim_{x\to 7} \frac{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})} \\
&= \lim_{x\to 7} \frac{4-(x-3)}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})} \\
&= \lim_{x\to 7} \frac{7-x}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})} \\
&= \lim_{x\to 7} \frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})} = -\frac{1}{56}.
\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-2x-1} - \sqrt{x^2-7x+3})$.
Limesi oblika $\infty-\infty$ najčešće se rješavaju svođenjem na zajednički nazivnik. Ovdje nemamo nazivnik, no možemo ga stvoriti, racionalizacijom (ponašamo se kao da

imaju zajednički nazivnik jednak 1):

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}) = \\
&= \frac{(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})(\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3})}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-2x-1)-(x^2-7x+3)}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{5x-4}{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt{x^2-7x+3}}.
\end{aligned}$$

Dovršite primjer (dijeleći s najvećom potencijom u brojniku odnosno nazivniku). Razmislite i sami riješite isti primjer kada $x \to -\infty$.

Naučili smo još jednu metodu:

Metoda 3) Racionalizacija, brojnika ili nazivnika (neovisno o potrebama), čak i kada naoko nemamo razlomak u izrazu. Nakon toga primijenjujemo neku od prijašnjih metoda.

Prisjetite se: kako biste racionalizirali izraze kada nemate drugi korijen, nego recimo treći ili četvrti? S kojim tada izrazima proširujemo razlomak.

Zadaci za samostalno rješavanje:

Zadatak 2.6. Odredite limese

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-3)^5(3x+1)^3(2x^2-5x+3)}{(1-x)^7(6x^3+2x+3x+1)}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(x-\sqrt{x^2+1})$,

(f) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$,

(g) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-x-1}{x}$,

(h) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x}-x+1}{x}$.

Kada se malo odmaknemo od racionalnih i iracionalnih funkcija, preostaje cijela klasa problema rješavanja limesa, od kojih se dobar dio svodi na neki (tj. neke) od poznatih limesa, koje možete koristiti u rješavanju zadataka. Najkorisniji su:

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
- $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$,
- $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$,
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$,
- $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$.

Posljednji od navedenih je u ponešto standardnijoj formi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

To su limesi koje smatramo "poznatima", "tabličnima", i smijemo ih koristiti. Zato u sljedećim primjerima imamo novu metodu:

Metoda 4) Korištenje "tabličnih" limesa: pokušat ćemo faktorizirati izraz tako da neki faktori budu upravo neki od gore navedenih izraza.

Primjer 2.7. Odredimo sljedeće limese:

a) $\lim_{x\to\infty} x \sin \frac{1}{x}$.
Kod limesa koji uključuju trigonometrijeske funkcije, u pozadini je najčešće limes $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, te iz njega izvedeni limesi.
Kada $x \to \infty$, očito $\frac{1}{x} \to 0$. Dakle, argument funkcije sin teži ka 0, što nas podsjeća na gore naveden limes. Možemo samo transformirati izraz:

$$\lim_{x\to\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$$

Posljednji je limes jednak 1. Zaista, ako uzmemo supstituciju $t = \frac{1}{x}$, tada limes postaje

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(13x)x}{\sin^2(12x)\cos(4x)}$.
Ponovo krećemo s analizom kao u prethodnom primjeru. Kada $x \to 0$, očito i

$13x \to 0$ i $12x \to 0$. Primijetite da je $\lim_{x\to 0} \cos(4x) = \cos 0 = 1$, tako da nam taj dio ne radi nikakve probleme. Slijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin(13x)x}{\sin^2(12x)\cos(4x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(13x)}{13x}(13x)x}{\frac{\sin^2(12x)}{(12x)^2}(12x)^2\cos(4x)} \\
&= \frac{13 \cdot \frac{\sin(13x)}{13x}}{\frac{\sin^2(12x)}{(12x)^2} \cdot 12^2 \cdot \cos(4x)} \\
&= \frac{\sin(13x)}{13x} \cdot \left(\frac{\sin(12x)}{12x}\right)^{-2} \cdot \frac{13}{144 \cdot \cos(4x)}.
\end{aligned}$$

Sada smo u poziciji iskoristiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(13x)}{13x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(12x)}{12x}\right)^{-2} = 1$$

(u pozadini ovih tvrdnji su supstitucije $t = 13x$ odnosno $t = 12x$). Sada znamo kamo svaki faktor teži, pa onda i kamo teži njihov umnožak. Rezultat je $\frac{13}{144}$.

Kratka digresija: primijetite da smo ovdje komplicirani izraz rastavili na faktore, pa iskoristili da je umnožak limesa jednak limesu umnoška. Savjetujemo da to i inače radite, a ne da neke limese sredite ranije, jer može doći do pogrešaka. Jedna takva bi bila

$$(?!) \quad \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = 0 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = 0. \quad (?!)$$

Sami zaključite gdje je pogreška.

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$.
Ovo je limes koji je korisno za zapamtiti i ubuduće.
Iskoristit ćemo formulu za dvostruki kut funkcije kosinus. Vrijedi

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Uvrstite u početni limes i iskoristite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = 1,$$

uvjerite se da znate zašto je to ispunjeno. Rezultat koji treba dobiti je $\frac{-1}{2}$.

Drugi način rješavanja originalnog limesa bi bilo proširiti razlomak izrazom $1 + \cos x$. Pokušajte riješiti i na taj način.

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x^2+x)}{x^2+x}$.
Budući da nemamo "tabličnih" limesa koji uključuju $\operatorname{tg} x$, iskoristiti ćemo definiciju funkcije $\operatorname{tg} x$. Slijedi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x^2+x)}{x^2+x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x^2+x)}{\cos(x^2+x)}}{x^2+x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2+x)}{\cos(x^2+x)\cdot(x^2+x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2+x)}{x^2+x} \cdot \frac{1}{\cos(x^2+x)}.
\end{aligned}$$

Prvi faktor na limesu iznosi 1 (zašto?), dok je drugi definiran u nuli, i također iznosi 1. Zato je traženi limes jednak $1 \cdot 1 = 1$.

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(5x)}{x}$.
Kod ciklometrijskih funkcija, najčešći početak je supstitucija. Ako supstituiramo $t = \operatorname{arctg}(5x)$, tada dobivamo da za $x \to 0$ slijedi $t \to 0$. Također, iz supstitucije slijedi $\operatorname{tg} t = 5x$, odnosno $x = \frac{1}{5}\operatorname{tg} t$. Ako sve dobiveno uvrstimo u početni limes, slijedi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(5x)}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\frac{1}{5}\operatorname{tg} t} = \lim_{t\to 0} \frac{5\cos t}{\frac{\sin t}{t}} = 5.$$

Kod izraza oblika $f(x)^{g(x)}$, kao i kod drugih oblika, prvo primijenimo metodu 1) (uvrstimo c). Ako ne dobijemo neodređeni izraz, odlično, ali najčešće ćemo ga dobiti (vjerojatno $1^{\pm\infty}$, 0^0 ili ∞^0). Tada je dobro iskoristiti limes $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ (ili njemu ekvivalentni limes $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$).

Primjer 2.8. Odredimo sljedeće limese:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.
Kada $x \to \infty$, nije teško vidjeti da izraz $\frac{2x+3}{2x+1}$ teži u 1, a eksponent $x+1$ u beskonačno. Kod limesa oblika 1^∞, izraz treba transformirati kako bismo mogli iskoristiti

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Prvo se bavimo izrazom u zagradi, i taj izraz treba napisati u obliku $1 + \frac{1}{\text{"nešto"}}$, gdje "nešto" teži u beskonačnost. Imamo

$$\frac{2x+3}{2x+1} = \frac{2x+1+2}{2x+1} = 1 + \frac{2}{2x+1} = 1 + \frac{1}{\frac{2x+1}{2}} = 1 + \frac{1}{x+\frac{1}{2}}.$$

Dakle, to "nešto" je $t := x + \frac{1}{2}$. To zaista teži u $+\infty$ kada i x tamo teži. Iduće što radimo je da taj isti broj napišemo u eksponent, i vidimo što nam je preostalo. Kako je

$$x + 1 = t + \frac{1}{2} = \frac{t + \frac{1}{2}}{t} \cdot t,$$

imamo

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{t+\frac{1}{2}}{t}\cdot t} = \lim_{t\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{t+\frac{1}{2}}{t}}.$$

Uspjeli smo izraz s početka zapisati kao tablični izraz koji teži u e potenciran s nekim izrazom koji još trebamo odrediti kamo teži, a to je lagan zadatak. Znamo da racionalna funkcija iz eksponenta teži k 1. Zato je

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim_{t\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{\frac{t+\frac{1}{2}}{t}} = e^1 = e.$$

Ovaj algoritam možemo i inače izvoditi kod limesa oblika $1^{\pm\infty}$: prvo bazu zapišemo kao $1 + \frac{1}{\text{"nešto"}}$, zatim izmislimo "nešto" u eksponentu, i onda vidimo kamo ostatak eksponenta teži.
Slično smo mogli iskoristiti i tablični limes $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, da smo uveli supstituciju $t = \frac{2}{2x+1}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.
Iako ovaj limes možda izgleda kao ćemo ga namještati kao prošli, to je samo optička varka. Limes uopće nije nedefiniran, uvjerite se da baza teži u $\frac{1}{2}$, a eksponent očito u ∞. Zato cijeli izraz evidentno teži u 0.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.
Limes je oblika $\infty \cdot 0$. Ako izraz transformiramo na način da sve ubacimo pod funkciju ln, slijedi

$$\frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{x} \ln \left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \ln \left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}}\right] =$$

$$= \ln \left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}}\right].$$

Dovoljno je izračunati limes

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}},$$

jer vrijedi da $\ln\left(\lim_{x\to c} f(x)\right) = \lim_{x\to c} \ln(f(x))$ (ovo vrijedi i za ostale "lijepe" elementarne funkcije iz prošle lekcije, što je posljedica neprekidnosti - spomenut ćemo to u nastavku lekcije). Primijetite da je ovo limes oblika 1^∞. Sada ga treba riješiti kao primjeru a). Kako je

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1-x+2x}{1-x} = 1 + \frac{2x}{1-x},$$

i kako $\frac{2x}{1-x}$ teži k nuli, znamo kako treba srediti eksponent. Imamo

$$\frac{1}{2x} = \frac{1-x}{2x} \cdot \frac{1}{1-x},$$

pa imamo

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}}\right]^{\frac{1}{1-x}}.$$

Izraz u uglatim zagradama teži ka e (zbog $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$), a eksponent teži k 1, pa cijeli izraz teži ka $e^1 = e$. Konačno, primjer s početka teži ka $\ln(e) = 1$.

Postoji još jedan način kako riješiti zadatak: zapišite izraz s početka na drugačiji način:

$$\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{2x}$$

i iskoristite tablični limes koji uključuje funkciju ln.

d) $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$.
Zadatak podsjeća na poznati limes

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Treba se samo sjetiti da je općenito $a^b = e^{b\ln a}$. Za nas konkretno, $2^x = e^{x\ln 2}$. Zato imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{\frac{x\ln 2}{\ln 2}} \\ &= \lim_{x\to 0}\ln 2\cdot\frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2} = \ln 2\cdot\frac{e^{x\ln 2}-1}{x\ln 2} = \ln 2.\end{aligned}$$

Pokušajte na isti način odrediti

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$$

za neki realan broj $a > 0$.

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8^x - 7^x}{6^x - 5^x}$.
Kad rješavamo limese u nuli, a javlja se eksponencijalna funkcija, često je trik u tome da pokušamo, kao u prethodnom primjeru, "navući" limes na poznati

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

To se nerijetko radi tako da se dodaje i oduzima 1 na mjestima gdje je to potrebno. Konkretno,

$$\lim_{x\to 0} \frac{8^x - 7^x}{6^x - 5^x} = \lim_{x\to 0} \frac{8^x - 1 + 1 - (7^x - 1 + 1)}{6^x - 1 + 1 - (5^x - 1 + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{(8^x - 1) - (7^x - 1)}{(6^x - 1) - (5^x - 1)} = (*).$$

Preostaje samo, da bismo iskoristili limes spomenut na početku, podijeliti brojnik i nazivnik sa x,

$$(*) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{8^x-1}{x}\right) - \left(\frac{7^x-1}{x}\right)}{\left(\frac{6^x-1}{x}\right) - \left(\frac{5^x-1}{x}\right)} = (**).$$

Ako ste riješili prethodni primjer, znat ćete da je konačno

$$(**) = \frac{\ln 8 - \ln 7}{\ln 6 - \ln 5} = \frac{\ln \frac{8}{7}}{\ln \frac{6}{5}}.$$

Zadaci za samostalno rješavanje:

Zadatak 2.9. Odredite limese:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{1 - x^3}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cos x - \cos 2}{x - 2}$,

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\ln(1+x) - \ln x)$,

(e) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\ln x - \ln 5}{x - 5}$,

(f) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$,

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$,

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1 + \sin x}$,

(i) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x\sin x}}$,

(j) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

U posljednjem primjeru x teži u 0^+ samo da bi funkcija $\ln(\cos x)$ bila definirana. Što se praktičnih potreba tiče, račun je isti kao da piše $\lim\limits_{x\to 0}$.

Postoji još jedna metoda rješavanja limesa:

Metoda 5) L'Hospitalovo pravilo.

Nju ćemo naučiti za dva tjedna.

Definicija 2.10. Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki $c \in \mathcal{I}$ ako

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c).$$

Kažemo da je neprekidna ako je neprekidna u svakoj točki domene.

Sada je jasno smo pod pojmom "lijepe" funkcije skrivali da se zapravo to radi o neprekidnim funkcijama. Elementarne funkcije su neprekidne na domenama na kojim su definirane. Iz svojstva limesa, znamo i da su njihovi zbrojevi, razlike, umnošci, kvocijenti i kompozicije takvi.

U zadatcima koji slijede trebat ćemo odrediti za koji realni parametar je funkcija neprekidna. Kao u definiciji, trebat će provjeriti kada je limes u nekoj točki c jednak vrijednosti funkcije f u toj točki. Uzimajući u obzir da će nam lakše odvojeno gledati ponašanje funkcije slijeva i zdesna, zapravo ćemo trebati provjeriti postoje li tri broja

$$\lim_{x\to c^+} f(x), \quad \lim_{x\to c^+} f(x) \quad \text{i} \quad f(c),$$

i poklapaju li se. Nije dovoljno samo da se prva dva broja poklapaju, pogledajte funkciju koja je svugdje jednaka nuli osim za $x = 0$ gdje je jednaka 1. Ona nije neprekidna.

Primjer 2.11. Odredimo parametar $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da je funkcija f neprekidna.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ \lambda + x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Pokušajte nacrtati graf ove funkcije za razne odabire parametra λ. Vidjet ćete da je funkcija neprekidna samo za $\lambda = 0$. Pokažimo to.
Prvi korak u ovim zadatcima je da opravdamo da je funkcija neprekidna osim u točki gdje imamo neki problem, a to radimo uvijek skoro na isti način. Evidentno je funkcija neprekidna u svakoj točki intervala $\langle -\infty, 0\rangle$ (jer je tu zadana sa $f(x) = -x$), te analogno u svakoj točki intervala $\langle 0, +\infty\rangle$ (jer je tu zadana sa $f(x) = \lambda + x$).

Dakle preostaje provjeriti neprekidnost u nuli. Za to treba provjeriti tri vrijednosti: limese slijeva i zdesna u nuli, te samu vrijednost u nuli. Redom imamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \lambda + x = \lambda + \lim_{x\to 0^+} x = \lambda, \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -x = 0. \end{aligned}$$

Primijetite da smo koristili činjenicu da ovi limesi ovise samo o vrijednostima funkcije f različitima od nule, dakle iksevi koji su strogo veći ili strogo manji od nule. Konačno, treba nam i broj $f(0) = \lambda$.
Dakle, limesi slijeva i zdesna postoje. Tri broja koja se trebaju poklapati su λ, 0 i λ. Oni se poklapaju kada je $\lambda = 0$. Funkcija je neprekidna samo u tom slučaju.

Zadatak 2.12. Odredite parametar $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da funkcija bude neprekidna.

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2, \\ \lambda, & x = 2. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0, \\ 5x^2 - 2x + \lambda, & x \geq 0. \end{cases}$

Nakon što riješite sve zadatke iz ovog materijala, savjetujemo da riješite i sve materijale s weba.

Upute za neke zadatke za samostalno rješavanje

Zadatak 2.6.d) Trebali bismo znati kako se brojnik racionalizira. Nazivnik racionalizirajte koristeći $x - 1 = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$.

Zadatak 2.9.a) Sjetite se i kamo teži $\frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Zadatak 2.9.c) Iskoristite trigonometrijsku formulu za pretvorbu zbroja u umnožak.

Zadatak 2.9.d) Ubacite sve pod jedan ln.

Zadatak 2.9.e) Napišite brojnik kao $\ln(1 + \text{"nešto"})$, gdje "nešto" teži k nuli.

Zadatak 2.9.f) Ovo je jedan tablični limes zapisan na kompliciran način.

Zadatak 2.9.h) Uzeti x-ti korijen nekom broju je isto kao dići taj broj na potenciju $1/x$. Sada imate limes oblika $f(x)^{g(x)}$, neodređenog oblika $1^{\pm\infty}$. Znamo samo jednu stvar raditi s takvim limesima.

Zadatak 2.9.i) Opet imate limes oblika $f(x)^{g(x)}$, neodređenog oblika $1^{\pm\infty}$ i opet znamo samo jednu stvar raditi s takvim limesima.

Zadatak 2.9.j) Hint za prvi korak sličan je kao hint za e) zadatak.

Rješenja zadataka za samostalno rješavanje

Rješenje zadatka 2.6:

a) Ovaj zadatak je vježba za limese racionalnih funkcija. Na isti način se rješava za $+\infty$ i $-\infty$, pa prikazujemo samo jedan limes (uvjerite se sami da je drugi jednak). Dijelimo s najvećom potencijom brojnik i nazivnik, a to je x^{10}.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-3)^5(3x+1)^3(2x^2-5x+3)\;/:x^{10}}{(1-x)^7(6x^3+2x+3x+1)\quad /:x^{10}} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)^5\left(3+\frac{1}{x}\right)^3\left(2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\left(\frac{1}{x}-1\right)^7\left(6+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1\cdot 3^3\cdot 2}{1\cdot 6} = 9.$$

b) Najveća potencija u brojniku i nazivniku je $x^{1/2}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\quad /:x^{\frac12}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}\,/:x^{\frac12}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

c) Najveća potencija koja se pojavljuje je $x^{1/2}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\,/:x^{\frac12}}{\sqrt{2x+1}\quad /:x^{\frac12}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-1/6}+1+x^{-1/2}}{\sqrt{2+x^{-1}}} = \frac{1}{2}.$$

d) Jedan način za riješiti ovaj zadatak je da uvedemo supstituciju $t=(1+x)^6$. Drugi je da racionaliziramo brojnik i nazivnik.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{1+x-1}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = 1\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

e) U slučaju kada $x\to-\infty$, imamo zbroj dva izraza koja oba teže u $-\infty$, pa i cijeli izraz teži ka $-\infty$. Kada pak gledamo $x\to+\infty$, treba racionalizirati:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+1}) &= \lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+1})\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = 0,\end{aligned}$$

jer nazivnik teži ka $+\infty$.

f) Racionaliziramo brojnik i nazivnik:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x-x^2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-x}{1}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = 1\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

g) Racionaliziramo brojnik:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-x-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-x-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1-2x-x^2}+x+1}{\sqrt{1-2x-x^2}+x+1}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-2x-x^2-(x+1)^2}{x(\sqrt{1-2x-x^2}+x+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-4}{\sqrt{1-2x-x^2}+x+1}=-2.\end{aligned}$$

h) Ako $x\to-\infty$, tada i brojnik i nazivnik teže ka $+\infty$. Nakon supstitucije $t=-x$ dijelimo brojnik i nazivnik s najvećom potencijom (t^1):

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t^2+3t}+t+1\,/:t^1}{-t\qquad /:t^1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{t}}+t+\frac{1}{t}}{-1}=-1.$$

Ako $x\to+\infty$, u brojniku imamo $\infty-\infty$. Svejedno, iako možemo racionalizirati, ne moramo – možemo ponovno podijeliti najvećom potencijom brojnik i nazivnik:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x}-x+1\,/:x^1}{x\qquad /:x^1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}-1+\frac{1}{x}}{1}=0.$$

Razlog zašto je ovakva metoda uspjela je jer su u brojniku i nazivniku najveća potencija jednake. Da je nazivniku umjesto x bio recimo $\sqrt{x}$, dijeljenjem s najvećim izrazom x^1 dobili bismo neodređen izraz $0/0$. Dakle, tada bi racionalizacija bila nužna.

Rješenje zadatka 2.9:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=1\cdot\frac{1}{2\cdot 1}=\frac{1}{2},$$

gdje smo na kraju iskoristili da $\dfrac{1-\cos x}{x^2}\to\dfrac{1}{2}$ kada $x\to 0$.

b)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\frac{-1}{x^2+x+1}=1\cdot\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}.$$

c) Koristeći formulu $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, dobivamo

$$\lim_{x\to 2}\frac{\cos x-\cos 2}{x-2}=\lim_{x\to 2}-2\frac{\sin\left(\frac{x-2}{2}\right)}{\frac{x-2}{2}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x+2}{2}\right)}{2}.$$

Prvi razlomak teži ka 1, a drugi možemo evaluirati. Rezultat je $-\sin 2$.

d) Ako ubacimo sve pod jedan ln, uočavamo da se radi o izrazu $\ln\left[(1+\frac{1}{x})^x\right]$. Kada $x\to+\infty$, izraz u uglatim zagradama teži ka e, pa cijeli izraz teži ka $\ln e=1$.

e) Kao u uputi, želimo zapisati brojnik kao ln(1 + "nešto"):

$$\ln x-\ln 5=\ln(x/5)=\ln\left(\frac{x-5}{5}+1\right).$$

Kako $\frac{x-5}{5}\to 0$, imamo

$$\lim_{x\to 5}\frac{\ln x-\ln 5}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\ln\left(\frac{x-5}{5}+1\right)}{\frac{x-5}{5}}\cdot\frac{1}{5}.$$

Prvi razlomak teži k jedan, pa je rezultat $\frac{1}{5}$.

f) Uvodeći susptituciju $t=1/x$ $(t\to 0^+)$, izraz se zapisuje kao $\frac{e^t-1}{t}$, a to teži k 1.

g) Prvi korak je racionalizacija. Također, očekujemo da nazivnik želi faktor oblika x^2, pa mu ga pripremimo.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}\\&=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}\end{aligned}$$

h)

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1+\sin x}=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}}.$$

Kako $\sin x\to 0$, uglata zagrada teži ka e. Kako zadnji eksponent teži ka 1, rezultat je $e^1=e$.

i) Ponovno bazu eksponencijalne funkcije pišemo kao 1 + "nešto", makar to "nešto" bilo ružno.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x\sin x}} &= \lim_{x\to 0}(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{x\sin x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\left[(1+(\cos x-1))^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{x\sin x}}.\end{aligned}$$

Kada $x\to 0$, onda $\cos x-1\to 0$ također, pa uglata zagrada teži ka e. Eksponent raspišemo sa strane (množeći brojnik i nazivnik s x), i vidimo da teži ka $\frac{1}{2}$. Zato je konačan rezultat $e^{1/2}=\sqrt{e}$.

j) Ponovno argument logaritma pišemo kao 1 + "nešto", gdje je "nešto" maleno. To će biti cos −1, pa slično kao što je to u prošlom zadatku, koliko god možda na prvu ružno, ispast će dovoljno dobro. Iskoristit ćemo i tablični limes $\frac{\ln(1+x)}{x}\to 1$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}.$$

Prvi izraz teži ka 1, drugi ka $-1/2$, pa je rješenje $-\frac{1}{2}$.

Rješenje zadatka 2.12:

a) Evidentno je funkcija neprekidna u svakoj točki intervala $\langle -\infty, 2\rangle$ i u svakoj točki intervala $\langle 2,+\infty\rangle$, pa preostaje provjeriti neprekidnost u $x=2$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+}f(x) &= \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}x+2=4;\\ \lim_{x\to 2^-}f(x) &= \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}x+2=4;\\ f(2) &= \lambda.\end{aligned}$$

Kako bi f bila neprekidna u $x=2$, vrijednosti 4, 4 i λ moraju se poklapati. Dakle, funkcija je neprekidna za $\lambda=4$.

b) Evidentno je funkcija neprekidna u svakoj točki intervala $\langle -\infty, 0\rangle$ i u svakoj točki intervala $\langle 0,+\infty\rangle$, pa preostaje provjeriti neprekidnost u $x=0$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}f(x) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1;\\ \lim_{x\to 0^+}f(x) &= \lim_{x\to 0^+}(5x^2-2x+\lambda)=\lambda;\\ f(0) &= 5\cdot 0^2-2\cdot 0+\lambda=\lambda.\end{aligned}$$

Kako bi f bila neprekidna u $x=2$, vrijednosti 1, λ i λ moraju se poklapati. Dakle, funkcija je neprekidna za $\lambda=1$.

3

Derivacija

Definicija 3.1. Neka je I otvoreni interval. Za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ i točku $c \in \mathbb{R}$ definiramo *derivaciju funkcije u točki* c (oznaka: $f'(c)$) kao

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

(ako taj limes postoji). U tom slučaju kažemo da je f derivabilna/diferencijalbilna u točki c.
Za funkciju kažemo da je derivabilna na domeni I ako je derivabilna u svakoj točki domene.

Napomena 3.2.

- Nužan uvjet da funkcija ima derivaciju u c je da je neprekidna u c, no nije i dovoljan uvjet. Primjerice funkcija $f(x) = |x|$ nije derivabilna u 0, jer joj se jednostrani limesi iz defincije derivacije razlikuju (provjerite).
- Postoje dvije motivacije za uvođenje pojma derivacije funkcije. Prvi je sljedeći: za krivulju $(x, f(x)), x \in I$ (dakle za graf funkcije f), kvocijent iz definicije derivacije je zapravo koeficijent smjera pravca koji prolazi kroz točke $(x, f(x))$ i $(c, f(c))$. Kada $x \to c$, dobivamo koeficijent smjera tangente u točki c.
- Druga motivacija dolazi iz fizike: ako neko tijelo u vremenu x prijeđe udaljenost $f(x)$, njegova prosječna brzina u vremenskom intervalu $[c, x]$ (ili $[x, c]$) je kvocijent $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$. Kada $x \to c$, dobijemo njegovu trenutnu brzinu u vremenu c.
- U praksi i ono što se očekuje od vas na kolokvijima, deriviranje je *straightforward*, u smislu da postoje pravila koja, kada ih se nauči, možemo bez problema derivirati svaku funkciju. Ta pravila uključuju tablicu derivacija elementarnih funkcija i pravila za zbroj, umnožak, (...) dviju funkcija.

Pravila deriviranja:

$$
\begin{aligned}
(c)' &= 0 \\
(c \cdot f(x))' &= c \cdot f'(x) \\
(f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x) \\
(f(x) \cdot g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \\
((f \circ g)(x))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}
$$

Tablica derivacija:

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos x^2}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{-1}{\sin x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$

Napomena 3.3. Iz svih navedenih pravila vidimo sljedeće:

- Konstanta derivirana daje 0. Nije bitno je li ta konstanta $0, 1, 3, \pi$ ili $\sin 1$, bitno je da je konstanta, tj. da ne ovisi o vrijednosti varijable x.
- Derivacija se lijepo ponaša u odnosu na množenje skalarom i zbroj. Također, ne vrijedi (!) da je derivacija umnoška umnožak derivacija. Postoji određeno pravilo za umnožak derivacija.
- Dva "najružnija" pravila su zadnja dva. Pravilo za derivaciju kvocijenta ima u brojniku desne strane sličan izraz kao pravilo za derivaciju umnoška, te kvadriran nazivnik (bez derivacije). Iako uvijek možemo koristiti tu formulu, upravo zbog toga što je dugačka, savjet je da prilikom deriviranja razmislite možete li izbjeći to pravilo koristeći neko drugo.
- Derivaciju kvocijenta obradit ćemo više kasnije.
- Pogledajmo i tablicu derivacija. Prvo pravilo odnosi se na polinome, ali pravilo vrijedi i za svaki $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (dakle, primjerice i za korijene). Pravilo kaže da kako bismo našli derivaciju polinoma (i sličnih funkcija), trebamo "skinuti" jedan

stupanj u eksponentu i sve pomnožiti (starim) eksponentom. Izračunajte kolika je derivacija funkcije $\sqrt{x}$.

- Već smo u prošloj lekciji vidjeli da broj e ima posebno ponašanje u odnosu na ostale konstante kod eksponenciranja. To vidimo još jednom - samo kada je baza eskponenciranja jednaka e, funkcija i njena derivacija se poklapaju. Zato i logaritmi po bazi e i po ostalim bazama također imaju drugačije ponašanje.
- Derivacije trigonometrijskih funkcija $\sin, \cos$ lako se pamte, do na minus. Također, derivaciju funkcije $\operatorname{tg} x$, ako ne možemo zapamtiti, možemo jednostavno izvesti (vidjeti primjer u nastavku).
- Memoriranje tablica derivacija najlakše je kada izvježbate što je moguće više zadataka sami. Usporedite tablicu sa službenim formulama koje smijete koristiti na kolokviju.

Primjer 3.4. Nađimo derivaciju funkcije $F(x) = \operatorname{tg} x$.
Znamo da vrijedi $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Koristit ćemo tu formulu i derivaciju funkcija $\sin x$ i $\cos x$:

$$F(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{(\cos x)\cdot(\cos x) - (\sin x)\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

gdje smo na kraju iskoristili posljedicu Pitagorinog poučka.

Slijede (neki) zadatci za samostalni rad. Na kraju lekcije naći ćete i upute za rješenja zadataka. Ako se zadatak nalazi u službenim materijalima na webu kolegija, bit će naznačeno koji je to zadatak. Pokušajte prvo sami riješiti zadatke, pa tek onda pročitati upute. Kada riješite, nastavite s lekcijom dalje.

Zadatak 3.5. Nađite derivacije sljedećih funkcija

a) $f(x) = 7 \cdot 2^x - 3 \cdot x^2 + 0 \cdot \sin x$,

b) (2.1.a)) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x\sqrt{x}} + \sqrt[7]{e}$,

c) (2.1.d)) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^3} + e^x \cos x - (x^3 + 2)\log x$,

d) (2.1.c)) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg} x}{x \ln x} + 3xe^x$,

e) (2.2.a), izmijenjen) $f(x) = (x^3 + 3)^2$.

Često pitanje koje se postavlja kod ovakvih zadataka je koliko treba pojednostaviti dobiveni izraz. To ovisi o problemu u kojem se nalazimo. Na kolokvijima ćete rijetko vidjeti zadatak oblika "Nađite derivaciju funkcije $f(x) = \cdots$". Češće ćete imati zadatke koji se temelje na deriviranju funkcije i istraživanju svojstava te derivacije. Zato ćete u svakom zadatku morati pojednostaviti derivaciju na drugačiji način.

Primjer 3.6. Vratimo se na derivaciju funkcije $f(x) = (x^3 + 3)^2$. Jedan način je da to promotrimo kao polinom - raspišemo kvadrat binoma i zatim izderiviramo svaki monom. Drugi način je ovo promotriti kao kompoziciju funkcija. Definirajmo funkcije $F(x) = x^2$, $G(x) = x^3 + 3$. Primijetimo da je $f(x) = (F \circ G)(x)$, pa možemo primijeniti pravilo za derivaciju kompozicije

$$((F \circ G)(x))' = F'(G(x)) \cdot G'(x)$$

(zadnje u pravilima deriviranja). Prije toga, protumačimo još malo kako čitamo to pravilo:

- Izraz $G'(x)$ (drugi faktor na desnoj strani) čitamo kao i inače – deriviramo funkciju G, i tamo napišemo rezultat.
- Izraz $F'(G(x))$ čitamo drugačije. Prvo deriviramo funkciju F, a zatim umjesto x, rezultat evaluiramo u $G(x)$ (odnosno, komponiramo funkcije $F'(x)$ i $G(x)$).

Pogledajmo na konkretnom primjeru:
$G(x) = x^3 + 3$, $G'(x) = 3x^2$.
$F(x) = x^2$, $F'(x) = 2x$, $F'(G(x)) = 2G(x) = 2x^3 + 6$.
Zato je $f'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x) = 6x^5 + 18x^2$
Usporedite rješenje s rješenjem dobivenim na drugi način.

Primjer 3.7. Riješimo još jedan primjer s derivacijom kompozicije: (2.2.f)) $f(x) = \log_3(x^2 + 5)$. Ova funkcija kompozicija je funkcija $F(x) = \log_3 x$ i $G(x) = x^2 + 5$. "Vanjska" funkcija $F(x)$ je logaritam, i njena je derivacija $F'(x) = \frac{1}{x \ln 3}$. Umjesto x koji se pojavljuje u zadnjoj jednakosti uvrstit ćemo funkciju $G(x)$. Zato pišemo

$$f'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x) = \frac{1}{G(x) \ln 3} G'(x) = \frac{2x}{\ln 3(x^2 + 5)}.$$

Primjer 3.8. Na isti način možemo rješavati i kompozicije više od dviju funkcija. Pogledajmo na primjeru derivacije $f(x) = \ln \ln(x^4 + x)$ (2.3.j)). Neka je prvo "vanjska" funkcija $\ln x$, a "unutarnja" $\ln(x^4 + x)$. Kada napravimo prvi korak, ostat će nam za derivirati komplicirana unutarnja funkcija koju ćemo ponovno promotriti kao kompoziciju dviju funkcija. Dakle, imat ćemo

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(x^4 + x)} (\ln(x^4 + 4))' = \frac{1}{\ln(x^4 + x)} \frac{1}{x^4 + 4} (4x^3) = \frac{4x^3}{\ln(x^4 + x)(x^4 + 4)}$$

Ponovno slijede zadatci za samostalan rad:

Zadatak 3.9. Derivirajte sljedeće funkcije:

a) (2.2.c)) $f(x) = \sqrt[4]{(x + 3)^3}$,

b) (2.2.d)) $f(x) = \cos^6 x$,

c) (2.2.e)) $f(x) = \sin x^3$,

d) (2.2.i)) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\ln \dfrac{1-x}{1+x}\right)$,

e) (2.3.b)) $f(x) = \dfrac{x^2 + \sin(2x)}{\ln x + \cos(2x+3)}$,

f) (2.3.d)) $f(x) = \sqrt{4x-1} + \operatorname{arcctg} \sqrt{4x-1}$,

g) (2.3.h)) $f(x) = \ln^2(2x+1)$.

Primjer 3.10. (2.5.a)) Izračunajte derivaciju funkcije $f(x) = x^{\sin x}$.
Ovu funkciju ne možemo derivirati niti pravilom za derivaciju polinoma niti pravilom za derivaciju eksponencijalne funkcije, budući da nam oba parametra (i baza i eksponent) ovise o x. Zato koristimo trik:

$$a^b = \left(e^{\ln a}\right)^b = e^{b \ln a}.$$

Zato imamo

$$x^{\sin x} = e^{\sin x \ln x}$$

$$\implies \left(x^{\sin x}\right)' = \left(e^{\sin x \ln x}\right)' = e^{\sin x \ln x}\left(\cos x \ln x + \sin x \frac{1}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

Zadatak 3.11. Generalizirajte pravilo iz prošlog primjera za funkciju oblika $f(x)^{g(x)}$ (nađite odgovarajuću formulu za derivaciju takve funkcije), pa derivirajte i sljedeće funkcije:

a) (2.5.c)) $f(x) = (\ln x)^x$,

b) (2.5.d)) $f(x) = \frac{(\cos x)^{\sin x}}{x^2+3}$,

c) (2.5.e)) $f(x) = \ln \sqrt[x]{\sin x}$.

Napomena 3.12. Kao što vidimo, derivacija funkcije (ako postoji) nova je funkcija. Ukoliko je i ona derivabilna, možemo i nju ponovno derivirati. Time dobivamo derivacije višeg reda: derivacija derivacije funkcije $f(x)$ je druga derivacija (oznaka: $f''(x)$). Nakon toga imamo i treću, četvrtu te općenito n-tu derivaciju funkcije $f(x)$. Oznake: $f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$ U pravilu počevši s četvrtom derivacijom više ne pišemo crtice nego pišemo broj. Također, možemo pisati i $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$, no to se ne viđa često. Vidjet ćete i oznaku $f^{(0)}(x)$ – ona označava originalnu funkciju f.

Primjer 3.13. Pogledajmo sljedeći tip zadatka. (2.6.d)) Odredite n-tu derivaciju funkcije $f(x) = \sin x$ i njenu vrijednost u $x_0 = \pi/2$.
Kod zadataka ovakvog tipa, prvo ćemo danu funkciju derivirati nekoliko puta, pa uočiti uzorak.
$f(x) = \sin x$
$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$
$f'''(x) = -\cos x$
$f^{(4)}(x) = \sin x$
$f^{(5)}(x) = \cos x$
Došli smo ponovno do funkcije $\sin x$, i ponovno se ponavlja isti uzorak. Drugim riječima, derivacije se ponavljaju s ciklusom duljine 4. Sada možemo pisati da za sve prirodne n vrijedi

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & n = 4k+1, k \in \mathbb{N} \\ -\sin x & n = 4k+2, k \in \mathbb{N} \\ -\cos x & n = 4k+3, k \in \mathbb{N} \\ \sin x & n = 4k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ova se tvrdnja može pokazati i matematičkom indukcije, pokušajte za vježbu.
Primjerice, za $n = 2020$, kako je on djeljiv s 4, imamo da je $f^{(2020)}(x) = \sin x$. Da bismo izračunali vrijednost derivacije u točki $\pi/2$, samo treba evaluirati u gornjoj fomuli vrijednosti funkcija. Kako je $\cos(\pi/2) = -\cos(\pi/2) = 0$, možemo malo skratiti zapis:

$$f^{(n)}(\pi/2) = \begin{cases} 0 & n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} & n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Bitna napomena: u ovakvim zadatcima nije dozvoljeno prvo uvrstiti vrijednost x_0 u funkciju f, a zatim derivirati, što je česta greška. Jasan odgovor zašto to nije dozovljeno, tj. zašto se time ne dobije točan rezultat, je zato što je $f(x_0)$ konstanta, neovisna o x, pa je svaka njena derivacija jednaka nul-funkciji.

Pogledajmo još jedan malo kompleksniji primjer.

Primjer 3.14. (2.6.e)) Odredite n-tu derivaciju funkcije $f(x) = \sqrt{1-4x}$ i njenu vrijednost u $x_0 = 0$.
Kao i prošli put, derivirat ćemo prvo nekoliko puta. Za to ćemo funkciju napisati u pogodnijem formatu: $\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}}$. Također, savjet je da kad računamo derivacije višeg reda, da ne pojednostavljujemo izraz kako bismo uočili neki uzorak u slučaju n-te derivacije.
$f'(x) = \frac{1}{2}(-4)(1-4x)^{\frac{-1}{2}}$
$f''(x) = \frac{1}{2}\frac{-1}{2}(-4)^2(1-4x)^{\frac{-3}{2}}$
$f'''(x) = \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}(-4)^3(1-4x)^{\frac{-5}{2}}$
$f^{(4)}(x) = \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{-5}{2}(-4)^4(1-4x)^{\frac{-7}{2}}$
$\dots$
Počinjemo uočavati uzorak: nakon prve derivacije, uvijek dobijemo novi faktor oblika negativan neparan broj podijeljen s dva. Eksponent uz (-4) se uvijek poveća za jedan, kao što se eksponent uz $(1-4x)$ uvijek smanji za jedan. Zato možemo pogoditi (te dokazati indukcijom) da općenito imamo

$$f^n(x) = \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{-5}{2} \cdot \frac{-(2 \cdot n - 3)}{2}(-4)^n(1-4x)^{\frac{-(2 \cdot n - 1)}{2}}$$

Ovo možemo zapisati i kraće. Iskoristimo oznaku $n!!$ koja označava umnožak svih parnih/neparnih brojeva manjih ili jednakih n, ako je n paran/neparan.

$$\begin{aligned} f^n(x) &= \frac{1}{2^n}(-1)^{n-1}(2\cdot n-3)!!(-1)^n 4^n (1-4x)^{\frac{-(2\cdot n-1)}{2}} \\ &= -(2\cdot n-3)!!2^n(1-4x)^{\frac{-(2\cdot n-1)}{2}} \end{aligned}$$

Odavde lako izračunamo i vrijednost $f^{(n)}(x_0)$.

Zadatak 3.15. Odredite n-tu derivaciju funkcije $f(x)$ i njenu vrijednost u x_0:

a) (2.6.a)) $f(x) = x^5$, $x_0 = 0$,

b) (2.6.b)) $f(x) = 1/x$, $x_0 = -1$,

c) (2.6.c)) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$,

d) (2.6.f)) $f(x) = \ln\dfrac{1-4x}{1+4x}$, $x_0 = 0$.

Primjer 3.16. Primijetimo da pravilom derivacijom kompozicije funkcije lako možemo odrediti derivaciju inverznih funkcija. Sjetimo se: ako je $f(x)$ bijekcija, postoji $f^{-1}(x)$. Vrijedi $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$. Zato možemo napraviti sljedeće:

$$\begin{aligned} (f^{-1}\circ f)(x) &= x \ /' \\ f^{-1'}(f(x))f'(x) &= 1 \\ f^{-1'}(f(x)) &= \frac{1}{f'(x)} \\ f^{-1'}(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \end{aligned}$$

Iskoristimo tu formulu na jednoj konkretnoj funkciji:

Primjer 3.17. Nađimo derivaciju inverzne funkcije $f(x) = \sin x$.
Znamo da je $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$. Dalje imamo

$$\begin{aligned} (\arcsin y)' &= \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \end{aligned}$$

Zadatak 3.18. Izvedite formule za derivacije funkcija $\ln x, \log_a x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$.

Napomena 3.19. Uočimo malo bolje što smo napravili u Primjeru 3.16. Uzeli smo neku jednakost, i sa svake strane derivirali. To možemo raditi i općenito, što je korisno kod derivacija implicitno zadane funkcije.

Primjer 3.20. (2.7.a), izmijenjen) Derivirajte implicitno zadanu funkciju $y = f(x)$ danu s $x^3y + xy^3 + y = e^x$.
Zadatak želi reći sljedeće: za funkciju $y = f(x)$ vrijedi identitet $x^3f(x)+xf(x)^3+f(x) = e^x$. Nađimo derivaciju $f'(x)$ izraženu preko x i $f(x)$.
To radimo tako da deriviramo identitet kojim je funkcija implicitno zadana, a zatim uredimo dobiveni izraz.

$$\begin{aligned} x^3y + xy^3 + y &= e^x \\ x^3f(x) + x \cdot f(x)^3 + f(x) &= e^x \ /' \\ 3x^2f(x) + x^3f'(x) + f(x)^3 + xf'(x)f(x)^2 + f'(x) &= e^x \\ f'(x) &= \frac{e^x - 3x^2f(x) - f(x)^3}{x^3 + 3xf(x) + 1} \\ f'(x) &= \frac{e^x - 3x^2y - y^3}{x^3 + 3xy + 1} \end{aligned}$$

Napomena 3.21. Netko bi se mogao zapitati koja je korist ovakvih zadataka. Ako se nađemo u situaciji u kojoj imamo opisano neko ponašanje funkcije f na implicitan način i ne možemo ju izraziti eksplicitno, i dalje možemo saznati nešto o njenoj derivaciji. Primjerice, za gornju funkciju $y = f(x)$, iako joj nemamo eksplicitno izraženo ponašanje, znamo da se točka $(0, 1)$ nalazi na grafu funkcije f (jer za $(x, y) = (0, 1)$ vrijedi jednakost kojom je f zadana), pa zato znamo da je koeficijent smjera tangente u toj točki jednak

$$f'(0) = \frac{e^0 - 3 \cdot 0 - 1}{0 + 1 + 3 \cdot 0} = 0.$$

Nadalje, primijetimo da smo gornji zadatak mogli skratiti ne uvodeći oznaku f za funkciju ovisnu o x. Pogledajmo to na drugom primjeru.

Primjer 3.22. (2.7.b)) Derivirajte implicitno zadanu funkciju $y = f(x)$ danu s $xy+\sin y = e^{x+y}$.
Jedino trebamo paziti na to da je u oznaci y skrivena ovisnost o x. Iako to nije napisano eksplicitno, y je funkcija, pa se i ona mora derivirati. Npr. $(y^2)' = 2yy'$, gdje smo iskoristili pravilo za derivaciju kompozicije.

$$\begin{aligned} xy + \sin y &= e^{x+y} \ /' \\ xy' + y + y' \cos y &= e^{x+y}(1 + y') \\ y' &= \frac{e^{x+y} - y}{x + \cos y - e^{x+y}} \end{aligned}$$

Ako vam ovakvo rješenje nije jasno, pokušajte još jednom riješiti primjer uvodeći funkciju $y = f(x)$.

Zadatak 3.23. Derivirajte implicitno zadanu funkciju $y = f(x)$:

a) (2.7.c)) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, za realnu konstantu a,

b) (2.7.e)) $(x^2 + y^2) \cdot y^2 = a \cdot x^2$, za realnu konstantu a.

Nakon što riješite sve zadatke iz ovog materijala, savjetujemo da riješite i sve materijale s weba, osim zadataka 2.8. i 2.9.

Upute za neke zadatke za samostalno rješavanje

Zadatak 3.5.a) Obratite pažnju na razliku između polinoma i eksponencijalne funkcije, te da je nula puta bilošto opet nula.

Zadatak 3.5.b) Zapišite funkciju kao zbroj monoma oblika x^a, za neki realan broj a. Ovisi li zadnji sumand u funkciji o x?

Zadatak 3.5.d) Pazite, u nazivniku imate umnožak funkcija. Ako vam je nezgodno, prvo izračunajte derivaciju nazivnika sa strane.

Zadatak 3.5.e) Možemo riješiti na dva načina. Jedan je preko derivacije kompozicije, što će se pokazati u primjeru nakon. Drugi je tako da raspišemo kvadrat binoma.

Zadatak 3.9.b), c) Pazite na redoslijed komponiranja funkcija.

Zadatak 3.9.d) Jedna moguća pomoć u ovom zadatku i ostalim zadatcima koji u sebi imaju logaritam: možemo koristiti formulu $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$. Time ponekad možemo izbjeći derivaciju kvocijenta. Općenito nemojte zaboraviti i na ostala pravila logaritma na ovom kolegiju.

Zadatak 3.9.d) Zapišite kao kompoziciju funkcija $x \mapsto \sqrt{4x-1}$ i $x \mapsto x + \operatorname{arcctg} x$. Izračunajte derivaciju druge funkcije sa strane.

Zadatak 3.15.a) Nakon što derivirate 6 puta, nemate više ništa za derivirati.

Zadatak 3.15.b) Možda pomogne $f(x) = x^{-1}$.

Zadatak 3.15.d) Ima mnogo sličnosti s Primjerom 3.12. Iskoristite pravilo za logaritam kao u Zadatku 3.9.d), derivirajte jednom, pa zapišite kao zbroj dviju funkcija na minusprvu.

Zadatak 3.18. Kod računanja $(\operatorname{arctg} x)'$ iskoristite identitet $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2}$. On je posljedica jednakosti $\sin^2 + \cos^2 = 1$, kad je se podijeli s $\cos^2 x$.

Rješenja zadataka za samostalno rješavanje

Rješenje zadatka 3.5: Sva rješenja zadataka mogu se napisati na više ekvivalentnih načina. Dokle god se dobiva ista funkcija, rješenje je točno.

a) $f'(x) = (7 \cdot 2^x)' - (3 \cdot x^2)' + 0' = 7 \cdot (2^x)' - 3 \cdot (x^2)' = 7 \cdot 2^x \ln 2 - 6x$.

b) $f(x) = x^{2/3} - x^{3/4} + \sqrt[7]{e}$. Zadnji sumand je konstanta, pa je zato
$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} - \frac{3}{4}x^{-1/4}$.

c) Pokazujemo rješenje u kojemu izbjegavamo derivaciju kvocijenta (iako nije nužno):
$f(x) = \sin x \cdot x^{-3} + e^x \cos x - (x^3 + 2) \log x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \cdot x^{-3} + \sin x \cdot (-3x^{-4}) + e^x \cos x + e^x(-\sin x) \\ &- (2x^2) \log x - (x^3 + 2)\frac{1}{x \ln 10}, \end{aligned}$$

a nakon sređivanja dobijemo rješenje kao službeno.

d) Sa strane vidimo, ako treba, da je $(x \ln x)' = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x = \ln x + 1$. Zato je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{-1}{\sin^2 x}(x \ln x) - \operatorname{ctg} x \cdot (\ln x + 1)}{x^2 \ln^2 x} + 3e^x + 3xe^x \\ &= \frac{-(x \ln x) - \cos x \sin x(\ln x + 1)}{\sin^2 x \cdot x^2 \ln^2 x} + 3e^x + 3xe^x. \end{aligned}$$

e) Kvadrat binoma: $f(x) = (x^3 + 3)^2 = x^6 + 6x^3 + 9$.
$f'(x) = 6x^5 + 18x^2$.

Rješenje zadatka 3.9: Kada sami rješavate ili kada pišete rješenje na kolokvijima ne trebate pisati funkcije F i G. One ovdje služe da još bolje pojasnimo postupak.

a) $f(x) = \sqrt[4]{(x+3)^3} = (x+3)^{3/4}$. $F(x) = x^{3/4}$, $G(x) = x + 3$,
$f'(x) = \frac{3}{4}G(x)^{-1/4}G'(x) = \frac{3}{4\sqrt[4]{x+3}}$.

b) $F(x) = x^6$, $G(x) = \cos x$,
$f'(x) = 6G(x)^5G'(x) = -6\cos^5 x \sin x$.

c) $F(x) = \sin x$, $G(x) = x^3$,
$f'(x) = \cos(G(x))G'(x) = \cos x^3 \cdot 3x^2$.

d) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\ln \frac{1-x}{1+x}\right) = \operatorname{tg}\left(\ln(1-x) - \ln(1+x)\right)$. Kako je
$(\ln(1-x) - \ln(1+x))' = \frac{1}{1-x}(1-x)' - \frac{1}{1+x}(1+x)' = \frac{-1}{1-x} + \frac{-1}{1+x} = \frac{-2}{1-x^2}$,
imamo $f'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\ln \frac{1-x}{1+x}\right)} \frac{-2}{1-x^2}$

e) Spajamo sva pravila odjednom (kompozicije su jednostavne, kao derivacija unutarnjih funkcija kod trigonometrijskih funkcija ispadne samo faktor 2):
$$f'(x) = \frac{[2x + \cos(2x) \cdot 2] \cdot [\ln x + \cos(2x+3)] - [x^2 + \sin(2x)] \cdot [x^{-1} - \sin(2x+3) \cdot 2]}{(\ln x + \cos(2x+3))^2}$$

f) Kao u uputi: $F(x) = x + \operatorname{arcctg} x$, $G(x) = \sqrt{4x-1}$.
$F'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$, $G'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x-1}}4 = \frac{2}{\sqrt{4x-1}}$.
Kada sve uvrstimo i iskoristimo da se kvadrati i korijeni često krate, dobijemo
$f'(x) = \frac{4x-1}{1+(4x-1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{4x-1}} = \frac{\sqrt{4x-1}}{2x}$.

g) Ponovno ćemo pokušati riješiti zadatak odjednom:
$f'(x) = [2\ln(2x+1)] \cdot \left[\frac{1}{2x+1}\right] \cdot 2 = \frac{4\ln(2x+1)}{2x+1}$.

Rješenje zadatka 3.11: Generalna formula:

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(e^{g(x)\ln(f(x))}\right)' = e^{g(x)\ln(f(x))} \cdot \left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$
$$= f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

a) $f'(x) = (\ln x)^x \left(1 \cdot \ln(\ln x) + x\frac{1/x}{\ln x}\right) = (\ln x)^x \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right)$.

b) Sa strane deriviramo brojnik:
$\left((\cos x)^{\sin x}\right)' = (\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \ln(\cos x) + \sin x \frac{-\sin x}{\cos x}\right)$
Kad uvrstimo, dobijemo

$$f'(x) = \frac{\left[(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \ln(\cos x) + \sin x \frac{-\sin x}{\cos x}\right) \cdot (x^2+3)\right] - \left[(\cos x)^{\sin x} 2x\right]}{(x^2+3)^2}$$
$$= (\cos x)^{\sin x} \frac{(\cos^2 x \ln(\cos x) - \sin^2 x) \cdot (x^2+3) - 2x\cos x}{(x^2+3)^2 \cos x}.$$

c) Iako možemo, ne moramo koristiti istu formulu kao u cijelom zadatku. Umjesto toga koristimo svojstva logaritma:
$f(x) = \ln \sqrt[x]{\sin x} = \frac{1}{x}\ln(\sin x)$
$f'(x) = \frac{-1}{x^2}\ln(\sin x) + \frac{1}{x}\frac{\cos x}{\sin x}$.

Rješenje zadatka 3.15:

a) $f(x) = x^5$
$f'(x) = 5x^4$
$f''(x) = 20x^3$

$f'''(x) = 60x^2$
$f^{(4)}(x) = 120x$
$f^{(5)} = 120$
$f^{(n)}(x) = 0$, za sve $n \geq 6$. Dakle, $f^{(n)}(0) = 0$, za sve $n \neq 5$, te $f^{(5)}(0) = 0$.

b) $f(x) = x^{-1}$
Raspisujući prvih par derivacija, uočavamo pravilnost:
$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)\cdots(-n)x^{-(n+1)} = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$.
$f^{(n)}(-1) = (-1)^n n!(-1)^{-(n+1)} = (-1)^{n-(n+1)} n! = -n!$.

c) Slično kao u Primjeru 3.13., zatvara se ciklus duljine 4, pa zato imamo

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} -\sin x & n = 4k+1, k \in \mathbb{N} \\ -\cos x & n = 4k+2, k \in \mathbb{N} \\ \sin x & n = 4k+3, k \in \mathbb{N} \\ \cos x & n = 4k, k \in \mathbb{N}, \end{cases} \text{, te}$$

$$f^{(n)}(\pi) = \begin{cases} 0 & n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \\ (-1)^{\frac{n}{2}+1} & n = 2k, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

d) $f(x) = \ln(1-4x) - \ln(1+4x)$
$f'(x) = (1-4x)^{-1}(-4) - (1+4x)^{-1}4$
Ovo je format zadatka sličan onome koji je obrađen u glavnom dijelu. Sada računamo derivaciju po derivaciju i tražimo uzorak. Kada ga uočimo, dobivamo

$$\begin{aligned} f^n(x) &= (-1)(-2)\cdots(-(n-1))(1-4x)^{-n}(-4)^n - (-1)(-2)\cdots(-(n-1))(1+4x)^{-n}4^n \\ &= (-1)^{n-1}(n-1)!(1-4x)^{-n}(-1)^n 4^n - (-1)^{n-1}(n-1)!(1+4x)^{-n}4^n \\ &= -4^n(n-1)!\left[(1-4x)^{-n} + (-1)^{n-1}(1+4x)^{-n}\right] \end{aligned}$$

Konačno: $f^n(0) = 4^n(n-1)![-1-(-1)^{n-1}]$, što je jednako nuli kad je n paran, a inače $-2 \cdot 4^n(n-1)!$.

Rješenje zadatka 3.18:

- Za $\ln x$:
  $f(x) := e^x$, $f'(x) = e^x$, $f^{-1}(y) = \ln y$
  $f^{-1\prime}(y) = \dfrac{1}{e^{f^{-1\prime}(y)}} = \dfrac{1}{e^{\ln y}} = \dfrac{1}{y}$.
  Za $\log_a x$ analogno.

- Za $\arccos x$:
  $f(x) := \cos x$, $f'(x) = -\sin x$, $f^{-1}(y) = \arccos y$
  $f^{-1\prime}(y) = \dfrac{1}{-\sin(f^{-1\prime}(y))} = \dfrac{1}{-\sin(\arccos(y))} = \dfrac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\arccos(y))}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$.

- Za $\operatorname{arctg} x$:
  $f(x) := \operatorname{tg} x,\ f'(x) = \frac{1}{\cos^2},\ f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$
  ${f^{-1}}'(y) = \cos^2(f^{-1}(y)) = \cos^2(\operatorname{arctg} y)$. Koristeći tvrdnju iz upute $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2}$ možemo izraziti $\cos^2 x$ preko tangensa i dobivamo
  ${f^{-1}}'(y) = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} y)} = \dfrac{1}{1 + y^2}$.

- Za $\operatorname{arctg} x$ analogno, samo koristimo $\operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2}$ (posljedicu Pitagorinog poučka dijelimo sa $\sin^2 x$):
  $f(x) := \operatorname{ctg} x,\ f'(x) = \frac{-1}{\sin^2},\ f^{-1}(y) = \operatorname{arcctg} y$
  ${f^{-1}}'(y) = -\sin^2(f^{-1}(y)) = -\sin^2(\operatorname{arctg} y) = \dfrac{-1}{1 + \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arctg} y)} = \dfrac{-1}{1 + y^2}$.

Rješenje zadatka 3.23: Sve što o ovisi o konstanti a, na koji god način to bilo, derivirano daje nulu jer je to konstanta.

a) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\ /'$
$\dfrac{2}{3}x^{-1/3} + \dfrac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0$
$y' = -x^{-1/3}y^{1/3}$.

b) $(x^2 + y^2)y^2 = ax^2$ ili $x^2y^2 + y^4 = ax^2\ /'$
$2xy^2 + x^2 2yy' + 4y^3y' = 2ax$
$y' = \dfrac{2ax - 2xy^2}{2x^2y + 4y^3} = \dfrac{ax - xy^2}{x^2y + 2y^3}$.

4

L'Hospitalovo pravilo

U ovoj lekciji naučit ćemo jedan jak alat za rješavanje limesa. Naziva se L'Hospitalovo pravilo, nazvano po francuskom matematičaru Guillaume de L'Hospital. Prezime mu se čita "*lopital*".

Teorem 4.1. Neka su dane diferencijabilne funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$ i $c \in I$. Neka vrijedi $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$. Tada, ako postoji limes

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

i jednak je L, tada postoji i

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

te je jednak L.

Napomena 4.2. Ovaj teorem može se primijeniti i u slučajevima koji nisu direktno napisani u iskazu.

- Teorem primijenjujemo u slučaju kada imamo neodređen izraz oblika $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{0}{0}$ (to zadovoljavaju brojnik i nazivnik izraza). No, možemo ga primijenjivati i u slučaju kada imamo i druge neodređene izraze:

  $$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

  S druge strane, u ostalim slučajevima ne smijemo koristiti L'Hospitalovo pravilo. Posebno, ako je neki od limesa $\lim\limits_{x \to c} f(x)$, $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ realan broj različit od nule, ili jednostavno ne postoji (niti je realan broj niti je $\pm\infty$), ne smijemo koristiti ovaj teorem.

- Sljedeće, ako $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ne postoji, nego izraz teži u neku od beskonačnosti ($\pm\infty$), teorem i dalje smijemo primijeniti. S druge strane, ako taj limes ne postoji i ne teži ni u jednu od beskonačnosti ($\pm\infty$), teorem ne smijemo primijeniti.

- Nadalje, umjesto $x \to c$ smijemo primijeniti teorem u računanju jednostranih limesa, te limesa kada $x \to \infty$ ili $x \to -\infty$.
- Iz ovog vidimo da postoje neki posebni slučajevi kada teorem ne smije biti primijenjen. To su uistinu posebni slučajevi (u smislu da se rijetko pojavljuju), te ćemo ih obraditi kao primjere pri kraju lekcije.

Primjer 4.3. Pomoću L'Hospitalovog pravila odredite sljedeće limese:

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,
- (3.1.b), izmijenjen) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln x}$.

U ovim zadatcima vidimo dio onoga što smo napominjali u napomenama. Prvi limes oblika je $0/0$, te imamo da $x \to c$, $c \in \mathbb{R}$. U drugom limesu imamo neodređen oblik $+\infty/-\infty$, te jednostran limes (zbog $x \to 0^+$). U oba slučaja smijemo primijeniti L'Hospitalovo pravilo (tj., čini se da ga smijemo primijeniti - točno ćemo znati kada odredimo limese s deriviranim brojnikom i nazivnikom i uvjerimo se da limes postoji). Također, primijetimo da u prvom slučaju već znamo koliko limes treba ispasti.
Prvi limes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Oznaka "L'H" nam znači da u ovom trenutku primijenjujemo L'Hospitalovo pravilo: deriviramo brojnik i nazivnik u izrazu. Drugi limes:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln x} = \left(\frac{+\infty}{-\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/\sin^2 x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{-1}{\sin x} = 1 \cdot \frac{-1}{0^+} \to -\infty.$$

U drugom primjeru iskoristili smo da ako omjer derivacija teži u $+\infty$ ili $-\infty$, da i dalje možemo iskoristiti L'Hospitalovo pravilo.

Napomena 4.4. Ovim primjerom vidjeli smo kako ćemo i inače primijenjivati L'Hospitalovo pravilo: ako nam se pojavi jedan od neodređenih izraza oblika $0/0$, $\pm\infty/\pm\infty$, primijenit ćemo L'Hospitalovo pravilo, te na kraju vidjeti je li račun valjan.
Također, L'Hospitalovo pravilo može se primijeniti više puta: ako nam ni izraz $f'(x)/g'(x)$ ne donosi odluku (jer je oblika $0/0$, $\pm\infty/\pm\infty$), na njega smijemo ponovno primijeniti L'Hospitalovo pravilo. Precizno rečeno, događa se sljedeće: ako postoji $\lim_{x\to c} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ i jednak je L (a limesi $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ i $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ su nekog od oblika $0/0$, $\pm\infty/\pm\infty$) postoji i $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ i jednak je L, pa onda postoji i $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ i jednak je L.

Primjer 4.5. Pomoću L'Hospitalovog pravila odredite sljedeće limese:

- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$,

- (3.1.a)) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5+2x^4+3x^2}{-x^5-7x^2}$,
- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+1}{e^x}$.

Prvi primjer vidjeli smo već u lekciji o limesima. Sada izračunajmo limes preko L'Hospitalovog pravila.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}.$$

Došli smo do tabličnog limesa (do na faktor 2 u nazivniku), te zato znamo da je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$. S druge strane, vidjeli smo u prošlom primjeru da smo na izraz koji smo dobili na kraju ovog zadatka ponovno primijenili L'Hospitalovo pravilo. Teoretski to smijemo i ovdje napraviti. Da ne znamo tablični limes, na originalan zadatak primijenili bismo pravilo dvaput, i dobili isti rezultat.
Drugi primjer znamo riješiti i bez L'Hospitalovog pravila, pokušajmo sada koristeći ga. U brojniku i nazivniku imamo polinom po x, a izraz je oblika $0/0$. Derivirajući brojnik i nazivnik, opet ćemo dobiti polinome, ovog puta svaki monom bit će jedan stupanj manji. Jedini način da se izraz $0/0$ ne pojavi je da se neki monom derivacijama pretvori u konstantnu funkciju. To će se dogoditi tek nakon drugog deriviranja. Zato ćemo ovdje primijeniti L'Hospitalovo pravilo dvaput:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x^5+2x^4+3x^2}{-x^5-7x^2} &= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{5x^4+8x^3+6x^1}{-5x^4-14x^1} \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{20x^3+24x^2+6}{-20x^3-14} = \frac{0+6}{-14} = \frac{-3}{7}.\end{aligned}$$

Razmislite: kako biste riješili limes istog izraza u slučaju kad $x \to 1$ ili $x \to \infty$? Biste li smijeli primijeniti L'Hospitalovo pravilo? Ako da, koliko biste ga puta primijenili?
Za treći zadatak, u nazivniku imamo eksponencijalnu funkciju, koja voli biti derivirana proizvoljan broj puta (uvijek daje istu funkciju). S druge strane, derivirajući brojnik, dobivat ćemo polinome sve manjeg stupnja:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{e^x} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x} \\ &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} = \frac{6}{+\infty} = 0.\end{aligned}$$

Pazite da se tu prikrala jedna klopka: na izraz $\dfrac{6}{e^x}$ ne smijemo još jednom primijeniti L'Hospitalovo pravilo, jer nije neodređenog oblika. Iako to ne smijemo napraviti, ne bismo vidjeli grešku budući da bismo na taj pogrešan način dobili isti rezultat.
Razmislite kako biste generalizirali ovaj rezultat za izraze oblika $P(x)/a^x$, za polinom $P(x)$ i $a > 1$. Dobivamo jedno neformalno napisano pravilo: "eksponencijalne funkcije rastu brže od polinoma".

Napomena 4.6. Oprez: derivacija kvocijenta i izraz koji se pojavljuje u L'Hospitalovom pravilu nisu ista stvar! Drugim riječima:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \neq \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

S lijeve strane imamo funkciju zapisanu kao kvocijent nekih drugih funkcija. Derivaciju kvocijenta naučili smo u prošloj lekciji. S desne strane imamo izraz koji se pojavljuje u L'Hospitalovom pravilu. Ta dva izraza, koja se ponekad miješaju studentima koji počinju učiti ovaj kolegij, zapravo su kruške i jabuke.

Napomena 4.7. Većinu zadataka koji će se naći u nastavku znamo riješiti i bez primjene L'Hospitalova pravila. Razmislite o tome kada ćete rješavati. S druge strane, bit će zadataka koji se L'Hospitalovim pravilom rješavaju lakše, najviše zato što je metoda rješavanja jasna: deriviraj brojnik i nazivnik dok smiješ i dok ne dobiješ limes koji znaš izračunati.

Zadatak 4.8. Pomoću L'Hospitalovog pravila odredite sljedeće limese:

a) (3.1.c)) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$,

b) (3.3.b)) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$,

c) (3.1.f)) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{5x-1} - \sqrt{4x+1}}{\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+2}}$,

d) (3.1.e)) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{a^{\ln x} - 1}{\ln x}$.

Napomena 4.9. L'Hospitalovo pravilo možemo koristiti i na izrazima oblika $f(x) \cdot g(x)$. Tada ćemo jedan od faktora "gurnuti" u nazivnik, odnosno problem ćemo zapisati kao $\lim\limits_{x\to c} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{1/g(x)}$. Pritom treba biti pažljiv koja funkcija u primjerima igra ulogu funkcije $g(x)$, budući da ćemo morati derivirati njenu recipročnu vrijednost.

Primjer 4.10. Pomoću L'Hospitalovog pravila odredimo $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$.
Iako faktor x u ovakvim primjerima "voli" ići u brojnik jer se deriviranjem dobiva konstanta 1, pa limes ovisi samo o nazivniku, u ovom zadatku nam to neće proći jer ćemo zadatak svesti na još kompliciraniji problem (uvjerite se sami). Zato faktor x ide u nazivnik:

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{1} = 0.$$

Zadatak 4.11. Pomoću L'Hospitalovog pravila odredite sljedeće limese:

a) (3.2.b)) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \cdot \operatorname{tg} x$,

b) (3.2.d)) $\lim\limits_{x\to 1+} \ln x \ln(x-1)$,

c) (3.3.c)) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Primjer 4.12. (3.4.a)) Pomoću L'Hospitalovog pravila odredimo $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.
Ovaj izraz nije niti oblika $f(x)/g(x)$ niti $f(x)\cdot g(x)$. No, ako se sjetimo trika iz prošle lekcije

$$a^b = \left(e^{\ln a}\right)^b = e^{b \ln a},$$

ovaj problem svodimo na umnožak funkcija u eksponentu:

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{tg} x \ln(\sin x)}.$$

Zato prvo odredimo kamo teži eksponent, pa ćemo zaključiti rezultat za cijeli limes. To je umnožak funkcija, pa trebamo jednu funkciju gurnuti u nazivnik. Budući da smo sami riješili Zadatak 4.11, znamo koju.

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \ln(\sin x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg} x} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} -\cos x \sin x = 0.$$

Ne zaboravimo da rješavamo originalan problem u kojem je ovaj limes samo eksponent:

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \ln(\sin x)} = e^0 = 1.$$

Zadatak 4.13. Pomoću L'Hospitalovog pravila odredite sljedeće limese:

a) (3.4.b)) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$,

b) (3.4.f)) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$,

c) (3.4.g)) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

Za kraj pogledajmo neke primjere u kojima ne smijemo primijeniti L'Hospitalovo pravilo.

Primjer 4.14. (3.7.) Odredimo $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.
Ako bismo pokušali naivno, imali bismo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos x}{1+\cos x}.$$

Dolazimo do limesa koji ne postoji. Naime, kad $x\to\infty$, $\cos x$ divergira između -1 i 1, a sumand 1 mu ne pomaže. Dakle, ne smijemo primijeniti L'Hospitalovo pravilo ovdje, jer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ne postoji (to je nužan uvjet u teoremu). Čak i da bez obzira na to nastavimo s L'Hospitalom, u sljedećem koraku dobili bismo da je limes jednak -1, što će se pokazati netočnim.

Riješimo zadatak sada točno, bez L'Hospitala. U Primjeru 4.15. pokazat ćemo $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$ (obratite pažnju na to kamo x teži). Zato u primjeru podijelimo i brojnik i nazivnik s x pa imamo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Primjer 4.15. Pokažimo još tvrdnju koju smo koristili u prošlom primjeru: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$. Za to koristimo teorem o sendviču (za više detalja pogledajte predavanja). Kako znamo da vrijedi ocjena $|\sin x| \leq 1$, vrijedi i

$$0 \leq \left|\frac{\sin}{x}\right| \leq \frac{1}{x}.$$

U gornjem nizu nejednakosti, prvi i zadnji izraz teže k nuli kad $x \to +\infty$. Po teoremu o sendviču, to vrijedi i za srednji izraz, pa zaključujemo $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Zadatak 4.16. (3.8.) Pokušajte se sami uvjeriti da ni u limesu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ ne smijemo primijeniti L'Hospitalovo pravilo. Nađite limes.

Ovakvi zadatci su rijetkost i samo su kontraprimjeri za to da s L'Hospitalom treba biti oprezan. Najčešće će se na kolokvijima javljati primjeri u kojima smijete primijeniti L'Hospitalovo pravilo, no budite oprezni i provjerite uvjete.

Nakon što riješite sve zadatke iz ovog materijala, savjetujemo da riješite i sve materijale s weba. Razmislite kako biste riješili i limese iz lekcije Limesi i neprekidnost.

Upute za neke zadatke za samostalno rješavanje

Zadatak **??**.a) Iskorisite supstituciju $t = \pi/2 - x$, pa problem s kosinusima pretvorite u problem sa sinusima.

Zadatak **??**.b) Svedite na zajednički nazivnik.

Zadatak 4.11.a) Tangens u nazivniku postaje kotangens.

Zadatak 4.11.c) Svedite na zajednički nazivnik.

Zadatak 4.13.a) Sjetite se da smo u jednom primjeru našli kamo teži $x \ln x$ kad $x \to 0^+$.

Zadatak 4.16 Izraz koji se pojavljuje u zadatku je jednak izrazu $\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$. Kamo teži koji od faktora? Izvedite zaključak.

Rješenja zadataka za samostalno rješavanje

Rješenje zadatka ??:

a)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(5x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{5}{\cos^2(5x)}} = \left[t = \frac{\pi}{2} - x\right] = \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2(5x)}{5\sin^2 x}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin^2(5x)}{(5x)^2} \frac{x^2}{\sin^2 x} 5 = 1 \cdot 1 \cdot 5 = 5$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$
$$\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{2}.$$

c)

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{5x-1} - \sqrt{4x+1}}{\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+2}} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \frac{\frac{5}{2\sqrt{5x-1}} - \frac{4}{2\sqrt{4x+1}}}{\frac{3}{2\sqrt{3x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}} = \frac{\frac{5}{2\cdot 3} - \frac{4}{2\cdot 3}}{\frac{3}{2\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 2}} = \frac{1}{3}$$

Ovaj zadatak može se riješiti i racionalizacijom, bez L'Hospitalovog pravila.

d)

$$\lim_{x\to 1} \frac{a^{\ln x} - 1}{\ln x} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{a^{\ln x} \ln x \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \ln a$$

Ovaj zadatak može se riješiti i supstitucijom $t = \ln x$, bez L'Hospitalovog pravila.

Rješenje zadatka 4.11:

a) Funkcije $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ vole doći u nazivnik, budući da se one i njihove recipročne vrijednosti "jednako komplicirano" deriviraju.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \cdot \operatorname{tg} x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{\frac{-1}{\sin^2 x}}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x = 0$$

b)

$$\lim_{x\to 1^+} \ln x \cdot \ln(x-1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{\ln^2 x}\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x\ln^2 x}{x-1}$$
$$= \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{2\ln x \frac{1}{x} x + \ln^2 x}{1} = \lim_{x\to 1^+} \left(2\ln x + \ln^2 x\right) = 0$$

c)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x+1}{(x-1)\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\ln x+2}=\frac{-1}{2}$$

Rješenje zadatka 4.13:

a) Prvo treba naći limes $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$, no to smo već napravili u Primjeru 4.10., taj limes iznosi 0. Zato je
$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1.$

b) Ponovno se samo fokusiramo na eksponent, te će tako biti i dalje.

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{tg} x\ln(1/x)=\lim_{x\to 0^+}-\operatorname{tg} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\ln x}{\operatorname{ctg} x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\sin x=1\cdot 0=0$$

Zato je $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}=e^0=1.$

c)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{\sin^2 x}=0$$

Zato je $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}=e^0=1.$

Rješenje zadatka 4.16: Limes možemo zapisati na sljedeći način (kao u uputi):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$$

Kada $x\to 0$, prvi faktor ide ka 1. Također, kada $x\to 0$, tada $1/x\to\infty$, pa stoga $\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ ide k nuli (vidi Primjer 4.15.). Zato i cijeli izraz ide ka nuli.

5

Tangenta i normala

Prije nego krenemo sa sljedećom lekcijom, bilo bi dobro da se prisjetite nekog gradiva koje znamo iz srednje škole ili Analitičke geometrije:

- Kako općenito glasi eksplicitna jednadžba pravca? Kako određujemo jednadžbu pravca koji prolazi kroz dvije dane točke? Kako određujemo jednadžbu pravca koji prolazi kroz neku točku uz dani koeficijent smjera?
- Koji je kriterij za paralelnost dvaju pravaca? Koji je uvjet za okomitost?
- Kako zadajemo implicitnu jednadžbu pravca? Kako zadajemo parametarsku jednadžbu pravca? Kako se prebacujemo iz jedne forme zadavanja jednadžbe pravca u drugu?
- Kako računamo kut između dva pravca?

U lekciji Derivacija najavili smo da je derivacija za dovoljno glatku f broj $f'(x_0)$ ujedno koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u točki x_0 (tj. $(x_0, f(x_0))$). Da bismo odredili punu jednadžbu pravca tangente, treba nam još jedan podatak, a to je točka kroz koju prolazi. Zato imamo: jednadžba tangente na graf funkcije f u x_0 dana je s

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Kako bismo odredili jednadžbu normale na graf funkcije f? Normala je pravac koji prolazi istom točkom kao tangenta, ali je okomit na tangentu. Zbog okomitosti koeficijent smjera tog pravca ima negativnu recipročnu vrijednost koeficijenta smjera tangente, pa je zato jednadžba normale dana s

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Primjer 5.1. (4.1.) Odredimo jednadžbe tangente i normale na krivulju $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$ u točki s apscisom $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Prvo ovu krivulju moramo shvatiti kao graf neke funkcije. Točke na krivulji iz zadatka definirane su kao

$$(x, y) = \left(x, \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2\right).$$

Točke na grafu funkcije f dane su kao $(x, f(x))$, pa je dosta jasno da trebamo definirati funkciju $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$. Izračunajmo sa strane parametre koji nam trebaju. U $x_0 = \frac{\pi}{2}$ nam treba vrijednost $f(x_0)$ i $f'(x_0)$. Prvo računamo derivaciju: $f'(x_0) = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, pa onda uvrštavamo i vidimo $f(x_0) = f(\pi/2) = \frac{3}{2}$ i $f'(x_0) = f'(\pi/2) = -\sqrt{3}$. Zato su jednadžbe tangente i normale redom

$$t \ \ldots \ y - \frac{3}{2} = -\sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{i} \quad n \ \ldots \ y - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ovo je bio primjer s krivuljom koja je bila zadana eksplicitno. S implicitno zadanom krivuljom koeficijent smjera tangente nalazimo implicitnim deriviranjem (vidjeti kraj lekcije Derivacije). Kod parametarske zadane krivulje ćemo iskoristiti sljedeću tvrdnju: za krivulju danu s $(x(t), y(t)), t \in I$, jednadžba tangente u točki $(x(t_0), y(t_0))$ dana je s

$$p(t) = (x'(t)(t - t_0) + x(t), y'(t)(t - t_0) + y(t)).$$

Primijetite da opet derivacija utječe na smjer pravca, što je bilo prirodno za očekivati.

Zadatak 5.2. (4.3.) Odredite jednadžbu tangente na krivulju $y = f(x)$ implicitno zadanu s $y^3 + xy = 3y^2$ u točki $D(0, 3)$.

Primjer 5.3. (4.4.) Odredite jednadžbu tangente na krivulju parametarski zadanu s $x(t) = \ln(\cos t + 1)$, $y(t) = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$ u točki zadanoj s $t = \pi/4$.
Slično kao u prošlom primjeru, trebamo vrijednost funkcije i derivacije u točki. Zato prvo deriviramo ($x(t)$ i $y(t)$), uvrštavamo da nađemo odgovarajuće parametre, a zatim nađemo jednadžbu tangente.

$x'(t) = \dfrac{-\sin t}{\cos t + 1}$, $x(\pi/4) = \ln(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1)$, $x'(\pi/4) = \dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}$

$y'(t) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{-1}{1+t^2} = 0$, $y(\pi/4) = 2$, $y'(\pi/4) = 0$

Tangenta: $p(t) = \left(\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}(t - \dfrac{\pi}{4}) + \ln(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1), 2\right)$.

U normalnim okolnostima, ovo je točno (i ružno) rješenje. No, jednadžba se može uljepšati. Primijećujemo da ova tangenta ima uvijek ordinatu jednaku 2, pa zapravo zaključujemo da se radi o pravcu $y = 2$.

Napomena 5.4. Sada zadajemo nekoliko zadataka za samostalno rješavanje. Razlog zbog kojih ne rješavamo više zadataka u primjerima je taj što se ovo gradivo više temelji na vašem znanju analitičke geometrije. Ako imate te vještine, i ako znate derivirati funkciju (što smo naučili u lekciji Derivacije), trebali biste znati samostalno riješiti većinu zadataka u nastavku. Za pomoć, pogledajte upute na kraju lekcije.

Zadatak 5.5. (4.7.) U točkama s apscisama $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$ povučena je sekanta na graf funkcije $f(x) = x^2$. U kojoj je točki tangenta na graf funkcije paralelna toj sekanti?

Zadatak 5.6. (4.9.) Odredite jednadžbe tangenti na krivulju $y = \dfrac{3x^2+1}{x^2+3}$ u točkama s ordinatom 1.

Zadatak 5.7. (4.10.) Odredite dirališta tangenti na krivulju $y = \dfrac{x+1}{x+2}$ koje su paralelne pravcu $x - y + 5 = 0$.

Zadatak 5.8. (4.12.) Odredite točku u kojoj se sijeku tangente na krivulju $y = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ u točkama s apscisama $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$.

Napomena 5.9. Iskoristite da vrijedi $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$, za $x \neq 0$. Dokažite za vježbu tu tvrdnju (pogledajte što se događa za pozitivne, a što za negativne realne x).

Riješimo jedan drugačiji primjer. Osim što je to zadatak s riječima, ima još neke posebnosti.

Primjer 5.10. (4.13.) Svemirski brod se kreće po krivulji $y = x^2$. U nekom trenutku brod će ispustiti teret koji će se nastaviti kretati tangentom na tu krivulju. Odredite gdje bi brod trebao ispustiti teret tako da on doplovi do svemirske postaje koja je smještena u točki $T(3, 2)$.

Pokušajmo bolje proučiti zadatak. Imamo graf funkcije $f(x) = x^2$, po kojoj se kreće brod (u nama nepoznatom smjeru). Dok se brod kreće po toj krivulji, kreće se i teret zajedno s njim. Kada brod ispusti teret, teret se nastavlja gibati po tangenti na tu krivulju. U nekom trenutku treba doći do točke $(3, 2)$.

Možda će nam pomoći razmišljati o ovom zadatku na obrnut način: teret, da bi došao do točke $(3, 2)$, zadnje trenutke putovat će po pravcu. Taj pravac ima presjek s krivuljom $y = x^2$. Recimo da je to točka (x_0, x_0^2). U toj točki teret je ispušten da se giba po pravcu. Dapače, mora se gibati po tangenti, što znači da pravac koji prolazi točkama (x_0, x_0^2) i $(3, 2)$ zapravo tangenta na krivulju $y = x^2$. To je način kako ćemo odrediti x_0.

Pravac koji prolazi kroz točke (x_0, x_0^2) i $(3, 2)$ ima koeficijent smjera $\dfrac{x_0^2 - 2}{x_0 - 3}$. S druge strane, budući da je taj pravac tangenta, njegov koeficijent smjera u x_0 je vrijednost derivacije funkcije x^2 u točki x_0, dakle jednak je $2x_0$. Zato imamo

$$\begin{aligned} 2x_0 &= \frac{x_0^2 - 2}{x_0 - 3} \\ 2x_0^2 - 6x_0 &= x_0^2 - 2 \\ x_0^2 - 6x_0 + 2 &= 0 \\ x_0^{(1),(2)} &= 3 \pm \sqrt{7}. \end{aligned}$$

Primijetimo da smo ovo mogli i drugačije riješiti. Naime, uvjet zadatka se može protumačiti i na sljedeći način: tangenta na krivulju u točki (x_0, x_0^2) prolazi točkom $(3, 2)$. Ta

tangenta ima jednadžbu $y - x_0^2 = 2x_0 \cdot (x - x_0)$. Uvjet da točka $(3,2)$ leži na tangenti daje $2 - x_0^2 = 2x_0(3 - x_0)$, što u konačnici vodi na isti sustav.
Komentirajmo još zašto smo dobili dva rješenja. Naime, kao što smo komentirali pri početku rješenja, nije nam rečeno u kojem se smjeru brod kreće. Da se brod kreće tako da mu x koordinata raste, tada bi teret ispustio u točki $(3-\sqrt{7},(3-\sqrt{7})^2)$. Da se kreće u suprotnom smjeru, ispustio bi u točki $(3+\sqrt{7},(3+\sqrt{7})^2)$.

Napomena 5.11. Ovaj primjer nam može poslužiti da kažemo još jednu bitnu stvar koja nije direktno vezana za sami zadatak. U zadatcima koji se pojavljuju u ovoj lekciji, te u analognim zadatcima koji će nam se pojavljivati u sljedećem semestru kod slučaja funkcija više varijabli, jako je bitno da u zadatcima tipa "nađite jednadžbu tangente kroz točku (x_0, y_0) na krivulju $y = f(x)$" provjerimo nalazili se dana točka uopće na krivulji.

Prije nego pojasnimo zašto je to bitno, primijetimo da je to do sada bilo bitno jedino u Zadatku 5.2, budući da u svim ostalim zadatcima i primjerima mi najčešće računamo u kojoj točki računamo tangentu jer imamo samo neki od podataka (primjerice samo x ili y koordinatu točke), a drugi podatak računamo iz uvjeta da se ta točka nalazi na krivulji.

Pojasnimo zašto je općenito za danu točku u zadatku (x_0, y_0) bitno provjeriti nalazi li se na krivulji, ako to ne znamo. Recimo da je zadatak da odredimo jednadžbu tangente na krivulju $y = x^2$ u točki $(3,2)$. Ako se bismo krivo pomislili da se točka $(3,2)$ nalazi na krivulji $y = x^2$, izračunali bismo da je $f'(x_0) = 2 \cdot 3 = 6$ i (krivo) zaključili da je naša jednadžba tangente $y - 2 = 6(x - 3)$. Kad biste nacrtali što smo dobili, uvjerili biste se sami da to uopće nije tangenta na krivulju. Pravi način da odredimo krivulju kroz točku $(3,2)$ upravo je onaj kao u rješenju prošlog primjera. Vidimo da imamo dvije tangente, jedna koja prolazi kroz točke $(3,2)$ i $(3-\sqrt{7},(3-\sqrt{7})^2)$, a druga kroz točke $(3,2)$ i $(3-\sqrt{7},(3-\sqrt{7})^2)$.

Općenito zadatci oblika "nađite jednadžbu tangente kroz točku (x_0, y_0) na krivulju $y = f(x)$" mogu biti nešto lakši (ako se točka nalazi na krivulji) ili teži (ako se ne nalazi). Najčešće ćemo biti u prvom slučaju, no to treba eksplicitno provjeriti ako nije jasno iz drugih uvjeta u zadatku.

Prije nego riješimo zadamo sljedeći zadatak, uvedimo jednu definiciju.

Definicija 5.12. Kut između krivulja definira se kao kut između tangenti na krivulje u točki presjeka.

Intuitivno, uzmimo presjek dviju krivulja. Kada bismo jako zumirali u točki presjeka, krivulje oko sjecišta bi se izravnale, te bi izgledale kao svoje tangente. Zato definiramo da je kut presjeka upravo kut između njihovih tangenti. Posebno, dvije krivulje su okomite ako im se tangente sijeku pod pravim kutom.

Zadatak 5.13. (4.14.) Projektil je ispaljen iz točke $T(0,4)$ prema štitu koji ima oblik krivulje $y = \sqrt{x}$. Prema kojoj točki na krivulji treba usmjeriti projektil tako da projektil pogodi štit pod pravim kutem?

Sjetimo se kako se određuje kut između dvaju pravaca: za pravce s koeficijentima smjerova k_1 i k_2 kut ϕ između pravaca dan je s $\operatorname{tg} \phi = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$.

Primjer 5.14. (4.15.c)) Odredite kut između tangenti na krivulje $2y + x^2 = 0$ i $2y = x(1-y)$ u točkama presjeka.
Ovaj zadatak iskoristit ćemo kao još jedan podsjetnik kako se rješavaju zadatci s implicitno zadanom funkcijom. Ovaj zadatak može se riješiti s eksplicitno zadanom funkcijom (samo izrazimo y iz obje jednadžbe krivulje – pokušajte sami). Kako god, shema rješenja je ista: prvo nađemo točku/točke presjeka rješavajući sustav jednadžbi, nakon toga nalazimo koeficijente smjerova tangenti (tj. vrijednosti derivacija u toj točki) i računamo kut po gore danoj formuli. Primijetite da nas ne zanima cijela jednadžba tangente, pa ju ni ne trebamo računati.
Neka jednadžbe $2y+x^2 = 0$ i $2y = x(1-y)$ redom implicitno definiraju funkcije $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$. Odredimo prvo presjek krivulja. Iz jednadžbi $2y = -x^2$ i $2y = x(1-y)$ usporedimo desne strane i dobijemo $x^2 + x(1-y) = 0 \implies x(1-x+y) = 0$. Ako je $x = 0$, uvrštavajući u obje jednadžbe vidimo da je $y = 0$. Ako je $x \neq 0$, tada druga zagrada mora biti nula, tj. $y = 1 + x$. Ako to uvrstimo u prvu jednadžbu krivulje, dobivamo $x^2 + 2x + 2 = 0$, što nema realnih rješenja. Dakle, jedina točka presjeka krivulja je $(x_0, y_0) = (0, 0)$, i očito se nalazi na obje krivulje.
Odredimo sada koeficijente smjerova tangenti. Za to nam trebaju vrijednosti derivacija $f_1'(x_0)$ i $f_2'(x_0)$ implicitno zadanih krivulja $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ u $x_0 = 0$. Implicitnim deriviranjem jednakosti $2y + x^2$ dobivamo $2y' + 2x = 0$. Uvrštavanjem $x = x_0 = 0$ dobivamo $y' = 0$, dakle $f_1'(0) = 0$. Implicitnim deriviranjem jednakosti $2y = x(1-y)$ dobivamo $2y' = (1-y) - xy'$. Uvrštavanjem $x = x_0 = 0$ i $y = y_0 = 0$ dobivamo $y' = 1/2$, odnosno $f_2'(0) = \frac{1}{2}$. Odavde je $\operatorname{tg}\phi = \left|\frac{\frac{1}{2}-0}{1+\frac{1}{2}\cdot 0}\right|$, odnosno $\phi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Budući da kut ϕ nije neki poznati kut (jer $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ nam nije poznata vrijednost bez kalkulatora), ostavljamo rješenje u ovom zapisu.

Zadatak 5.15. Odredite kut između tangenti na krivulje u točkama presjeka:

a) (4.15.a)) $y = \sqrt{x}$ i $y = x^2$,

b) (4.15.d)) $xy = 2$ i $y^2 = 4x$.

Zadnji zadatak je odlična vježba da ponovimo sve iz ove lekcije, a ponešto i iz prošlih.

Zadatak 5.16. (4.16.) Odredite kut pod kojim se sijeku tangenta na krivulju $y = f(x)$ implicitno zadanu s $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ u točki $D(1, 0)$ i tangenta na krivulju $y = (\cos x)^{\sin x}$ u točki s apscisom $x_0 = 0$.

Nakon što riješite sve zadatke iz ovog materijala, savjetujemo da riješite i sve materijale s weba.

Upute za neke zadatke za samostalno rješavanje

Zadatak 5.2 Pogledajte Napomenu 3.21. da vidite na koji način nalazimo vrijednost derivacije u točki za implicitno zadane funkcije. Ako povlačimo tangentu u točki $D(0,3)$, to znači da je $x_0 = 0$ i $y_0 = f(x_0) = 3$ (uvrštavanjem u implicitnu definiciju funkcije uvjerimo se da točka $(0,3)$ uistinu jest na krivulji). Kako smo odredili $f'(x_0)$, imamo sve podatke da odredimo jednadžbu tangente.

Zadatak 5.13 Kao prvo, iako je krivulja definirana za sve $x \geq 0$, nećemo promatrati točku $x = 0$. Razlog je taj što za definiciju derivacije trebamo otvoreni interval oko točke u kojoj računamo derivaciju, što nemamo za $x = 0$ (nemamo nijednu negativnu točku u domeni). Kao drugo, primijetite da je zadatak ekvivalentan sljedećem: nađimo točku $(x_0, f(x_0))$ za $f(x) = \sqrt{x}$ takvu da normala u toj točki prolazi točkom $(4,0)$. Usporedite s primjerom 5.10.

Rješenja zadataka za samostalno rješavanje

Rješenje zadatka 5.2: Odredimo najprije implicitnu derivaciju funkcije $y^3+xy=3y^2$. Imamo

$$\begin{aligned} f(x)^3 + xf(x) &= 3f(x)^2 \;/' \\ 3f(x)^2 f'(x) + f(x) + xf'(x) &= 6f(x)f'(x) \\ 3f(x)^2 f'(x) + xf'(x) - 6f(x)f'(x) &= -f(x) \\ f'(x)(3f(x)^2 + x - 6f(x)) &= -f(x) \\ f'(x) &= \frac{-y}{3y^2+x-6y} \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $x=0$ i $y=3$ dobivamo koeficijent smjera tangente $f'(0)=-\frac{1}{3}$. Preostaje odrediti jednadžbu pravca koji ima koeficijent smjera $-\frac{1}{3}$ i prolazi kroz točku $D(0,3)$

$$y-3=-\frac{1}{3}(x-0),$$

tj., jednadžba tangente kroz točku $D(0,3)$ je

$$y=-\frac{x}{3}+3$$

Rješenje zadatka 5.5: Jasno, tražene točke kroz koje prolazi sekanta su $A(1,1)$ i $B(3,9)$. Odredimo jednadžbu sekante koja prolazi kroz te točke. Imamo

$$\begin{aligned} y-1 &= \frac{9-1}{3-1}(x-1) \\ y-1 &= 4(x-1) \\ y &= 4x-3 \end{aligned}$$

Posebno, koeficijent smjera te sekante je 4. Kako paralelni pravci imaju isti koeficijent smjera i kako je koeficijent smjera tangente kroz točku $T(x,x^2)$ jednak $2x$, iz $2x=4$ zaključujemo da apscisa točke u kojoj je tangenta paralelna našoj zadanoj sekanti mora biti 2. Sada je jasno da je tražena točka $D(2,4)$.

Rješenje zadatka 5.6: Odredimo najprije dirališta tangenti. Da bismo to dobili, moramo riješiti jednadžbu

$$\frac{3x^2+1}{x^2+3}=1$$

Kako je $x^2+3>0$ za sve $x\in\mathbb{R}$, smijemo množiti jednadžbu s nazivnikom, pa dobivamo

$$3x^2+1=x^2+3,$$

tj., dobivamo kvadratnu jednadžbu $2x^2-2=0$, čija su rješenja očito $x_1=1$ i $x_2=-1$, pa su tražena dirališta $D_1(-1,1)$ i $D_2(1,1)$. Kako je naša krivulja određena funkcijom $f(x)=\frac{3x^2+1}{x^2+3}$, da bismo dobili koeficijente smjera tangenti, trebamo derivirati tu funkciju. Imamo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{3x^2+1}{x^2+3}\right)' \\
f'(x) &= \left(\frac{3x^2+9-8}{x^2+3}\right)' \\
f'(x) &= \left(3-\frac{8}{x^2+3}\right)' \\
f'(x) &= -8\cdot\left((x^2+3)^{-1}\right)' \\
f'(x) &= \frac{8}{(x^2+3)^2}\cdot 2x \\
f'(x) &= \frac{16x}{(x^2+3)^2}
\end{aligned}$$

Sada se lako vidi $f'(-1) = -1$ i $f'(1) = 1$. Korištenjem formule $y-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$ i sređivanjem lako dobijemo da je tangenta kroz $D_1(-1,1)$ dana jednadžbom

$$y = -x,$$

dok je tangenta kroz $D_2(1,1)$ dana jednadžbom

$$y = x.$$

Rješenje zadatka 5.7: Odredimo najprije derivaciju funkcije $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ kojom je zadana krivulja.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x+1}{x+2}\right)' \\
f'(x) &= \left(\frac{x+2-1}{x+2}\right)' \\
f'(x) &= \left(1-\frac{1}{x+2}\right)' \\
f'(x) &= -\left((x+2)^{-1}\right)' \\
f'(x) &= \frac{1}{(x+2)^2}
\end{aligned}$$

Uočimo, ako jednadžbu $x-y+5=0$ zapišemo kao $y = x+5$, vidimo da je koeficijent smjera jednak 1. Kako su pravci paralelni ako i samo ako im je koeficijent smjera jednak, trebamo riješiti jednadžbu, $f'(x) = 1$, odnosno rješavamo jednadžbu

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(x+2)^2} = 1 \\
\iff &(x+2)^2 = 1 \\
\iff &x+2 = \pm 1,
\end{aligned}$$

iz čega lako dobijemo rješenja $x_1 = -1$ i $x_2 = -3$. Preostaje nam odrediti ordinate točaka, a kako je $f(-1) = 0$ i $f(1) = 2$, dirališta su $D_1(-1, 0)$ i $D_2(-3, 2)$.

Rješenje zadatka 5.8: Krivulja je zadana jednadžbom

$$f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

Točke u kojima tražimo tangente su tada $D_1(0, 0)$ i $D_2(2, -\ln 3)$ (jer je $\ln\frac{1}{3} = -\ln 3$). Odredimo koeficijente smjera traženih tangenti. Imamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)' \\ &= \left|\frac{x+1}{x-1}\right| \cdot \left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)' \end{aligned}$$

Iako apsolutna vrijednost nije derivabilna u nuli, ovdje nemamo s tim problema, jer f ionako nije definirana u točki u kojoj je izraz $\frac{x-1}{x+1}$ jednak nuli. Nadalje, razlikujemo dva slučaja, jer izraz $\frac{x-1}{x+1}$ ima različite predznake za $x = 0$, odnosno $x = 2$.
Za $x = 0$ imamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-x-1}{x-1} \cdot \left(\frac{1-x}{x+1}\right)' \\ &= \frac{-x-1}{x-1} \cdot \left(\frac{2-x-1}{x+1}\right)' \\ &= \frac{-(x+1)}{x-1} \cdot \left(\frac{2}{x+1} - 1\right)' \\ &= \frac{-(x+1)}{x-1} \cdot \frac{-2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2}{(x-1)(x+1)} \\ \Longrightarrow\ f'(0) &= -2 \end{aligned}$$

Odavde lako dobijemo da je jednadžba tangente s diralištem u D_1

$$y = -2x.$$

S druge strane, za $x = 2$ imamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x+1}{x-1} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \\ &= \frac{x+1}{x-1} \cdot \left(\frac{x+1-2}{x+1}\right)' \\ &= \frac{x+1}{x-1} \cdot \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)' \\ &= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2}{(x-1)(x+1)} \\ \implies f'(2) &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Slijedi, jednadžba tangente je

$$y + \ln 3 = \frac{2}{3}(x-2),$$

tj.

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} - \ln 3.$$

Preostaje odrediti sjecište ta dva pravca. Dobivamo

$$\begin{aligned} -2x &= \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} - \ln 3 \\ -6x &= 2x - 4 - 3\ln 3 \\ -8x &= -4 - 3\ln 3 \\ x &= \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\ln 3 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem ove vrijednosti u jednadžbu $y = -2x$ dobivamo sjecište

$$S\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\ln 3, -1 - \frac{3}{4}\ln 3\right).$$

Rješenje zadatka 5.13: Uočimo, mi zapravo tražimo točku na krivulji $y = \sqrt{x}$ takvu da normala kroz tu točku prolazi točkom $T(4,0)$. Označimo tu točku s $D(x_0, \sqrt{x_0})$. Koeficijent smjera pravca koji prolazi kroz točke T i D je

$$c = \frac{\sqrt{x_0}}{x_0 - 4}$$

S druge strane, koeficijent smjera tangente kojoj je diralište točka D je $f'(x_0)$ (naravno, funkcija koju gledamo je $f(x) = \sqrt{x}$). Dakle, moramo riješiti jednadžbu

$$f'(x_0) = -\frac{1}{c} = \frac{4 - x_0}{\sqrt{x_0}}.$$

Derivacija funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ je

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

pa dobivamo jednadžbu

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{4 - x_0}{\sqrt{x_0}} \\ \frac{1}{2\sqrt{x_0}} &= \frac{4 - x_0}{\sqrt{x_0}} \quad / \cdot 2\sqrt{x_0} \\ 1 &= 8 - 2x_0 \\ x_0 &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Dakle, tražena točka je $D\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.

Napomena: Gore smijemo isključiti slučaj $x_0 = 0$ pa onda i množiti s $\sqrt{x_0}$ jer da bi funkcija bila derivabilna u nekoj točki, ona mora biti definirana na nekom intervalu oko te točke. U slučaju $f(x) = \sqrt{x}$, f nije definirana lijevo od nule, pa nema uopće smisla gledati derivaciju u nuli.

Rješenje zadatka 5.15:

a) Odredimo najprije sjecišta tih dviju krivulja. Iz jednadžbi krivulja, i uz supstituciju $t = \sqrt{x}$, dobivamo jednadžbu

$$\begin{aligned} t &= t^4 \\ t - t^4 &= 0 \\ t(1 - t^3) &= 0 \\ t(1 - t)(1 + t + t^2) &= 0 \end{aligned}$$

iz čega lako vidimo da su rješenja $t_1 = 0$ i $t_2 = 1$, odnosno, vraćanjem supstitucije dobivamo $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Međutim, kao i u prethodnom zadatku, izbacujemo točku s apscisom 0, pa preostaje točka sjecišta s apscisom $x = 1$, tj. točka sjecišta je $S(1, 1)$.

Odredimo sada koeficijente smjera tangenti tih krivulja s diralištem u S. Kako je $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ i $(x^2)' = 2x$, zaključujemo da su koeficijenti smjera $k_1 = \frac{1}{2}$ i $k_2 = 2$.

Sada imamo, ako označimo traženi kut s ϕ,

$$\operatorname{tg}\phi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$$
$$\operatorname{tg}\phi = \left|\frac{\frac{1}{2} - 2}{1 + 1}\right|$$
$$\operatorname{tg}\phi = \frac{3}{4}$$

Dakle, traženi kut je $\phi = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

b) Kvadriranjem jedandžbe $xy = 2$ i dijeljenjem s x^2 (smijemo, jer je x sigurno različit od nule) prva jednadžba postaje $y^2 = \frac{4}{x^2}$. Izjednačavanjem s drugom jednadžbom dobivamo jednadžbu

$$\frac{4}{x^2} = 4x \ / \cdot x^2 (x \neq 0)$$
$$4x^3 = 4 \ / : 4$$
$$x^3 = 1 \ / \sqrt[3]{}$$
$$x = 1$$

Dakle, sjecište je točka s apscisom 1, odnosno, točka $S(1,2)$ Implicitnom derivacijom izraza $xy = 2$ dobivamo

$$xy = 2 \ /'$$
$$y' + xy = 0$$
$$y' = -xy,$$

iz čega, uvrštavanjem $x = 1$ i $y = 2$, slijedi da je $k_1 = -2$. Slično, implicitnom derivacijom izraza $y^2 = 4x$ dobivamo

$$y^2 = 4x \ /'$$
$$2yy' = 4$$
$$y' = \frac{2}{y},$$

Odavde slijedi, uz $y = 2$, $k_2 = 1$.
Sada imamo

$$\operatorname{tg}\phi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$$
$$\operatorname{tg}\phi = \left|\frac{-2 - 1}{1 - 2}\right|$$
$$\operatorname{tg}\phi = 3$$

Odnosno, traženi kut je $\phi = \operatorname{arctg} 3$.

Rješenje zadatka 5.16: Pomoću implicitne derivacije odredimo najprije tangentu na krivulju zadanu s $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg}\frac{y}{x} &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)\ /' \\
\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y'x-y}{x^2} &= \frac{1}{2(x^2+y^2)}\cdot 2x+2yy' \\
\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2} &= \frac{x+2yy'}{x^2+y^2} \\
\frac{y'x-y}{x^2+y^2} &= \frac{x+2yy'}{x^2+y^2} \\
\Longrightarrow\ y'x-y &= x+2yy' \\
y'x-2yy' &= x+y \\
y' &= \frac{x+y}{x-2y}
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $x=1$ i $y=0$ dobivamo koeficijent smjera $k_1 = 1$.
S druge strane, za drugu krivulju imamo

$$\begin{aligned}
\left((\cos x)^{\sin x}\right)' &= \left(e^{\sin x\cdot\ln(\cos x)}\right)' \\
&= e^{\sin x\cdot\ln(\cos x)}\cdot\left(\sin x\cdot\ln(\cos x)\right)' \\
&= (\cos x)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\ln(\cos x)+\sin x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}\right) \\
&= (\cos x)^{\sin x}\cdot\left(\cos x\ln(\cos x)-\sin x\operatorname{tg} x\right)
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $x=0$ dobivamo da je koeficijent smjera $k_2 = 0$. Napokon, za kut između te dvije tangente

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\phi &= \left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right| \\
\operatorname{tg}\phi &= \left|\frac{1-0}{1-0}\right| \\
\operatorname{tg}\phi &= 1
\end{aligned}$$

Odnosno, kut je $\phi = \frac{\pi}{4}$.

6

Monotonost i geometrijski ekstremi

Prirodan problem koji se javlja u problemima iz matematike je kako odrediti ekstrem neke funkcije, tj. kada neki izraz postiže minimum ili maksimum. Ekstreme funkcije dijelimo na globalne i lokalne. Globalni ekstremi su zanimljiviji u modeliranju, no lokalne lakše nalazimo koristeći dervivacije.

Definicija 6.1. Dana je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ definirana na intervalu I. Funkcija ima lokalni minimum (maksimum) u točki $c \in I$ ako postoji okolina točke c oblika $\langle c - \delta, c + \delta \rangle$ na kojoj vrijedi $f(x) \geq f(c)$ ($f(x) \leq f(c)$). Funkcija ima lokalni minimum (maksimum) u točki $c \in I$ ako svojstvo $f(x) \geq f(c)$ ($f(x) \leq f(c)$) vrijedi za sve $x \in I$.

Napomena 6.2. Da ne bi bilo zabune, lokalni ili globalni ekstrem / minimum / maksimum je vrijednost u kodomeni funkcije, a točka lokalnog ili globalnog ekstrema / minimuma / maksimuma je točka u domeni. Primjerice, funkcija $f(x) = (x-2)^2 + 3$ ima globalni minimum jednak 3, koji se postiže u točki globalnog minimuma jednakoj $x = 2$.

Kao što smo rekli, lokalni ekstremi u ovom trenutku su nam zanimljivi jer ih možemo pronaći derivacijama.

Definicija 6.3. Dana je derivabilna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ definirana na intervalu I. Točka $c \in I$ je stacionarna točka za f ako je $f'(c) = 0$.

Teorem 6.4. Neka derivabilna funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ definirana na intervalu I ima lokalni ekstrem u točki c. Tada je c stacionarna točka.

Napomena 6.5. Obratimo malo bolje pažnju na gornji teorem: ako je neka točka c lokalni ekstrem, funkcija nužno u toj točki ima derivaciju nula. Primjer za takvo što vidimo kod funkcije $f(x) = x^2$. No, obrat općenito ne vrijedi: ako funkcija ima stacionarnu točku c, u njoj ne mora biti lokalni ekstrem (primjer je funkcija $f(x) = x^3$ - u nuli funkcija ima derivaciju jednaku nuli, no ona nema lokalnih ekstrema jer je rastuća). Stacionarna točka koja nije lokalni ekstrem naziva se sedlasta točka.

Ovo gore je nešto što želimo **jako** naglasiti: **stacionarne točke samo su kandidati za točke lokalnih ekstrema**. Isto tako, **lokalni ekstremi su samo kandidati za**

globalne ekstreme. Ukoliko ćemo htjeti za neku stacionarnu točku tvrditi da je točka lokalnog ekstrema, iili ako ćemo za lokalni eksrem htjeti tvrditi da je globalni, morat ćemo to dodatno argumentirati.

Uvedimo i pojam intervala monotonosti. Znamo kada je funkcija rastuća/padajuća: ako za svaka dva broja $x > y$ iz domene od f vrijedi $f(x) \geq f(y)$, tada je funkcija rastuća. Ako vrijedi stroga nejednakost, pričamo o strogo rastućoj funkciji. Strogo je rastuća/padajuća ako vrijedi stroga nejednakost.

Ako funkcija nije niti rastuća niti padajuća (npr $f(x) = x^2$), možemo pričati o intervalima na kojima funkcija raste ili pada. Tada kažemo da je funkcija f rastuća/padajuća na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako je funkcija $f|_{\langle a,b\rangle}$ rastuća/padajuća.

I to možemo određivati pomoću derivacija. Intuitivno vrijedi da ako funkcija u nekoj točki ima pozitivnu derivaciju, tada je tangenta u toj točki "rastući pravac" (pravac s pozitivnim koeficijentom smjera), te je zato intuitivno funkcija rastuća. Ovo vrijedi i bez riječi "intuitivno": derivabilna funkcija f je rastuća na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako funkcija ima pozitivnu derivaciju na tom intervalu. Analogno za padajuću: tamo funkcija mora imati negativnu derivaciju.

Prije nego riješimo jedan primjer, obratite pažnju da funkcija može imati pozitivnu derivaciju na cijeloj domeni, no ne mora biti rastuća (ili obratno). Problem stvaraju točke u kojima funkcija (ili njena derivacija) nije definirana. Npr., za $f(x) = \dfrac{1}{x}$, lagano vidimo da je derivacija na cijeloj domeni negativna. No, ta domena je unija dva intervala $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 0, +\infty\rangle$. Na tim intervalima funkcija jest padajuća, no nije padajuća na cijeloj domeni (pogledajte graf, ili kontraprimjer: $-1 = f(-1) < f(1) = 1$). Zato je u analizi u sljedećim zadatcima bitno obraćati pažnju i na točke u kojima funkcija (ili njena derivacija) nisu definirane.

Primjer 6.6. Odredite intervale monotonosti i lokalne ekstreme sljedećih funkcija:

- (5.1.a)) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$
  Funkcija je definirana na $\mathbb{R}$. Derivacija funkcije je $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$. Da bismo našli stacionarne točke treba naći nultočke ove funkcije. To je kvadratna funkcija kojoj znamo naći nultočke, to su $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. To su i stacionarne točke. Način na koji ćemo odrediti jesu li to ujedno i lokalni ekstremi je preko tablice: nacrtat ćemo shemu kako funkcija f treba izgledati.
  Prvo u tablicu ucrtamo okomite crte za rubove domene (ovdje su to $\pm\infty$) i stacionarne točke. Ako imamo više rubova domene ili izolirane točke u kojima funkcija nije definirana, ili točke u kojima derivacija nije definirana, i te točke bi dobile svoje okomite crte. Zatim nacrtamo dva vodoravna retka, jednu za f' u kojoj ispitujemo predznak derivacija, a drugu za f u kojoj zapisujemo zaključak gornjeg retka (intervali na kojima je funkcija rastuća/padajuća).
  Na kraju tablica izgleda kao na slici. Popunjavamo ju redak po redak: između okomitih crta s oznakama a i b stavljamo znak $+$ ako je f' pozitivna na intervalu $\langle a, b\rangle$. Za to je dovoljno uvrstiti bilo koju točku iz tog intervala, ako nam je račun do sada bio točan. Nakon toga red ispod njega popunjavamo kosim strelicama koje označavaju da f raste odnosno pada. Jednostavno, ako u retku iznad piše plus,

	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
f'	$+$	$-$	$+$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

stavljamo $\nearrow$, a ako piše minus stavljamo $\searrow$.
Sada možemo argumentirati jesu li stacionarne točke ujedno i lokalni ekstremi. Budući da funkcija lijevo od -2 raste, a desno od -2 pada, zaključujemo da je -2 točka lokalnog maksimuma, te iznosi $f(-2) = 25$. Budući da funkcija lijevo od 1 pada, a desno od 1 raste, zaključujemo da je 1 točka lokalnog minimuma, te iznosi $f(1) = -2$. (Zapamtite zadnje dvije rečenice, njih ćemo stalno pisati kao zaključak i argumentaciju da stacionarne točke ujedno i jesu lokalni ekstremi).
Intervale monotonosti čitamo direktno iz tablice: funkcija raste na intervalima $\langle -\infty, -2\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$, a pada na intervalu $\langle -2, 1\rangle$.
Napomenimo da je i prošla rečenica također karakteristična za ovakve zadatke i treba je napisati na kraju ovakvog tipa zadatka (recimo na kolokviju). Također, napomenimo da iako iz tablice ne možemo zaključiti, točke -2 i 1 su samo lokalni, a ne i globalni ekstremi (pogledajte graf funkcije).
Napomena: Da je u tablici recimo bilo umjesto niza znakova $+, -, +$ bilo $+, +, -$, budući da je funkcija u -2 definirana, mogli bismo "spojiti intervale" te reći da je funkcija f rastuća na $\langle -\infty, 1\rangle$. Tu je bitno da je funkcija f definirana u 2, sjetite se kontraprimjera $f(x) = 1/x$.
Također, jako je bitno da brojeve u tablicu postavljamo po redu, inače ona nema mnogo smisla. Pazite na redoslijed, pogotovo kod "ružnih" brojeva (racionalni, ili čak iracionalni).

- (5.1.c)) $f(x) = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$ Ponovno primjenjujemo istu šablonu: prvo određujemo domenu funkcije, pa derivaciju i njene nultočke, zatim tablicu, pa zaključak.

  Domena je $\mathbb{R}$. Derivacija: $f'(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3x^2} = \dfrac{x^2-1}{3x^2}$. Nultočke derivacije su ± 1, to su stacionarne točke No, u $x = 0$ derivacija nije definirana, pa i tu točku ubacujemo u tablicu.

	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f'	$+$	$-$	$-$	$+$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Budući da funkcija lijevo od -1 raste, a desno od -1 pada, zaključujemo da je -1 točka lokalnog maksimuma, te iznosi $f(-1) = \frac{2}{3}$. Budući da funkcija lijevo od 1 pada, a desno od 1 raste, zaključujemo da je 1 točka lokalnog minimuma, te iznosi $f(1) = \frac{-2}{3}$. Točka $x = 0$ nije stacionarna točka, pa ju ne provjeravamo.
Funkcija f raste na intervalima $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$. Kako je f definirana u $x = 0$ i kako na intervalima $\langle -1, 0\rangle$ i $\langle 0, 1\rangle$ pada, pada i na intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

Zadatak 6.7. (5.1.d)) Odredite intervale monotonosti i lokalne ekstreme funkcije $f(x) = \frac{\ln x}{x} e^{-\ln^2 x}$.

Slijedi puno zadataka s riječima koji su tradicionalno teški studentima. Kao i uvijek, zajedno ćemo riješiti nekoliko primjera, a neke zadatke ćete riješiti sami. Obratite pažnju na upute na kraju poglavlja. Zaista pokušajte zadatke riješiti samo prije nego se konzultirate s uputama, jedino tako ćete postati bolji u rješavanju ovakvih zadataka.

Primjer 6.8. Broj 2 prikažite u obliku umnoška dvaju pozitivnih realnih brojeva kojima je zbroj kvadrata minimalan.
Prvo pogledajmo što se traži od nas u zadatku: treba naći realne $a, b > 0$ takve da je $a \cdot b = 2$, a $a^2 + b^2$ minimalno. Vidimo izraz kojem treba naći ekstrem: to je zbroj kvadrata brojeva a, b. Prije toga problem treba zapisati pomoću jedne varijable, jer to je jedini način na koji za sada znamo tražiti ekstreme izraza. Najlakše je to koristeći da je jedna od varijabli upravo x, a drugu izrazimo preko nje koristeći da im je umnožak jednak 2. Dakle: $x := a$, $b = 2/a = 2/x$. Sada treba minimizirati funkciju $F(x) = x^2 + \dfrac{4}{x^2}$.
Obratimo pažnju na to da funkciji F domena nije cijeli $\mathbb{R}$. Tradicionalno, domenu zajedno određuju uvjeti zadatka i prirodna domena funkcije F. Iz prvog razloga treba uzeti $x > 0$, dok prirodna domena nalaže $x \neq 0$. Presjek tih uvjeta je $x > 0$, odnosno domena funkcije je $\langle 0, \infty \rangle$.
Sada možemo rješavati zadatak kao do sada: derivacija funkcije je

$$F'(x) = 2x - \frac{8}{x^3} = \frac{2x^4 - 8}{x^3} = \frac{2(x^2+2)(x^2-2)}{x^3}.$$

Jedine realne nultočke su $x = \pm\sqrt{2}$, no kako zbog domene tražimo samo pozitivne brojeve x, jedina stacionarna točka je $x_1 = \sqrt{2}$. Crtamo tablicu i pazimo na domenu:

	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
F'	$-$	$+$	
F	$\searrow$	$\nearrow$	

Sada iz tablice ovako zaključujemo: budući da funkcija pada na cijeloj domeni lijevo od $\sqrt{2}$, a raste na cijeloj domeni desno od $\sqrt{2}$, zaključujemo da funkcija F u svim točkama ima vrijednost veću ili jednaku od one koju postiže u $\sqrt{2}$, odnosno u njoj postiže minimum.
Vratimo se na zadatak i na ono što nas se pita: dva pozitivna realna broja koja u umnošku daju 2, a imaju minimalan zbroj kvadrata su $\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$.

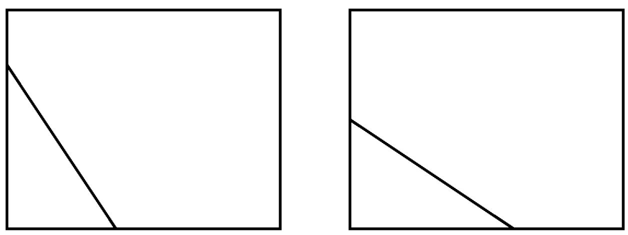
Napomena 6.9. Izvucimo iz ovog rješenja neke zaključke za ostale zadatke:

- Ovakav uzorak može se primijeniti u većini zadataka. Prvo pokušamo matematički zapisati uvjete zadatka, moguće i preko više varijabli od jedne. Zatim sve izrazimo sve preko jednog parametra (ovdje smo sve izrazili preko jedne od dviju varijabli koje u umnošku daju 2). Pazimo na ono što je uvjet u zadatku, a što se minimizira/maksimizira. Kada smo dobili funkciju F, određujemo joj domenu, a zatim pristupamo kao i prije: deriviramo, tražimo stacionarne točke, crtamo tablicu. Nakon toga (najčešće) izvodimo zaključak zašto je ta stacionarna točka ujedno i traženi globalni ekstrem, a zatim zapisujemo zaključak i za cijeli zadatak.

- Kada svedemo zadatak na neku funkciju F, ne zaboravite sve argumentirati kao i prije. Neke od čestih grešaka su zaboraviti reći što je domena funkcije F, te izostanak argumentacije zašto je stacionarna točka globalni ekstrem.
- Na domenu funkcije F uvijek utječu dva faktora: uvjeti u zadatku i prirodna domena funkcije F. Uzimamo presjek ta dva uvjeta, no najčešće je to samo posljedica uvjeta u zadatku. Primijetite, da smo u gornjem primjeru zaboravili smanjiti domenu na pozitivne realne brojeve, tablica bi bila veća i bilo bi teže donijeti zaključak o globalnom minimumu.
- Argumentaciju zašto je neka stacionarna točka ujedno i globalni ekstrem u većini slučajeva samo ćemo "copy-pasteati" iz gornjeg primjera. Razlog tome je što u većini slučajeva u ovakvim zadatcima tablica će izgledati vrlo slično: imat ćemo samo tri okomite crte (dva ruba intervala i jednu stacionarnu točku), a F' će na jednom intervalu biti pozitivna, a na drugom negativna.
- Ne zaboravite napisati neku rečenicu (ili barem par riječi) zaključka na kraju zadatka koji nisu izraženi u terminu funkcije F. Kada netko pročita zadatak, nije ga briga to što neka funkcija F koja nije ni definirana u tekstu zadatka ima minimum u $\sqrt{2}$. Zanima ga koja su to dva broja koja pomnožena daju dva, a imaju minimalan zbroj kvadrata.

Riješimo zajedno još jedan primjer.

Primjer 6.10. (5.5.) Od pravokutne ploče sa stranicama $a = 4$ i $b = 5$ odlomljen je trokut sa stranicama $c = 2$ i $d = 3$. Iz preostalog dijela treba izrezati novu pravokutnu ploču maksimalne površine. Odredite tu površinu.
Prvi problem u zadatku je taj što, nakon što počnemo crtati zadatak, nije jasno na koji je način trokut odlomljen iz kuta ploče. To je moguće načiniti na dva načina (vidjeti sliku).



(Naravno, svi ostali slučajevi u kojima je odlomljen neki drugi vrh analogni su ovom zbog rotacije cijele slike). Pokazat će se da u tim slučajevima dobivamo drugačija rješenja.

Riješit ćemo lijevi primjer, a vi pokušajte sami desni.
U oba slučaja tražimo pravokutnik maksimalne površine koji se nalazi unutar novodobivenog lika. Možemo zaključiti da taj maksimalni pravokutnik ima stranice paralelne sa stranicama originalnog pravokutnika i da mu se dvije poklapaju s donjom i lijevom stranicom. Također, možemo zaključiti da mu se jedan vrh nalazi na kosoj stranici trokuta. Jedino je pitanje gdje se točno na toj kosoj stranici nalazi taj vrh pravokutnika. To je upravo ono što ćemo modelirati - za svaku točku kose stranice trokuta odredit ćemo kolika je površina pravokutnika kojom je to jedan vrh (a dvije stranice leže na donjoj i lijevoj stranici velikog pravokutnika). Među svim tim izračunatim površinama uzet ćemo najveću.
Najlakši način kako to napraviti je smjestiti stvari u koordinatnu ravninu: neka pravokutnik ima vrhove s koordinatama $(0,0),(5,0),(5,4),(0,4)$. Kosa stranica trokuta je dužina koja spaja vrhove $(2,0)$ i $(0,3)$. Svaka točka koja leži na toj dužini leži i na pravcu koji prolazi kroz te dvije točke, odnosno na pravcu $x/2+y/3=1$. Ipak, nije istina da su sve točke s pravca ujedno i točke s dužine. Treba još staviti neke uvjete, primjerice $0 \leq x \leq 2$ ili $0 \leq y \leq 3$. Točka na toj dužini s koordinatama (x_0, y_0) određuje pravokutnik duljina dužina $5-x_0$ i $4-y_0$. Dakle, treba maksimizirati izraz $(5-x_0)(4-y_0)$ za točke (x_0, y_0) koje se nalaze na pravcu $x/2+y/3=1$, uz uvjet $0 \leq x \leq 2$ ili $0 \leq y \leq 3$. Sada ovaj problem treba zapisati pomoću jedne varijable. To možemo pomoću samo x_0 ili samo y_0. Napravit ćemo koristeći x_0. Iz jednadžbe pravca izražavamo $y_0 = 3 - \frac{3x_0}{2}$, i uvrštavamo u površinu. Dobivamo da treba maksimizirati funkciju

$$F(x) = (5-x)(4-3+\frac{x}{2}) = (5-x)(1+\frac{3x}{2}).$$

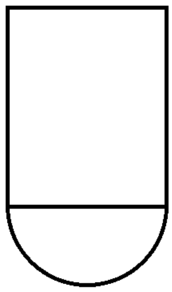
Njena domena je određena s $0 \leq x \leq 2$ (funkcija F nema drugih zahtjeva što se tiče prirodne domene). Derivacija funkcije je $F'(x) = \frac{13}{2} - 3x$, a jedina nultočka je $x_1 = \frac{13}{6}$. No, ta točka se ne nalazi u domeni funkcije F, jer je veća od 2. Dakle, na domeni $[0,2]$ funkcija $F'(x) = \frac{13}{2} - 3x$ ima pozitivan predznak, što znači da $F(x)$ raste i da je njezin maksimum u desnom rubu domene i iznosi $F(2) = 12$.
Konačno, pravokutnik najveće površine koje se može upisati u ovakvu odlomljenu ploču ima površinu 12.
Primijetimo da ovdje nismo trebali tablicu (tj. mogli smo samo napraviti tablicu u kojoj imamo dvije okomite crte za rubove domene $x=0$ i $x=2$ sa samo jednim stupcem). Ovo je jedan od rijetkih ovakvih primjera.

Zadatak 6.11. Riješite gornji zadatak za slučaj u kojem je trokut drugačije odlomljen iz kuta.

Zadatak 6.12. (5.3.) U prvi kvadrant elipse $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$ upišite pravokutnik maksimalne površine. Odredite mu stranice.

Zadatak 6.13. (5.4.) Iz kvadratne limene ploče stranice duljine 3 izrežu se kutovi (tj. kod svakog vrha izrežu se ukupno 4 manja sukladna kvadrata) tako da se od ostalog komada može napraviti kvadratna kutija (bez poklopca) maksimalnog volumena. Odredite taj volumen.

Primjer 6.14. (5.6.) Presjek kanala za dovod vode ima oblik pravokutnika s polukrugom. Ako je površina presjeka kanala jednaka 1, izračunajte polumjer polukruga tako da troškovi izgradnje budu što manji (troškovi su proporcionalni opsegu presjeka).
Ovaj zadatak ne bi trebao biti težak, samo je zapisan na pomalo kompliciran način. Kao prvo, ne treba se fokusirati na cijeli kanal - za potrebe zadatka treba nam samo njegov presjek (i zapravo, briga nas što je to uopće kanal). Fokusiramo se na njegov oblik: pravokutnik s polukrugom (kao na slici).



Neka taj pravokutnik ima stranice duljina a (vodoravna stranica) i b. Tada polukrug na dnu ima promjer također duljine a, odnosno radijusa $r = \frac{a}{2}$. Odsad ćemo a izražavati preko r. Površina takvog lika je zbroj površina pravokutnika i polukruga te iznosi $2rb + \frac{1}{2}r^2\pi$. Opseg iznosi $2r + 2b + r\pi$.
Vratimo se na zadatak: znamo da je površina lika jednaka 1, a treba odrediti podatke tako da je su troškovi što manji. Budući da su troškovi proporcionalni opsegu, u stvari treba minimizirati opseg. Kako znamo koliko površina točno iznosi, time ćemo moći jedan od podataka r, b izraziti jedan preko drugog i uvrstiti u izraz za opseg koji ćemo minimizirati. Jednostavnije je izraziti b preko r. Dakle, imamo

$$2rb + \frac{1}{2}r^2\pi = 1 \implies b = \frac{1}{2r} - \frac{r}{4}\pi,$$

pa naša funkcija (uz $x = r$) kojoj tražimo minimium iznosi

$$F(x) = 2r + 2\left(\frac{1}{2r} - \frac{r}{4}\pi\right) + r\pi = \frac{1}{x} + \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)x.$$

Za domenu: jedino je bitno da su sve mjere pravokutnika i polukruga pozitivni realni brojevi, odnosno da je $x = r > 0$ (pa je onda i $a = 2r > 0$) i $b = \frac{1}{2x} - \frac{x}{4}\pi > 0$. Iz druge nejednakosti dobivamo uvjet $x < \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Dakle, domena od F je $\langle 0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\rangle$.
Deriviramo F: $F'(x) = \frac{-1}{x^2} + \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\left(2+\frac{\pi}{2}\right)x^2-1}{x^2}$. Kvadratna jednadžba u brojniku je dosta ružna. Ima dva rješenja suprotnog predznaka, pa gledamo samo pozitivno: $x_0 := \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)^{-1/2}$. Ta točka doista leži u domeni - lako vidimo da je pozitivna, a nejednakost

$\left(2+\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2} < \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ je ekvivalentna (nakon što dignemo na $-1/2$) s $2+\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2}$.

	0		$\left(2+\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2}$		$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$
F'		$-$		$+$	
F		$\searrow$		$\nearrow$	

Budući da funkcija pada na cijeloj domeni lijevo od x_0, a raste na cijeloj domeni desno od x_0, zaključujemo da funkcija F u svim točkama ima vrijednost veću ili jednaku od one koju postiže u x_0, odnosno u njoj postiže minimum.

Vraćamo se zadatak: traženi polumjer polukruga je jednak upravo $x_0 = \left(2+\frac{\pi}{2}\right)^{-1/2} \approx 0.53$.

Primjer 6.15. (5.7.) Čamac je udaljen od najbliže točke A na obali 9 km. Čovjek u čamcu mora što hitnije stići u mjesto udaljeno 15 km duž obale od točke A. Ako vesla brzinom od 4 km/h, a pješači brzinom od 5 km/h, gdje se čovjek mora iskrcati da bi stigao što prije u mjesto?
Kao prvo, nacrtajmo prvo "kartu".

Točka C (gdje se čovjek nalazi na početku) na moru/jezeru udaljena je od točke A na udaljenosti 9 km, a A i cilj B na obali udaljeni su 15 km. Čovjek želi što prije doći na cilj B. Jedna opcija je da vesla cijelim putem - tada bi udaljenost $|CB| = \sqrt{9^2+15^2}$ prelazio brzinom od 4 km/h. Kako brže hoda nego vesla, možda to nije najbolja ideja. Druga opcija je da vesla do najbliže točke A, a zatim pješači od A do B. Tako će iskoristiti što brže hoda nego vesla, no možda će prevaliti prevelik put.
Optimalno je zato nešto između: da se iskrca u nekoj točki D između točaka A i B, te da do nje (pravocrtno) vesla, a zatim hoda od D do B. Neka je točka D udaljena za d od točke A, tada je udaljena za $15-d$ od točke B. Koristeći formulu iz fizike $v = \frac{s}{t}$, računamo da vrijeme koje će čovjek provesti veslajući od C do D iznosi $\frac{|CD|}{4} = \frac{\sqrt{d^2+9^2}}{4}$, a pješačeći $\frac{|BD|}{5} = \frac{15-d}{5}$. Ukupno vrijeme je zbroj tih dvaju vremena.
Uspjeli smo izraziti sve preko jednog parametra d. Njega koristimo kao varijablu x, a

zbroj gore izračunatih vremena koristimo kao funkciju

$$F(x) = \frac{\sqrt{x^2+81}}{4} + \frac{15-x}{5}$$

kojoj treba naći minimum. Prirodna domena funkcije je $\mathbb{R}$, no zbog problema koji modeliramo, jasno je da se točka D mora naći između točaka A i B. Ako je lijevo od točke A, tada je sigurno bolje da se samo iskrcamo čamcem u A pa da dalje hodamo. Ako je desno od točke B, opet je bolje da se iskrcamo u točki B (dapače, tada treba promijeniti i izgled funkcije budući da je $15-x$ negativna udaljenost). Dakle, vrijedi $x \in [0, 15]$. Deriviramo: $F'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2+81}} - \frac{1}{5}$. Derivacija ima nultočku za x_0 za koji je $4\sqrt{x_0^2+81} = 5x_0$. Kvadriranjem dobivamo $16x_0^2 + 64 \cdot 81 = 25x_0^2$, što vodi na $64 \cdot 81 = 9x_0^2$, odakle je $x_0 = \pm 12$. Kako smo odbacili negativne brojeve u domeni funkcije F, imamo samo jednu stacionarnu točku $x_0 = 12$ (u što se uvjerimo uvrštavanjem u izraz za derivaciju). Sada možemo napraviti tablicu:

	0	12	15
F'	$-$	$+$	
F	$\searrow$	$\nearrow$	

Budući da funkcija pada na cijeloj domeni lijevo od 12, a raste na cijeloj domeni desno od 12, zaključujemo da funkcija F u svim točkama ima vrijednost veću ili jednaku od one koju postiže u 12, odnosno u njoj postiže minimum.
Zato je odgovor: čovjek se treba iskrcati na mjesto na obali koje je udaljeno 12 km od mjesta A (te 3 km od mjesta B).

Primjer 6.16. (Popravni kolokvij 2017.) Odredite točku na paraboli $y = 1 - x^2$ s pozitivnom x-koordinatom kroz koju tangenta zajedno s koordinatnim osima tvori trokut minimalne površine.
Ovo je primjer zadatka u kojem koristimo znanja i iz prošle lekcije. Treba odrediti neku točku na paraboli - ona ima koordinate $(x_0, 1 - x_0^2)$. Budući da ima pozitivnu x-koordinatu: $x_0 > 0$. Na kraju zadatka treba odrediti kada je površina nekog trokuta minimalna. Izrazit ćemo površinu tog trokuta preko x_0. Dvije njegove stranice leže na koordintnim osima što nam olakšava račun njegove površine: treba odrediti duljine kateta (što su duljine odsječaka na koordinatnim osima), te ih pomnožiti i podijeliti s 2. Dakle, odredimo tangentu i točke u kojima ona siječe koordinatne osi.
Tangentu određujemo tako da prvo određujemo derivaciju funkcije $f(x) = 1 - x^2$: $f'(x) = -2x$. Tangenta je sada

$$y - (1 - x_0^2) = -2x_0(x - x_0).$$

Trebamo odrediti točke u kojima tangenta siječe koordinatne osi. U gornju jednadžbu pravca uvrštavamo prvo $y = 0$, a zatim $x = 0$. Dobivamo da tangenta siječe apscisu u točki $\left(\dfrac{1+x_0^2}{2x_0}, 0\right)$, a ordinatu u točki $(0, 1+x_0^2)$. Površina trokuta je sada jednaka

$$\frac{1}{2}\left|\frac{1+x_0^2}{2x_0}\right| \cdot |1+x_0^2| = \frac{(1+x_0^2)^2}{4x_0},$$

jer je $x_0 > 0$.
Izrazili smo površinu trokuta preko x_0. Sada možemo riješiti problem minimizacije: za x (koji ima ulogu x_0) treba naći globalni minimum funkcije $F : \langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{(1+x^2)^2}{4x}$ (domena su svi pozitivni brojevi jer je tako rečeno u zadatku i jer F ima doista sve pozitivne brojeve u svojoj prirodnoj domeni).
$F'(x) = \frac{(1+x^2)(3x^2-1)}{4x^2}$. Jedini faktor koji mijenja predznak za $x > 0$ je $3x^2 - 1$, koji je jednak nula za $x = \sqrt{3}/3$ (odgovarajuće rješenje s minus predznakom odbaucujemo zbog domene). To je i jedina stacionarna točka. Tablica sada izgleda ovako:

	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
F'		$-$		$+$	
F		$\searrow$		$\nearrow$	

Kao i prije, rješenje opravdavamo rečenicom: budući da funkcija pada na cijeloj domeni lijevo od $\sqrt{3}/3$, a raste na cijeloj domeni desno od $\sqrt{3}/3$, zaključujemo da funkcija F u svim točkama ima vrijednost veću ili jednaku od one koju postiže u $\sqrt{3}/3$, odnosno u njoj postiže minimum.
Vraćamo se zadatak: tražena točka na paraboli je zato ona u kojoj je $x_0 = \sqrt{3}/3$, odnosno radi se o točki $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

Napomena 6.17. Slučajno se dogodilo da smo zajedno riješili sve primjere u kojima se treba nešto minimizirati. Jasno je da ako treba nešto maksimizirati, očekujemo da ćemo u tablici u zadnjem redu htjeti imati niz $\nearrow$, $\searrow$ umjesto $\searrow$, $\nearrow$ kao do sada.

Zadatak 6.18. (5.8.) Odredite točku D iz prvog kvadranta tako da tangenta na krivulju $y = e^{-x}$ u točki D (koja priprada toj krivulji) s koordinatnim osima zatvara trokut maksimalne površine.

Zadatak 6.19. (5.9.) Odredite tangentu na kružnicu $x^2 + y^2 = 2$ s diralištem u prvom kvadrantu tako da udaljenost između sjecišta te tangente i koordinatnih osi bude minimalna.

Budući da smo prošli sve zadatke s materijala na webu, ukoliko imate osjećaj da vam treba još primjera pokušajte riješiti i neke zadatke sa starih kolokvija.

Također, napomenimo da sljedeću lekciju s weba (Brzina i akceleracija) preskačemo. Sljedeća lekcija će biti Tok funkcije.

Upute za neke zadatke za samostalno rješavanje

Zadatak 6.7 Obratite pažnju na domenu. Zato najlijevija okomita crta u tablici nije označena s $-\infty$ nego s 0.

Zadatak 6.11 Rješenje je analogno primjeru prije zadatka. Sada se maksimum neće postizati u rubu, nego ćemo dobiti neku stacionarnu točku u domeni.

Zadatak 6.12 Pravokutnik je maksimalne površine ako mu se jedan vrh nalazi u ishodištu, nasuprotni na elipsi, te su mu stranice paralelne s osima. Za tu točku na elipsi u prvom kvadrantu izrazite jednu koordinatu preko druge te izračunajte površinu pravokutnika u tom slučaju. Maksimizirajte tu površinu.

Zadatak 6.13 Neka su iz kutova odrezani sukladni kvadrati stranice duljine t. Tada ćemo kutiju formirati presavijajući četiri kraka lima prema gore. Baza kutije je kvadrat stranice duljine $3-2t$, a visina kutije je t. Dakle, treba naći maksimum izraza $(3-2t)^2t$.

Zadatak 6.18 U točki $D(x_0, e^{-x_0})$ povlačimo tangentu s jednadžbom $y - e^{-x_0} = -e^{-x_0}(x - x_0)$. Ona ima siječe osi u $(0, -e^{-x_0}(1+x_0))$ i $(1+x_0, 0)$. Umnožak netrivijalnih koordinata podijeljen s 2 je površina traženog pravokutnog trokuta.

Zadatak 6.19 Implicitnim deriviranjem jednadžbe kružnice dobivamo $y' = -x/y$, odnosno za točku (x_0, y_0) u prvom kvadrantu na kružnici $x^2+y^2=2$ tangenta ima jednadžbu $y - y_0 = \frac{-x_0}{y_0}(x - x_0)$. Ona odsijeca osi u točkama s koordinatama $(0, \frac{x_0^2+y_0^2}{y_0})$ i $(\frac{x_0^2+y_0^2}{x_0}, 0)$, odnosno $(0, \frac{2}{y_0})$ i $(\frac{2}{x_0}, 0)$. Treba naći minimum izraza $\sqrt{\frac{4}{x_0^2}+\frac{4}{y_0^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{x_0y_0}$, što je isto kao naći maksimum izraza x_0y_0.
Dalje možemo ili izraziti jednu koordinatu preko druge iz jednadžbe kružnice, ili koristiti parametrizaciju kružnice $(x, y) = (\sqrt{2}\cos\phi, \sqrt{2}\sin\phi)$, te izraziti sve kao funkciju od $x = \phi$.

Rješenja zadataka za samostalno rješavanje

Rješenje zadatka 6.7:

Zbog logaritamske funkcije u definiciji funkcije f, domena funkcije bit će $\langle 0, +\infty\rangle$. Derivirajmo funkciju da bismo našli stacionarne točke.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1-\ln x}{x^2}e^{-\ln^2 x} + \frac{\ln x}{x}e^{-\ln^2 x} \cdot \frac{-2\ln x}{x} = \\ &= \frac{e^{-\ln^2 x}}{x^2} \cdot (1 - \ln x - 2\ln^2 x). \end{aligned}$$

Nultočke od f' sada su evidentno rješenja jednadžbe

$$1 - \ln x - 2\ln^2 x = 0.$$

Supstitucijom $t = \ln x$, te rješavanjem kvadratne jednadžbe po t dobijemo rješenja $t = -1$ i $t = \frac{1}{2}$, odnosno $x = \frac{1}{e}$ i $x = \sqrt{e}$. Uz opservaciju da je i derivacija od f definirana na $\langle 0, +\infty\rangle$, imamo sve spremno za tablicu.

	0	$\frac{1}{e}$	$\sqrt{e}$	$+\infty$
f'	$-$	$+$	$-$	
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

Budući da funkcija lijevo od $\frac{1}{e}$ pada, a desno raste, zaključujemo da je $x = \frac{1}{e}$ točka lokalnog minimuma koji iznosi $f\left(\frac{1}{e}\right) = -1$. Slično, zbog činjenice da funkcija lijevo od $\sqrt{e}$ raste, a desno pada, zaključujemo da je $x = \sqrt{e}$ točka lokalnog maksimuma koji iznosi $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}}$.
Funkcija raste na intervalu $\langle \frac{1}{e}, \sqrt{e}\rangle$, a pada na intervalima $\langle 0, \frac{1}{e}\rangle$ i $\langle \sqrt{e}, +\infty\rangle$.

Rješenje zadatka 6.11:

Zaključujemo analogno kao u riješenom primjeru, te smjestimo na isti način pravokutnik u koordinatnu ravninu: neka vrhovi imaju koordinate $(0,0), (5,0), (5,4), (0,4)$. Kosa stranica trokuta je dužina koja spaja točke $(3,0)$ i $(0,2)$. Svaka točka koja leži na toj dužini leži i na pravcu koji prolazi kroz te dvije točke, odnosno na pravcu $x/3 + y/2 = 1$. Dio tog pravca za koji je $0 \leq x \leq 3$ definira upravo tu dužinu. Točka na dužini s koordinatama (x_0, y_0) određuje pravokutnik duljina stranica $5 - x_0$ i $4 - y_0$. Dakle, treba maksimizirati izraz $(5 - x_0)(4 - y_0)$ za točke (x_0, y_0) koje se nalaze na pravcu $x/3 + y/2 = 1$, uz uvjet $0 \leq x \leq 3$. Izrazimo iz jednadžbe pravca $y = 2 - \frac{2}{3}x$, te dobivamo sljedeći problem:
Treba maksimizirati funkciju

$$F(x) = (5-x)(4 - 2 + \frac{2x}{3}) = (5-x)(2 + \frac{2x}{3}).$$

na segmentu $[0, 3]$ (funkcija F nema drugih zahtjeva što se tiče prirodne domene).

Derivacija funkcije je $F'(x) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x$, a jedina njena nultočka je $x_1 = 1$, te se ona nalazi unutar promatranog segmenta $[0, 3]$. Trivijalno se vidi da na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ F' ima pozitivan predznak, dakle funkcija F (strogo) raste, a na intervalu $\langle 1, 3\rangle$ funkcija F' ima negativan predznak, dakle funkcija F (strogo) pada . Zaključujemo da na intervalu $\langle 0, 3\rangle$ funkcija F postiže maksimum u točki $x = 1$ iznosa $F(1) = \frac{32}{3}$. Budući da promatramo F na segmentu $[0, 3]$ (primijetite da smo zasad argumentirali samo točke iz **otvorenog** intervala), treba još provjeriti vrijednosti funkcije F u rubnim točkama, tj. $F(0) = 10$ i $F(3) = 8$. Obje su manje od vrijednosti $F(1) = \frac{32}{3}$.
Konačno, pravokutnik najveće površine koje se može upisati u ovakvu odlomljenu ploču ima površinu $\frac{32}{3}$.

Rješenje zadatka 6.12:

Pravokutnik je maksimalne površine ako mu se jedan vrh nalazi u ishodištu, nasuprotni na elipsi, te su mu stranice paralelne s koordinatnim osima. Neka je (x_0, y_0) vrh pravokutnika koji se nalazi na elipsi. Tada preostali vrhovi imaju koordinate: $(0, 0), (x_0, 0)$ i $(0, y_0)$. Takav pravokutnik ima površinu jednaku $x_0 y_0$, te je to izraz koji treba maksimizirati. Iz uvjeta da se točka (x_0, y_0) nalazi na dijelu elipse u prvom kvadrantu, dobivamo uvjet $0 \le x_0 \le \sqrt{18}$ i $0 \le y_0 \le \sqrt{2}$. Ako izrazimo varijablu y iz jednadžbe elipse, dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{y_0^2}{2} &= 1 - \frac{x_0^2}{18} \\ y_0^2 &= 2 - \frac{x_0^2}{9} \\ y_0 &= \sqrt{2 - \frac{x_0^2}{9}}. \end{aligned}$$

Primijetite da prilikom uzimanja drugog korijena (prijelaz iz 2. u 3. jednakost), uzimamo predznak plus, jer se cijela priča odvija u 1. kvadrantu. Konačno, dobivamo sljedeći problem:
Treba maksimizirati funkciju $F(x) = x\sqrt{2 - \frac{x^2}{9}}$ na segmentu $[0, \sqrt{18}]$. Odnosno, možemo promatrati interval $\langle 0, \sqrt{18}\rangle$, budući da je u rubnim točkama vrijednost funkcije F jednaka nuli, što evidentno neće biti maksimum (zašto?). No, možemo još malo pojednostavniti. Prilikom deriviranja funkcije F stvari će se malo komplicirati zbog korijena koji se javlja. Možemo funkciju F malo transformirati, tako da ubacimo x ispod korijena,

$$F(x) = \sqrt{2x^2 - \frac{x^4}{9}}.$$

Ideja je da zapravo prilikom traženja maksimuma funkcije F možemo zanemariti korijen, jer će se maksimum postići u istoj točki kao i maksimum funkcije

$$F_1(x) = 2x^2 - \frac{x^4}{9}.$$

Razlog: $\sqrt{x}$ je rastuća funkcija.
Konačno, sveli smo problem na maksimiziranje funkcije $F_1(x)$ na intervalu $\langle 0, \sqrt{18}\rangle$. Računamo

$$F_1'(x) = 4x - \frac{4}{9}x^3 = 4x(1 - \frac{x^2}{9}).$$

Jedina nultočka na promatranom intervalu je $x_1 = 3$. Standardna tablica (uvjerite se sami) daje: funkcija F_1 raste na intervalu $\langle 0, 3\rangle$, a pada na intervalu $\langle 3, \sqrt{18}\rangle$. Zaključujemo da se u točki $x = 3$ postiže maksimum funkcije F_1, a onda i funkcije F, i taj maksimum iznosi $F(3) = 3$. Dakle, od svih pravokutnika upisanih elipsi u 1. kvadrantu, najveću površinu ima onaj stranica $x_0 = 3$ i $y_0 = 1$, i ta površina iznosi 3.

Rješenje zadatka 6.13:

Ako iz limene ploče izrežemo kutne kvadrate stranice duljine x, tada odgovarajuća kutija ima za bazu kvadrat stranice duljine $3 - 2x$, a visina joj je x. Izraz koji treba maksimizirati je $x(3 - 2x)^2$. Od uvjeta, jedino na što moramo paziti je da kvadrati koje režemo iz kuteva ploča moraju imati duljinu stranice manje od $\frac{3}{2}$, jer toliko maksimalno "imamo mjesta". Dakle, treba maksimizirati funkciju

$$F(x) = x(3 - 2x)^2$$

na intervalu $\langle 0, \frac{3}{2}\rangle$. (Zašto ne treba promatrati rubne točke?). Derivirajmo i potražimo stacionarne točke:

$$f'(x) = (3 - 2x)^2 - 4x(3 - 2x) = 12x^2 - 24x + 9 = 12(x - 1)^2 - 3 = 3(2x - 3)(2x - 1).$$

Derivacija je kvadratna funkcija s nultočkama $x_1 = \frac{1}{2}$ i $x_2 = \frac{3}{2}$ i pozitivnim vodećim koeficijentom, pa možemo zaključiti da je pozitivna na (sjetite se, promatramo samo interval $\langle 0, \frac{3}{2}\rangle$) intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$, dakle na tom intervalu f strogo raste; a negativna na intervalu $\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\rangle$, pa na tom intervalu f strogo pada. Maksimum funkcija f stoga poprima u točki $x = \frac{1}{2}$, i on iznosi 2. To je traženi volumen.

Rješenje zadatka 6.18:

Neka je su (x_0, y_0) koordinate tražene točke D. Budući da se D nalazi na krivulji $y = e^{-x}$, vrijedi $y_0 = e^{-x_0}$, odnosno koordinate točke D su (x_0, e^{-x_0}). Odredimo tangentu na krivulju $y = e^{-x}$ u točki D. Koeficijent smjera tangente je zapravo vrijednost derivacije u točki x_0, dakle

$$y'(x_0) = -e^{-x_0}.$$

Jednadžba pravca kroz jednu točku daje traženu tangentu,

$$y - e^{-x_0} = -e^{-x_0}(x - x_0) \Leftrightarrow y = -e^{-x_0}x + e^{-x_0}(1 + x_0).$$

Presjek tog pravca s koordinatnim osima dat će nam preostala dva vrha traženog trokuta (treći je ishodište). Tražimo dakle presjek gornje tangente s pravcima:

- $x = 0$ (y-os):
  Uvrštavanjem $x = 0$ u jednadžbu tangente dobivamo $y = e^{-x_0}(1 + x_0)$, pa je jedan vrh trokuta $(0, e^{-x_0}(1 + x_0))$.
- $y = 0$ (x-os):
  Uvrštavanjem $x = 0$ u jednadžbu tangente dobivamo $x = 1 + x_0$, pa je drugi vrh trokuta $(1 + x_0, 0)$.

Površina trokuta dana je s

$$\frac{1}{2} \cdot e^{-x_0}(1 + x_0) \cdot (1 + x_0) = \frac{1}{2} \cdot e^{-x_0}(1 + x_0)^2,$$

i to je funkcija koju treba maksimizirati. Od uvjeta imamo jedino lokaciju točke D, 1. kvadrant. Zato je jedini uvjet $x_0 > 0$. Definirajmo

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{-x}(1 + x)^2,$$

te nađimo prvu derivaciju.

$$F'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}(1 + x)^2 + \frac{1}{2}e^{-x} \cdot 2(1 + x) = \frac{1}{2}e^{-x}(1 + x)(1 - x).$$

Ona ima samo jednu nultočku (koja se nalazi u promatranom intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$), a to je $x_1 = 1$. Na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ vrijedi $F'(x) > 0$, pa F (strogo) raste, a na intervalu $\langle 1, +\infty\rangle$ vrijedi $F'(x) < 0$, pa F (strogo) pada. Zaključujemo da se maksimum postiže u točki $x = 1$ i iznosi $F(1) = \frac{2}{e}$, i to je tražena površina.

Rješenje zadatka 6.19:
Derivirajmo implicitno jednadžbu kružnice, dobivamo

$$2xx + 2yy' = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

Ako sa $D(x_0, x_0)$ označimo diralište tangente s kružnicom, tada će (iz implicitne derivacije) koeficijent smjera te tangente biti $y'(x_0) = \frac{-x_0}{y_0}$, pa će njena jednadžba biti

$$y - y_0 = \frac{-x_0}{y_0}(x - x_0).$$

Presječne točke s osima:

- s x-osi:
  uvrstimo $y = 0$ u jednadžbu tangente, slijedi

  $$x = \frac{y_0^2}{x_0} + x_0 = \frac{y_0^2 + x_0^2}{x_0} = \frac{2}{x_0},$$

  pa dobivamo točku $(\frac{2}{x_0}, 0)$.

- s y-osi:
  uvrstimo $x = 0$ u jednadžbu tangente, slijedi

  $$y = \frac{x_0^2}{y_0} + y_0 = \frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0} = \frac{2}{y_0},$$

  pa dobivamo točku $(0, \frac{2}{y_0})$.

Udaljenost tih točaka dana je s

$$\sqrt{\left(\frac{2}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{2}{y_0}\right)^2} = \sqrt{\frac{4y_0^2 + 4x_0^2}{x_0^2 y_0^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{x_0 y_0}.$$

To je izraz koji treba **minimizirati**, što je ekvivalentno tome da treba **maksimizirati** izraz $x_0 y_0$ (jer je funkcija $\frac{1}{x}$ padajuća na $\langle 0, +\infty\rangle$.) Izrazimo y_0 iz jednadžbe kružnice:

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 &= 2 \\ y_0^2 &= 2 - x_0^2 \\ y_0 &= \sqrt{2 - x_0^2} \end{aligned}$$

Predznak plus za korijen uzimamo jer je točka (x_0, y_0) u prvom kvadrantu. Dakle, treba maksimizirati

$$x_0 y_0 = x_0\sqrt{2 - x_0^2} = \sqrt{2x_0^2 - x_0^4},$$

pri čemu je $x_0 > 0$. Kao u zadatku 6.12, korijen možemo "zanemariti", pa preostaje maksimizirati funkciju

$$F(x) = 2x^2 - x^4$$

na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$. Derivacija je

$$F'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^3) = 4x(1 - x)(1 + x + x^2),$$

a jedina njena nultočka u promatranom intervalu je $x_1 = 1$. Konačno, iz tablice za intervale monotonosti lako vidimo da F (strogo) raste na $\langle 0, 1\rangle$ te (strogo) pada na $\langle 1, +\infty\rangle$, pa postiže maksimum u točki $x = 1$. Dakle, tražena diirališna točka je $(1, 1)$, a tražena tangenta ima jednadžbu

$$y = -x + 2.$$

U trenutku kada smo zaključili da treba maksimizirati $x_0 y_0$, možemo nastaviti i ovako:
Kružnicu možemo opisati i parametarski, kao skup točaka

$$\{(\cos t, \sin t) \colon t \in [0, 2\pi]\}.$$

Budući da mi promatramo prvi kvadrant, dijelu kružnice koji se tamo nalazi odgovarati će točke za koje je $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Stoga, ekvivalentan problem je maksimizirati funkciju

$$g(t) = \cos t \cdot \sin t = \frac{1}{2}\sin(2t)$$

na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$, odnosno na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, jer je u rubnim točkama vrijednost funkcije jednaka 0. Za $t = \frac{\pi}{4}$ je $\sin(2t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, što je očito maksimum (jer funkcija sinus ne postiže vrijednosti veće od 1). Dakle, maksimum funkcije g na traženom intervalu postiže se u točki $t = \frac{\pi}{4}$, a toj vrijednosti parametra t odgovara točka

$$(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}) = (1, 1),$$

te je to tražena dirališna točka.

7

Tok funkcije

Konveksnost i konkavnost

Na fizici u srednjoj školi spominjali ste pojmove konveksnosti i konkavnosti. Jedan od načina kako smo pamtili pojmove je tako da se u konkavnu leću može uliti kava. Dakle, konveksna leća je ispupčena, a konkavna je udubljena. Pojmove konveksnosti i konkavnosti uvodimo u matematici kao svojstva funkcije. U odnosu na gornje objašnjenje, ono je obrnuto: funkcija je konveksna ako se "kava" koja se ulijeva (odozgo prema dolje) na graf funkcije ostaje u grafu. Ako želite zadržati analogiju, možemo reći da se u matematici kava ulijeva na obrnut način (odozdo prema gore), jer tako pokazuje i y-os (njena strelica na vrhu $\uparrow$ prema gore). Tada bismo rekli da je funkcija konkavna ako se ulivena kava (koja se ulijeva odozdo prema gore) zadržava u grafu funkcije f.

Naravno, ovo nije matematički precizan način definiranja konveksnosti i konkavnosti:

Definicija 7.1. Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ definirana na intervalu I je konveksna ako za svake dvije točke $x, y \in I$ vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Funkcija je konkavna ako je funkcija $-f$ konveksna, ili ekvivalentno, ako u gornjoj nejednakosti vrijedi suprotna nejednakost ($\geq$).

Napomena 7.2. Geometrijski rečeno, ovo gore znači da je funkcija f konveksna ako se za svaka dva realna broja $x, y \in I$ polovište dužine koje spaja dvije točke grafa funkcije $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$ nalazi iznad točke grafa u polovištu $\left(\frac{x+y}{2}, f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)$. Kada je funkcija f neprekidna (a u većini slučajeva će biti tako, dapače f će biti i derivabilna), gornji se uvjet može ekvivalentno iskazati i na sljedeći način: funkcija je konveksna ako se dužina koja spaja točke $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$ nalazi iznad grafa. Funkcija je konkavna ako se ta dužina nalazi ispod grafa.
Primjer konveksnih funkcija su x^2, e^x. Primjer konkavnih funkcija su $-x^2$, $-e^x$.

Nije svaka funkcija konveksna ili konkavna. Ipak možemo pričati o intervalima konveksnosti i konkavnosti (slično kao i kod intervala monotonosti), pa ćemo reći da je funkcija na nekom intervalu konveksna/konkavna ako za svaka dva realna broja x, y na tom intervalu vrijedi nejednakost iz definicije (ili intuitivnije, na tom intervalu funkcija izgleda kao da se smije u slučaju konveksnosti ili kao da je tužna u slučaju konkavnosti). Primjerice, za funkciju x^3, funkcija je konveksna na $\langle 0, +\infty\rangle$, a konkavna na $\langle -\infty, 0\rangle$. U točki 0 funkcija prelazi iz konveksnosti u konkavnost. Točke funkcije u kojima funkcija prelazi iz konveksnosti u konkavnost ili obrnuto nazivaju se točke infleksije. Još jedan primjer je funkcija $\sin x$: funkcija je konveksna na intervalima $\langle \pi, 2\pi\rangle + 2k\pi$, konkavna na intervalima $\langle 0, \pi\rangle + 2k\pi$, a točke oblika $k\pi$ su točke infleksije ($k \in \mathbb{Z}$).

Sada kada smo objasnili intuiciju oko konveksnosti i konkavnosti, objasnimo tehniku kako ćemo određivati na konkretnim funkcijama.

Propozicija 7.3. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija na intervalu I. Funkcija je konveksna na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako vrijedi $f''(x) > 0$ na tom intervalu. Konkavna je na tom intervalu ako je $f''(x) < 0$. Točke u kojima je $f''(x) = 0$, te druga derivacija u njoj mijenja predznak (iz $+$ u $-$ ili obratno) je točka infleksije.

Primijetimo: točka u kojoj je $f''(x) = 0$ **samo je kandidat** za točku infleksija (tj. nije svaka nultočka druge derivacije ujedno i točka infleksije). Kontraprimjer je funkcija $f(x) = x^4$: druga derivacija u nuli je nula, no ona nije točka infleksije jer je cijela funkcija konveksna (u nuli funkcija ne prelazi iz konveksnosti u konkavnost). To nas podsjeća na ono što imamo u slučaju prve derivacije. Pogledajmo tablicu:

	$f'(x)$	$f''(x)$
derivacija > 0	f raste ($\nearrow$)	f konveksna ($\cup$)
derivacija < 0	f pada ($\searrow$)	f konkavna ($\cap$)
derivacija $= 0$	stacionarna točka	-
derivacija $= 0$ i mijenja predznak u toj točki	točka lokalnog ekstrema	točka infleksije

(Nultočka druge derivacije općenito nema neko posebno ime.) Vidimo mnogo sličnosti u odnosu na prvu i drugu derivaciju. Prednost toga je što to znači da ćemo zadatcima pristupati vrlo slično (opet ćemo točke infleksije opravdavati tablicom).

Primjer 7.4. Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti, te točke infleksije sljedećih funkcija:

- (7.1.a)) $f(x) = e^{-x^2}$,
- (7.1.b)) $f(x) = x - \sqrt[3]{x-1}$.

Metoda rješavanja je (gotovo) ista kao u prošloj lekciji: dvaput deriviramo, tražimo nultočke. Te nultočke (i točke u kojima funkcija ili neka derivacija nije definirana) uvrštavamo u tablicu na vrhu okomitih crta. Zatim analiziramo tablicu i donosimo zaključak.
$f'(x) = e^{-x^2}(-2x)$

$f''(x) = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$. Eksponencijalna funkcija ne može biti jednaka nuli. Preostaje kvadratna funkcija koja je jednaka nuli za $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Domena funkcije je $\mathbb{R}$, a isto tako i njenih prvih dviju derivacija. Zato tablica ima 4 okomite crte.

	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f''	$+$	$-$	$+$	
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

Kao i u prošloj lekciji, za predznak druge derivacije dovoljno je uvrstiti jednu točku iz tog intervala (u $f''(x)$) i pogledati predznak. Slično kao i prije, ta tablica nam omogućuje da zaključimo na sljedeći način: budući da u točkama $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ druga derivacija mijenja predznak, zaključujemo da u tim točkama f prelazi iz konveksnosti u konkavnost (ili obratno), što znači da su obje točke točke infleksije.

Funkcija je konveksna na intervalima $\langle -\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$ i $\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\rangle$, a konkavna na intervalu $\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$.

Riješimo sada i drugi primjer. Domena je cijeli $\mathbb{R}$. Krećemo s deriviranjem:

$f(x) = x - (x-1)^{1/3}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}$

$f''(x) = 0 - \frac{1}{3}\frac{-2}{3}(x-1)^{-5/3} = \frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$.

Druga derivacija nema nultočaka. No, treba paziti, ni prva ni druga derivacija nisu definirane u $x = 1$, pa tu točku treba ubaciti u tablicu.

	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	$-$	$+$	
f	$\cap$	$\cup$	

Iako nismo dobili kandidate za točku infleksije, vidimo da $x = 1$ jest točka infleksije jer u njoj funkcija prelazi iz konkavne u konveksnu. To nije u suprotnosti s propozicijom iz ovog poglavlja: tamo je pretpostavka da je funkcija dvaput derivabilna na svojoj domeni što u ovom zadatku nije slučaj jer prva derivacija nije definirana u $x = 1$.

Dakle, točka infleksije je $x = 1$, funkcija je konveksna na intervalu $\langle 1, +\infty\rangle$, a konkavna na interalu $\langle -\infty, 1\rangle$.

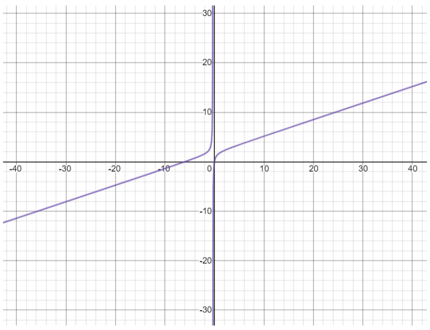
Zadatak 7.5. (7.1.c)) Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti, te točke infleksije funkcije $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.

Asimptote

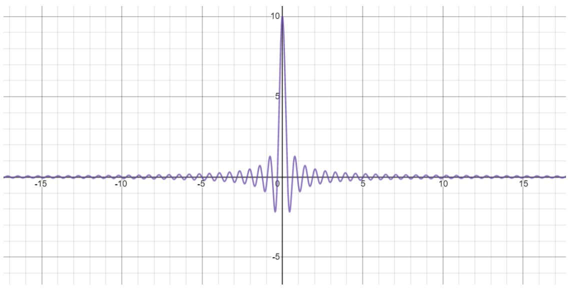
Intuitivno, asimptota je pravac kojem se graf funkcije približava (ili podudara) kako se beskonačno udaljavamo od ishodišta. Neki od prvih primjera koji nam padaju na pamet su sljedeći:

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$: Funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 0$, jer i kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$ imamo da $f(x) \to 0$. Također, ima i vertikalnu asimptotu $x = 0$ jer kada $x \to 0^+$ imamo $f(x) \to +\infty$ te kada $x \to 0^-$ imamo $f(x) \to -\infty$.
- $f(x) = \operatorname{tg} x$: Svaki pravac oblika $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ je vertikalna asimptitota.
- $f(x) = e^x$: Imamo horizontalnu asimptotu $y = 0$ jer kada $x \to -\infty$ imamo $f(x) \to 0$. Odavde vidimo da pravac može biti horizontalna asimptota ako se samo na "jednu stranu" graf funkcije približava tom pravcu, kada $x \to +\infty$ graf funkcije i pravac $y = 0$ se udaljavaju, no svejedno je (zbog $x \to -\infty$) pravac $y = 0$ asimptota toga grafa.

Prije nego nastavimo, riješimo par zabluda u vezi asimptota. Kao prvo, iako nismo spomenuli u primjerima, postoje i kose asimptote. Npr. za funkciju $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x}{3x + 1}$, kada $x \to \pm\infty$ funkcija izgleda kao (kosi) pravac. Uskoro ćemo moći i odrediti koji je to pravac.



Kao drugo, često se može čuti "definicija" asimptote kao *pravac kojem se graf funkcije približava, ali nikad ga ne siječe.* To je krivo, graf funkcije može sijeći svoju asimptotu, i to dapače beskonačno mnogo puta. Primjer za to je funkcija $f(x) = \frac{\sin 10x}{x}$ (faktor 10 je samo da bi se na slici bolje vidio efekt), kada $x \to \pm\infty$, graf se sve više priljubljen uz x-os, ali ga siječe beskonačno mnogo puta. Pravac $y = 0$ jest asimptota ove funkcije.



Kao treće, kao što smo spomenuli u uvodu, asimptota i graf smiju se preklapati. Svakom pravcu $y = kx + l$ asimptota je upravo taj pravac (kao što mu je i tangenta on sam).

Ukupno postoje tri vrste asimptote: vertikalne, horizontalne i kose. Ipak u zadatcima horizontalne ćemo smatrati kao posebni slučaj kosih (asimptota $y = kx + l$ je kosa asimptota ako $k \neq 0$, inače je horizontalna asimptota).

Prije nego ih objasnimo kako ih računamo, recimo još da funkcija ne može imati više od jedne asimptote kada $x \to +\infty$ (dvije kose, dvije horizontalne ili jednu kosu i jednu horizontalnu) i ne može imati više od jedne asimptote kada $x \to -\infty$ (recimo dvije kose, dvije horizontalne ili jednu kosu i jednu horizontalnu). U oba slučaja kada $x \to \pm\infty$, ili nema nijednu asimptotu, ili ima kosu, ili ima horizontalnu.

Vertikalna asimptota: Pravac $x = a$ je vertikalna asimptota za funkciju $f(x)$ ako funkcija nije definirana u točki $x = a$ (i ta točka nalazi se na rubu domene) te vrijedi barem jedan od četiri limesa:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \to +\infty,\ \lim_{x\to a^+} f(x) \to -\infty,\ \lim_{x\to a^-} f(x) \to +\infty,\ \lim_{x\to a^-} f(x) \to -\infty.$$

Pretpostavka da se a nalazi na rubu domene znači da nema smisla provjeravati je li recimo $x = -7$ vertikalna asimptota za funkciju kojoj je domena $\langle 2, +\infty\rangle$. Nadalje, nužno je da je barem jedan od četiri spomenuta limesa istinit, nije dovoljno da funkcija nije definirana u toj točki. Kontraprimjer za to je $f(x) = \frac{x^2}{x}$. Funkcija nije definirana u 0, ali ima limes u nuli. Zaista, njezin graf izgleda kao funkcija $g(x) = x$, osim što nije definirana u nuli.

Kosa asimptota: Pravac $y = kx + l$ je kosa asimptota funkcije $f(x)$ ako vrijede sljedeće formule:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R},\ l = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) \in \mathbb{R},$$

$$\text{ili } k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R},\ l = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) \in \mathbb{R}.$$

Gornje formule čitamo na sljedeći način: ako postoji limes izraza $\frac{f(x)}{x}$ (i to je realni broj), tako definiramo k. Ako postoji limes izraza $(f(x) - kx)$ i realan je broj l, tada je pravac $y = kx + l$ kosa asimptota.

Ako u gornjim formulama dobijemo $k = 0$, tada je ta kosa asimptota zapravo **horizontalna asimptota**.

Na kraju, spomenimo da u definiciji za k često možemo primijeniti L'Hospitalovo pravilo, pa ćemo imati $k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} f'(x)$.

Primjer 7.6. Odredite asimptote sljedećih funkcija:

- (7.2.c)) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 2}$,
- (7.2.f)) $f(x) = x - 2\sqrt{x^2 + x + 1}$.

Zadatci na webu spominju i skiciranje grafova funkcija. Na to ćemo se fokusirati u zadnjem dijelu predavanja.
U prvom zadatku, prvo odredimo domenu funkcije, kako bismo vidjeli ima li vertikalnih asimptota. Vidimo da je domena $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Zato ćemo provjeravati je li $x = 2$ asimptota. Zaista, imamo

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+2x}{x-2} = \frac{8}{0^+} \to +\infty,$$

$$\text{te} \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+2x}{x-2} = \frac{8}{0^-} \to -\infty.$$

Zato $x = 2$ jest vertikalna asimptota. Dapače znamo i da se graf funkcije priljubljuje uz $x = a$ slijeva kada $y \to -\infty$ i zdesna kada $y \to +\infty$.
Odredimo sada kose asimptote. Napravit ćemo samo za $x \to +\infty$, budući da se za $x \to -\infty$ dobije isti rezultat. Prvo određujemo k (ako postoji):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x}{x^2-2x} \quad \frac{:x^2}{:x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 1.$$

Kako je $k = 1$, možemo pokušati odrediti l:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-(x^2-2x)}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{x-2} \quad \frac{:x}{:x} = \frac{4}{1-\frac{2}{x}} = 4$$

Dakle, uz vertikalnu imamo i kosu asimptotu $y = x + 4$. Ona je kosa asimptota u oba slučaja (kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$; uvjerite se sami raspisujući preostale limese). Primijetite da smo ovdje mogli primijeniti L'Hospitalovo pravilo, no nije bilo potrebno. Također, u ovom i sljedećem primjeru dobivamo "obje" kose asimptote. Naravno da funkcije ne moraju imati kose asimptote, samo da je recimo brojnik funkcije u ovom primjeru imao dodatni pribrojnik x^3, ne bi postojao limes za k, pa ne bi bilo kosih asimptota.
Za drugu funkciju, opet prvo određujemo domenu. Kako je x^2+x+1 kvadratna funkcija s negativnom determinantom, zaključujemo da je izraz pod korijenom uvijek pozitivan pa je funkcija definirana na cijeloj domeni $\mathbb{R}$. Zato nemamo vertikalnih asimptota. Za kose asimptote, imat ćemo drugačije ponašanje za $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$. Riješimo prvo $x \to +\infty$:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2\sqrt{x^2+x+1}}{x} \quad \frac{:x}{:x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-2\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1} = -1.$$

Za drugi limes nam treba racionalizacija:

$$l = \lim_{x\to+\infty} (f(x)+x) = \lim_{x\to+\infty} (2x - 2\sqrt{x^2+x+1}) = \lim_{x\to+\infty} 2\frac{x^2-(x^2+x+1)}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\frac{-x-1}{x+\sqrt{x^2+x+1}} \quad \frac{:x}{:x} = \lim_{x\to+\infty} 2\frac{-1-\frac{1}{x}}{x+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = -1.$$

Desna kosa asimptota je $y = -x - 1$. Za lijevu asimptotu i limes $x \to -\infty$ koristit ćemo supstituciju $t = -x$.

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - 2\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{-t - 2\sqrt{t^2 - t + 1}}{-t} \quad \frac{: t}{: t}$$
$$= \lim_{t \to -\infty} \frac{-1 - 2\sqrt{t - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}}}{-1} = 3.$$

$$l = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \to -\infty} (-2x - 2\sqrt{x^2 + x + 1}) = \lim_{t \to +\infty} (2t - 2\sqrt{t^2 - t + 1})$$
$$= \lim_{t \to +\infty} 2\frac{t^2 - (t^2 - t + 1)}{t + \sqrt{t^2 + t + 1}} = \lim_{t \to +\infty} 2\frac{t - 1}{t + \sqrt{t^2 - t + 1}} \quad \frac{: t}{: t} = \lim_{t \to +\infty} 2\frac{1 - \frac{1}{t}}{t + \sqrt{1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}}} = 1.$$

Dakle dobili smo da je lijeva asimptota $y = 3x + 1$, drugačija od desne asimtptote. To nam govori da moramo biti oprezni kod analize kosih asimptota, ne moraju se one nužno poklapati (ili jedna od njih ne mora uopće postojati). Kada imamo korijene u funkciji to je čest slučaj.

Zadatak 7.7. Odredite asimptote sljedećih funkcija:

a) (7.2.b)) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$,

b) (7.2.e)) $f(x) = \sqrt{4x^2 + x}$.

Tok funkcije i crtanje grafa

Kada se priča o toku funkcije, misli se da se odrede sva navedena svojstva koja možemo odrediti koristeći derivacije, ali i tehnike koje smo naučili prije derivacija. Za konkretnu funkciju f nalazit ćemo sljedeća svojstva i informacije:

1) Domena funkcije.

2) Nultočke. Parnost, neparnost. Periodičnost.

3) Asimptote.

4) Lokalni ekstremi i intervali monotonosti.

5) Točke infleksije i intervali zakrivljenosti (konveksnost/konkavnost).

6) Graf funkcije (koristeći sve dobivene podatke).

U zadatcima koji slijede pokazat ćemo na što se točno misli i kako se ispituju svi podatci. Na kolokviju u pravilu ne morate znati sve te korake napamet, umjesto toga postojat će smjernice po kojima ćete određivati svojstva.

Primjer 7.8. (7.3.c)) Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije $f(x) = \dfrac{7}{x^2+3} - 1$.
Ispitajmo sva gore navedena svojstva redom. Krećemo od domene. Za ovu funkciju domena je cijeli $\mathbb{R}$, budući da je nazivnik uvijek strogo veći od nule. Znamo kako inače tražimo domenu: popišemo sve uvjete koje u domeni imaju elementarne funkcije koje se pojavljuju u funkciji f (recimo korijen, logaritam, tangens/kotangens), i onda uzmemo presjek svih uvjeta.
Nađimo nultočke funkcije f. Rješavamo jednadžbu $\dfrac{7}{x^2+3} - 1 = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{7}{x^2+3} &= 1 \\ 7 &= x^2 + 3 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2. \end{aligned}$$

Dobili smo dvije nultočke funkcije. To će nam koristiti kod crtanja grafa funkcije, tamo će graf presijecati x-os.
Provjerimo sada je li funkcija parna ili neparna (ili ništa od toga). Za to uvrstimo $-x$ u definiciju funkcije i pokušavamo dobiti ili izraz $f(x)$ ili $-f(x)$. Ako ne dobijemo ništa, funkcija nije ni parna ni neparna.

$$f(-x) = \frac{7}{(-x)^2+3} - 1 = \frac{7}{x^2+3} - 1 = f(x),$$

dakle funkcija je parna. To znači da je graf funkcije simetričan u odnosu na y-os, to će nam isto pomoći kod crtanja grafa.
Periodičnost je svojstvo koje funkcija najčešće nema i dovoljno je to samo prokomentirati. Ono se pojavi (gotovo) jedino ako je funkcija na neki specifičan način ovisi o nekoj trigonometrijskoj funkciji. Kada bi bila periodična, bilo bi dovoljno odrediti njeno ponašanje samo na jednom njenom periodu, pa samo preslikati to ponašanje na cijelu domenu.
Odredimo sada asimptote. To smo radili nedavno, pa znamo koji je algoritam. Vertikalnih asimptota nema. Za kosu asimtptotu:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{7}{x^2+3} - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4 - x^2}{x^3 + 3x} = ... = 0$$

(limese racionalnih funkcija znamo računati, bilo direktno bilo L'Hospitalovim pravilom). Kako je $k = 0$, ovo će biti horizontalna asimptota.

$$l = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{7}{x^2+3} - 1 \right) - 0x = \lim_{x \to +\infty} \frac{4 - x^2}{x^2 + 3} = ... = -1$$

Dakle, $y = -1$ je desna horizontalna asimptota. Raspisujući $x \to -\infty$ (pokušajte sami) dobit ćemo da je to i lijeva horizontalna asimptota. Dakle, funkcija ima jednu asimptotu,

to je horizontalna $y=-1$, kojoj se funkcija približava i kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$. To svojstvo će nam također pomoći kod crtanja grafa, ponašanje funkcije na lijevom i desnom kraju slike poistovjetit ćemo s tim asimptotama.
Sada određujemo lokalne ekstreme i intervale monotonosti. Za to deriviramo funkciju: $f(x)=7(x^2+3)^{-1}-1$, $f'(x)=-7(x^2+3)^{-2}2x=\dfrac{-14x}{(x^2+3)^2}$. Jedina nultočka je $x=0$, pa je to stacionarna točka. Derivacija je definirana na cijeloj domeni. Imamo tablicu:

	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	$-$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	

U točki $x=0$ imamo lokalni maksimum (jer funkcija raste lijevo od te točke, a pada desno od nje), dapače to je i globalni maksimum. Funkcija raste na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$, a pada na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$. Iako imate tablicu, molimo da ovakav zaključak napišete i na kolokviju, razloge smo objasnili u prošloj lekciji. Također, za crtanje grafa korisno je odrediti vrijednost funkcije u lokalnim ekstremima: kod nas je to $f(0)=\frac{4}{3}$.
Za konveksnost, trebamo ponovno derivirati funkciju: $f'(x)=-14(x^2+3)^{-2}x$,

$$f''(x)=-14[(-2)(x^2+3)^{-3}2x^2+(x^2+3)^{-2}]=\frac{-14}{(x^2+3)^3}(-4x^2+x^2+3)=\frac{42(x^2-1)}{(x^2+3)^3}.$$

Nultočke druge derivacije su ± 1. Druga derivacija je definirana u svim točkama domene, pa samo ± 1 ubacujemo u tablicu.

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f''	$+$	$-$	$+$	
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

Kako u točkama ± 1 derivacija mijenja predznak, zaključujemo da su obje točke točke infleksije. Korisno je izračunati vrijednost u njima: $f(-1)=f(1)=\frac{3}{4}$. Funkcija je konveksna na intervalima $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$, a konkavna na intervalu $\langle -1, 1\rangle$.
Sada je preostalo samo nacrtati graf. Nećemo ga ovdje nacrtati kako vam ne bismo *spoilali* kako bi trebao izgledati. Iskoristimo sve podatke:

- kao prvo, prisjetite se domene funkcije, da ne crtate graf funkcije tamo gdje funkcija nije niti definirana;
- zatim ucrtamo dobivene točke kroz koje znamo da funkcija prolazi: lokalne ekstreme, točke infleksije, nultočke - zato smo računali i vrijednost u funkcije f u točkama lokalnih ekstrema i točkama infleksije;
- ucrtamo (lagano olovkom ili iscrtkano) asimptote - kod kosih i horizontalnih možete crtati samo njene lijeve i desne krajeve da vam se ne kosi s ponašanjem funkcije za x blizu nuli;

- ako imate neko dodatno svojstvo (poput parnosti/neparnosti/periodičnosti), iskoristite ga - u ovom primjeru možemo samo nacrtati funkciju za x desno od y-osi, a onda sve osnosimetrično preslikati (da je funkcija neparna, graf bi bio centralnosimetričan u odnosu na ishodište);

- ako će vam u početku biti lakše, prije sljedećeg koraka uzmite presjeke svih intervala tablica za lokalne ekstreme i točke infleksije;

- koristeći sve dobiveno, prolazite interval po interval iz gornje točke i "spajajte točice" (provlačite funkciju kroz lokalne ekstreme, točke infleksije, nultočke) i prilijepite funkciju uz asimptote, sve to poštujući pravila monotonosti i zakrivljenosti na svakom intervalu.

U našem primjeru, to izgleda ovako:

- Domena je $\mathbb{R}$, pa ne trebamo ni na što posebno paziti.

- Ucrtamo točke $(0, \frac{4}{3})$ (lokalni maksimum), $(\pm 1, \frac{3}{4})$ (točke infleksije), $(\pm 2, 0)$ (nultočke).

- Lagano ili iscrtkano ucrtavamo horizontalnu asimptotu $y = -1$.

- Primijećujemo da je funkcija parna - zato ćemo nacrtati graf na domeni $[0, +\infty\rangle$ i preslikati dobiveno osnosimetrično u odnosu na os y.

- Uzimamo presjeke svih intervala monotonosti i zakrivljenosti, pa zaključujemo redom:

  - na intervalu $\langle -\infty, -1\rangle$ funkcija konveksno raste,
  - na intervalu $\langle -1, 0\rangle$ funkcija konkavno raste,
  - na intervalu $\langle -0, 1\rangle$ funkcija konkavno pada,
  - na intervalu $\langle 1 + \infty\rangle$ funkcija konveksno pada.

  Prve dvije natuknice ovdje nisu toliko bitno zbog parnosti. Ovaj korak ubuduće možemo i preskakati, ne moramo sve ovako detaljno popisivati.

- Sada polako crtamo, recimo slijeva na desno:

  - od $(0, \frac{4}{3})$ do $(1, \frac{3}{4})$ konveksno padamo (dakle funkcija pada, i kao da se smije);
  - od $(1, \frac{3}{4})$ pa skroz udesno (kad $x \to +\infty$), prolazeći kroz točku $(0, 2)$, funkcija konveksno pada (dakle funkcija pada, ali kao da je tužna), i priljubljuje se uz pravac $y = -1$ (s njegove gornje strane), i sve mu je bliže za sve veće vrijednosti x;
  - kada smo nacrtali graf za nenegativne x, preslikamo sliku na negativne x.

Pokušajte sami, a zatim koristeći neki program za crtanje grafa funkcije (primjerice wolframalpha.com ili desmos.com/calculator) pogledajte kako izgleda graf funkcije. Ako nismo pogriješili u računu svih koraka do crtanja grafa funkcije, graf funkcije trebao bi se barem kvalitativno poklapati s pravim grafom.

Riješit ćemo zajedno još poneki primjer, ali i dalje nećemo crtati graf funkcije na kraju zadatka u skripti. Pokušajte sami, vježbajte pročitati dobivene podatke i prbaciti ih u crtež grafa funkcije, a tek onda pogledajte kako treba izgledati graf koristeći neki online program za crtanje grafa funkcije.

Također, na kolokviju ne morate pojašnjavati kako ste dobili graf. Dovoljno je samo na grafu označiti sve podatke koje ste dobili rješavajući zadatak koji su vam pomagali da odredite graf funkcije, i naravno skicirati taj graf.

Primjer 7.9. (7.5.f)) Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.
Domena funkcije je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (zbog dijeljenja s nulom u eksponentu).
Nultočaka nema (prvi faktor je nula u nuli, koja nije u domeni zbog drugog faktora).
Funkcija nije periodična, no neće biti ni parna ni neparna:

$$f(-x) = (-x)^2 e^{\frac{1}{-x}} = \frac{x^2}{e^{\frac{1}{x}}}.$$

Koliko još pokušavali pojednostavniti desnu stranu, nećemo moći dobiti niti $f(x)$ niti $f(-x)$.
Odredimo asimptote. Kako 0 nije u domeni, u toj točki možemo tražiti vertikalnu asimptotu.

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} = [t = 1/x] = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^2}$$

Nakon što dvaput primijenimo L'Hospitalovo pravilo dobivamo da izraz teži ka $+\infty$. Dakle $x = 0$ jest vertikalna asimptota, kada se x približava zdesna pravcu $x = 0$, graf odlazi prema gore u $+\infty$. Pogledajmo što se događa slijeva pravca $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}} = [t = -1/x] = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} = \frac{0}{+\infty} = 0.$$

Dobivamo čudnu situaciju: iako je $x = 0$ vertikalna asimptota zbog ponašanja funkcije kad se x približava sdesna nuli, slijeva kada $x \to 0^-$ funkcija teži k nuli. Znamo da $x = 0$ nije u domeni, ali to ćemo iskoristiti tako da ćemo graf (za negativne x) crtati tako da teže ka točki $(0, 0)$.
Potražimo kose asimptote. Tražimo prvo k za $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty \cdot 1 \to \infty.$$

Kako ovaj limes nije realan broj, ne postoji k i ne postoji kosa asimptota. Slično ćemo dobiti i za $x \to -\infty$. Ne trebamo očajavati, iz ovog čitamo da kada $x \to \pm\infty$ funkcija podijeljena s $|x|$ teži u $+\infty$, a posebno i $f(x) \to +\infty$. Takav podatak ćemo koristiti u crtanju grafa.

	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		$-$		$-$		$+$	
f		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Idemo na lokalne ekstreme. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}x^2$, $f'(x) = e^{\frac{1}{x}}(-x^{-}2x^2 + 2x) = e^{\frac{1}{x}}(2x-1)$. Jedina nultočka je $x = \dfrac{1}{2}$. Kako $x = 0$ nije u domeni, mora biti ucrtana u tablicu.
Kako neposredno lijevo od $\frac{1}{2}$ funkcija pada, a desno raste, u $\frac{1}{2}$ funkcija ima lokalni minimum, i iznosi $f(1/2) = \dfrac{e^2}{4}$. Funkcija pada na intervalima $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 0, \dfrac{1}{2}\rangle$, a raste na $\langle \dfrac{1}{2}, +\infty\rangle$. Primijetite da nismo mogli spojiti prva dva intervala u jedan, ne možemo znati da funkcija pada na uniji ta dva intervala kada u nuli nije definirana.
Derivirajmo još jednom za točke infleksije: $f''(x) = e^{\frac{1}{x}}(2+x^{-2}(2x-1)) = e^{\frac{1}{x}}\dfrac{2x^2+2x-1}{x^2}$.
Kvadratna funkcija u brojniku nema nultočaka jer joj je determinanta negativna, pa druga derivacija nema nultočaka. Moramo napraviti tablicu s točkom $x = 0$:

	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$+$		$+$	
f		$\cup$		$\cup$	

Funkcija je konveksna na oba intervala $\langle -\infty, 0\rangle$, $\langle 0, +\infty\rangle$. Ponovno ne smijemo spojiti ta dva intervala u jedan. Točaka infleksije nema.
Sada prelazimo na crtanje grafa funkcije. Čitajući sve podatke, vidimo da:

- za $x \to -\infty$ imamo $f(x) \to +\infty$;
- za negativne x funkcija je konveksna i padajuća, te graf "pada" prema točki $(0, 0)$ (kojoj teži, ali ju ne postiže);
- u $x = 1/2$ funkcija ima lokalni minimum, graf prolazi točkom $(1/2, e^2/4)$ ($e^2/4$ na kolokviju aproksimiramo nekom bliskom vrijednosti);
- desno od te vrijednosti, funkcija konveksno raste i teži u $+\infty$;
- lijevo od $(1/2, e^2/4)$ konveksno pada, i to tako da kada $x \to 0^+$ funkcija je priljubljena uz desni gornji dio pravca $x = 0$ i teži u $+\infty$

To su sve podatci koje smo dobili rješavanjem zadatka. Pokušajte sada skicirati graf funkcije, a zatim pogledajte stvaran graf.

Napomena 7.10. Nakon što nacrtate graf (ili ga pogledate), pogledajte i zašto funkcija nije padajuća na intervalu $\langle -\infty, \frac{1}{2}\rangle$: recimo, funkcija je u $x = 0.01$ mnogo veća nego u $y = -0.01$, zbog čega je narušen uvjet $f(x) < f(y)$ za sve $x > y$, što je definircija padajuće funkcije.

Primjer 7.11. (7.5.d)) Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije $f(x) = \dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$.
Domenu funkcije određuje logaritam i nazivnik. Logaritam uvjetuje $x > 0$, a nazivnik $\ln x \neq -1$, odnosno $x \neq e^{-1}$. Zato je domena $\langle 0, +\infty\rangle \setminus \{\frac{1}{e}\}$.
Kako domena nije simetrična u odnosu na 0, nema smisla pričati o (ne)parnosti, funkcija nije ništa. Ne možemo uvrstiti $f(-x)$ kada funkcija nije definirana za negativne x. Također, ponovno funkcija nije pediodična.
Funkcija ima nultočku kada joj je brojnik jednak nuli, odnosno $\ln x = 1 \implies x = e$. To je i jedina nultočka, i nalazi se u domeni funkcije.
Kandidati za vertikalne asimtptote su $x = 0$ i $x = e^{-1}$. Kako funkcija nije definirana za $x < 0$, oko nule gledamo samo jednostrani limes $x \to 0^+$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} = \frac{+\infty}{-\infty} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x}{1/x} = -1.$$

Kako nismo dobili $\pm\infty$, $x = 0$ nije vertikalna asimptota. Imamo situaciju sličnu kao u prošlom primjeru: kada $x \to 0$, graf funkcije približava se točki $(0, -1)$.
Za $x = e^{-1}$ gledamo dva jednostrana limesa

$$\lim_{x\to \frac{1}{e}^+} \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} = \frac{2}{0^+} = +\infty,$$

$$\text{te } \lim_{x\to \frac{1}{e}^-} \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} = \frac{2}{0^-} = -\infty.$$

Već samo jedan od rezultata $\pm\infty$ bio bi nam dovoljan da zaključimo da je pravac $x = \frac{1}{e}$ vertikalna asimptota. Osim činjenice da je asimptota, znamo i ponašanje funkcije $f(x)$ blizu točke $x = 1/e$.
Istražimo još kose asimptote. Kako je domena ograničena slijeva ($x > 0$), funkcija ne može imati kose asimptote kada $x \to -\infty$. Zato eventualno postoji samo desna kosa asimptota.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \ln x}{x(1 + \ln x)} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-1/x}{2 + \ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x(2 + \ln x)} = 0.$$

$$l = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} = \frac{-\infty}{+\infty} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-1/x}{1/x} = -1.$$

Dakle, za $x \to +\infty$ imamo horizontalnu asimptotu $y = -1$.
Odredimo lokalne ekstreme i intervale monotonosti. $f(x) = \dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x} = \dfrac{2}{1 + \ln x} - 1$.
$f'(x) = \dfrac{-2}{(1 + \ln x)^2}\dfrac{1}{x} = \dfrac{-2}{x(1 + \ln x)^2}$. Funkcija nema stacionarnih točaka. Radimo tablicu s točkom e^{-1} koja se ne nalazi u domeni.
Funkcija je padajuća na oba intervala $\langle 0, \frac{1}{e}\rangle$ i $\langle \frac{1}{e}, +\infty\rangle$, a lokalnih ekstrema nema.
Deriviramo još jednom za točke infleksije.
$f''(x) = \dfrac{2}{x^2(1 + \ln x)^4}\left((1 + \ln x)^2 + 2x(1 + \ln x)\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{2\,(3 + \ln x)}{x^2(1 + \ln x)^3}$. Nultočka druge

	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
f'	$-$	$-$	
f	$\searrow$	$\searrow$	

	0	e^{-3}	e^{-1}	$+\infty$
f''	$+$	$-$	$+$	
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

derivacije je za x takav da je $\ln x = -3 \implies x = e^{-3}$. Tablica će uključivati tu točku i $x = e^{-1}$. Pazite na njihov uređaj.
Kako funkcija u $x = e^{-3}$ prelazi iz konveksnosti u konkavnost, ta točka jest točka infleksije. Njena vrijednost u toj točki je $\frac{1-\ln(e^{-3})}{1+\ln(e^{-3})} = \frac{4}{-2} = -2$. Funkcija je konveksna na intervalima $\langle 0, e^{-3}\rangle$ i $\langle e^{-1}, +\infty\rangle$, a konkavna na $\langle e^{-3}, e^{-1}\rangle$.
Sada možemo nacrtati funkciju koristeći sve dobiveno:

- Domena funkcije je $\langle 0, +\infty\rangle \setminus \{\frac{1}{e}\}$.
- Funkcija prolazi točkama $(e^{-3}, -2)$ (točka infleksije) i $(e, 0)$ (nultočka). Imamo vertikalnu asimptotu $x = e^{-1}$ koju ucrtamo (recimo iscrtkano). Također imamo i točku $(0, -1)$ koja se ne nalazi na grafu funkcije, ali graf teži prema toj točki.
- Na intervalu $\langle 0, e^{-3}\rangle$ funkcija konveksno pada od spomenute točke $(0, -1)$ do $(e^{-3}, -2)$.
- Na intervalu $\langle e^{-3}, e^{-1}\rangle$ funkcija konkavno pada i priljubljuje se uz vertikalnu asimptotu $x = e^{-1}$, te teži u $-\infty$ kako $x \to e^{-1}$.
- Na intervalu $\langle e^{-1}, +\infty\rangle$ funkcija koveksno pada. Prvo "dolazi" iz $+\infty$ prislonjena uz desni dio pravca $x = e^{-1}$, prođe točkom $(0, e)$ te se prilijepi (odozgo) uz horizontalnu asimptotu $y = -1$.

Slijede zadatci za samostalno rješavanje. Rješavajte ih analogno gore riješenim zadatcima. U zadatcima oblika "bez računanja (nekih parametara) odredite graf funkcije" pristupite tako da izračunate sve ostale parametre koji vam trebaju za graf i tako skicirate graf funkcije. S jedne strane, takvo crtanje grafa je teže jer imate manje podataka koji vam pomažu, no s druge strane je lakše jer imate "veće pravo pogriješiti" - što manje podataka imate, to vam skica grafa smije više odudarati od pravog grafa funkcije.

Zadatak 7.12. Ispitajte tok i skicirajte graf sljedećih funkcija:

a) (7.3.d)) $f(x) = x^2 + 2/x$.

b) (7.3.e)) $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$,

c) (7.5.b)) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8x - 10}{x^2 - 4x + 3}$,

d) (7.5.e)) $f(x) = \arcsin \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$,

e) (7.5.g)) $f(x) = \ln(\cos x)$.

Zadatak 7.13. (7.4.a)) Bez računanja točaka infleksija i intervala zakrivljenosti ispitajte tok i skicirajte graf funkcije $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{2}{x^2 + x - 2}\right)$.

Nakon što riješite sve zadatke iz ovog materijala, savjetujemo da riješite i sve materijale s weba.

Ovime završavamo sedmi tjedan vježbi i prvu veliku cjelinu (od dvije). U normalnim okolnostima nakon ove lekcije dolazi prvi kolokvij. Razmislite imate li još nekih rupa u znanju u ovim lekcijama, ponovite (ili zakrpajte te rupe upitima asistentima) i pokušajte riješiti neke stare kolokvije. Gradivo koje će slijediti manje će se bazirati na naučenom, no i dalje je bitno da znate dobro derivirati funkcije.

Upute za neke zadatke za samostalno rješavanje

Zadatak 7.12 d) Sjetite se domene arkus sinusa. Kod asimptota: kamo teži argument arkus sinusa? Kamo zato teži cijela funkcija? Na kraju pazite, $\sqrt{x^2} \neq x$, već je $\sqrt{x^2} = |x|$. Kod računanja intervala monotonosti i zakrivljenosti zato izračunajte derivacije posebno za $x \geq 0$ i za $x \leq 0$.

Zadatak 7.12 e) Jedini primjer s periodičnom funkcijom. Dovoljno ga je riješiti na temeljnom periodu. Koji je temeljni period? Koja je domena funkcije? Je li funkcija možda parna ili neparna? Dalje znate sami kako.

Zadatak 7.13 Kao što smo rekli prije zadataka, izračunajte sve ostale podatke za tok funkcije.

Rješenja zadataka za samostalno rješavanje

Rješenje zadatka 7.5: Imamo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' \\
&= \frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} \\
f''(x) &= \frac{(-2x-2)(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)\cdot 2x\cdot(-x^2-2x+1)}{(x^2+1)^4} \\
&= \frac{-2(x^2+1)[(x+1)(x^2+1)+2x(-x^2-2x+1)]}{(x^2+1)^4} \\
&= \frac{-2(x^3+x^2+x+1-2x^3-4x^2+2x)}{(x^2+1)^3} \\
&= \frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3} \\
&= \frac{2(x-1)(x^2+4x+1)}{(x^2+1)^3} \\
&= \frac{2(x-1)(x-(-2+\sqrt{3}))(x-(-2-\sqrt{3}))}{(x^2+1)^3}
\end{aligned}$$

Kako je $(x^2+1)^3 > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, predznak druge derivacije ovisi samo o predznaku brojnika. Također, iz gornjeg zapisa odmah vidimo da su kandidati za točke infleksije $x_1 = -2-\sqrt{3}$, $x_2 = -2+\sqrt{3}$ i $x_3 = 1$, i lako vidimo predznak druge derivacije, pa onda i intervale konveksnosti i konkavnosti.

	$-\infty$	$-2-\sqrt{3}$	$-2+\sqrt{3}$	1	∞
f''	$-$	$+$	$-$	$+$	
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

Dakle, funkcija je konveksna na skupu $\langle -2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$, a konkavna na intervalu $\langle -\infty, -2-\sqrt{3}\rangle \cup \langle -2+\sqrt{3}, 1\rangle$, dok su točke infleksije $x_1 = -2-\sqrt{3}$, $x_2 = -2+\sqrt{3}$ i $x_3 = 1$ (jer u tim točkama funkcija prelazi iz konveksnost u konkavnost i obratno).

Rješenje zadatka 7.7:

a) Odmah je jasno da je domena funkcije $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Računamo

$$\lim_{x\to\ -1+} \frac{1}{x^2-1} = \lim_{x\to\ -1+} \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{-2}\cdot\frac{1}{0+} = -\infty$$

Dakle, pravac $x = -1$ je vertikalna asimptota. Slično se dobije da je i pravac $x = 1$ također vertikalna asimptota, tj limesi:

$$\lim_{x\to\ -1-} \frac{1}{x^2-1} = +\infty,\ \lim_{x\to\ 1+} \frac{1}{x^2-1} = +\infty,\ \lim_{x\to\ 1-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty.$$

Odredimo sada još kose (odnosno horizontalne) asimptote. Kako je f parna funkcija, dovoljno je provjeravati samo jedan limes u beskonačnost, recimo u $+\infty$. Odredimo sada još kose (odnosno horizontalne) asimptote. Imamo

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x(x^2-1)} = 0$$

S druge strane,

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0,$$

iz čega zaključujemo da je pravac $y = 0$ horizontalna asimptota (i za $x \to +\infty$ i za $x \to -\infty$).

b) Odredimo najprije domenu funkcije. Kako je $4x^2 + x = x(4x + 1)$, rješavanjem nejednadžbe $x(4x + 1) \geq 0$ dobivamo da je domena funkcije $\langle -\infty, 0] \cup [\frac{1}{4}, +\infty\rangle$. Kako je funkcija definirana u tim rubnim točkama, zaključujemo da nema vertikalnih asimptota.
Odredimo kose asimptote.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{4+\frac{1}{x}} = 2,$$

tj. $k_1 = 2$. Nadalje,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(f(x) - k_1x) &= \lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+x} - 2x \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2+x} - 2x\right) \cdot \frac{\sqrt{4x^2+x}+2x}{\sqrt{4x^2+x}+2x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Dakle, jedna kosa asimptota je pravac $y = 2x + \frac{1}{4}$. S druge strane, imamo

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x}}{-\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{4+\frac{1}{x}} = -2,$$

tj., $k_2 = -2$. Sada je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x) &= \lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x}+2x\\
&= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}+2x\right)\cdot\frac{\sqrt{4x^2+x}-2x}{\sqrt{4x^2+x}-2x}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}-2x}\\
&= -\frac{1}{4},
\end{aligned}$$

odnosno, druga kosa asimptota je $y = -2x - \frac{1}{4}$.

Rješenje zadatka 7.12: U ovim rješenjima neće biti samih skica, veća vam je korist ako sami probate skicirati na temelju svih podataka, a rješenja možete provjeriti na bilo kojem online alatu za crtanje grafova funkcija, npr. `desmos.com/calculator` ili `https://www.mathsisfun.com/data/function-grapher.php`.

a) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.
Očito je domena funkcije $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Nadalje, f nije ni parna ni neparna, jer je npr. $f(-1) = -1$, dok je $f(1) = 3$.
Odredimo nultočke funkcije.

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\iff x^2 + \frac{2}{x} = 0 \;/\cdot x\\
&\iff x^3 + 2 = 0\\
&\iff x = -\sqrt[3]{2}
\end{aligned}$$

Dakle, $x_0 = -\sqrt[3]{2}$ je jedina nultočka. Imamo

$$\lim_{x\to0+} x^2 + \frac{2}{x} = +\infty,$$

i

$$\lim_{x\to0-} x^2 + \frac{2}{x} = -\infty,$$

iz čega zaključujemo da je pravac $x = 0$ vertikalna asimptota. Uočimo,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 + \frac{2}{x} = \infty,$$

iz čega slijedi da funkcija nema horizontalnih, a iz

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x + \frac{2}{x^2} = \pm\infty,$$

slijedi da funkcija nema kosih asimptota. Odredimo derivacije funkcije.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 + \frac{2}{x}\right)' \\ &= 2x - \frac{2}{x^2} \\ f''(x) &= 2 + \frac{4}{x^3} \end{aligned}$$

Lako se vidi da je nultočka prve derivacije $x_1 = 1$, a nultočka druge derivacije $x_2 = -\sqrt[3]{2}$. Odredimo intervale monotonosti i zakrivljenosti.

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'	$-$	$-$	$+$	
f	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Funkcija raste na intervalu $\langle 1, +\infty\rangle$, a pada na $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$, iz čega vidimo i da je točka $m(1, 3)$ točka lokalnog minimuma (jer oko nje funkcija prelazi iz padajuće u rastuću).

	$-\infty$	$-\sqrt[3]{2}$	0	$+\infty$
f''	$-$	$+$	$+$	
f	$\cap$	$\cup$	$\cup$	

Vidimo da je funkcija konveksna na intervalu $\langle -\sqrt[3]{2}, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$, a konkavna na intervalu $\langle -\infty, -\sqrt[3]{2}\rangle$, te da je točka $T(-\sqrt[3]{2}, 0)$ točka infleksije (jer oko nje funkcija prelazi iz konkavne u konveksnu).

b) $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$
Očito je domena funkcije $\mathbb{R}$. Nadalje, lako se vidi da f nije parna ni neparna (npr. $f(2) = -3e^{-2}$, a $f(-2) = -3e^2$).
Također, lako se vidi da su nultočke funkcije f $x_0 = -1$ i $x_1 = 1$.
Odredimo asimptote. Kako je domena cijeli $\mathbb{R}$, nema vertikalnih asimptota. Nadalje,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2}{x} e^{-x} = +\infty,$$

(zbog L'Hospitalovog pravila) pa nema lijevih horizontalnih ni kosih asimptota. Za potrebe samog skiciranja, treba vidjeti da je

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1 - x^2)e^{-x} = -\infty$$

S druge strane,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{x}e^{-x}=0$$

i

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(1-x^2)e^{-x}=0,$$

(jer eksponencijalna fja brže ide u 0 nego polinom u beskonačnost) pa je desna horizontalna asimptota pravac $y=0$.
Odredimo sada derivacije funkcije

$$\begin{aligned}f'(x)&=((1-x^2)e^{-x})'\\&=-2xe^{-x}-(1-x^2)e^{-x}\\&=(x^2-2x-1)e^{-x}\\f''(x)&=(2x-2)e^{-x}-(x^2-2x-1)e^{-x}\\&=(-x^2+4x-1)e^{-x}\end{aligned}$$

Odavde, koristeći činjenicu da je eksponencijalna funkcija svugdje strogo pozitivna, i rješavajući pripadne kvadratne jednadžbe, lako dobivamo da su nultočke derivacije $x_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$, a nultočke druge derivacije $x_{5,6}=2\pm\sqrt{3}$ Odavde vidimo da funkcija

	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
f'	$+$	$-$	$+$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

raste na intervalu $\langle-\infty,1-\sqrt{2}\rangle\cup\langle1+\sqrt{2},+\infty\rangle$, a pada na intervalu $\langle1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\rangle$. Lokalni maksimum postiže se u točki $1-\sqrt{2}$, a lokalni minimum u točki $1+\sqrt{2}$ (jer u njima funkcija prelazi iz rastuće u padajuće i obratno).

	$-\infty$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$+\infty$
f''	$-$	$+$	$-$	
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	

Vidimo da je funkcija konkavna na intervalu $\langle-\infty,2-\sqrt{3}\rangle\cup\langle2+\sqrt{3},+\infty\rangle$, a konveksna na intervalu $\langle2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\rangle$. Točke infleksije su $2\pm\sqrt{3}$ (jer u njima funkcija prelazi iz konveksne u konkavnu i obratno).

c) $f(x)=\dfrac{2x^2-8x-10}{x^2-4x+3}$
Domena funkcije je $\mathbb{R}\setminus\{1,3\}$. Nadalje, lako se vidi da f nije parna ni neparna (npr. $f(2)=18$, a $f(-2)=\frac{2}{3}$).
Nultočke funkcije f jednake su nultočkama polinoma u brojniku, a to su $x_1=-1$

i $x_2 = 5$
Odredimo asimptote. Imamo,

$$\lim_{x\to 1+} \frac{2x^2-8x-10}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1+} \frac{2(x+1)(x-5)}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{0+}\cdot\frac{2\cdot 2\cdot(-4)}{-2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{2x^2-8x-10}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1-} \frac{2(x+1)(x-5)}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{0-}\cdot\frac{2\cdot 2\cdot(-4)}{-2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3+} \frac{2x^2-8x-10}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3+} \frac{2(x+1)(x-5)}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{0+}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot(-1)}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3-} \frac{2x^2-8x-10}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 3-} \frac{2(x+1)(x-5)}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{0-}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot(-1)}{2} = +\infty$$

Dakle, pravci $x = 1$ i $x = 3$ su vertikalne asimptote funkcije f.
S druge strane,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-8x-10}{x^2-4x+3} = 2$$

iz čega slijedi da je pravac $y = 2$ (i lijeva i desna) horizontalna asimptota, dok kosih asimptota nema (do istog zaključka bi došli da smo najprije računali $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, no ako je $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ konačan, onda je $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ pa odmah dobivamo horizontalnu asimptotu). Odredimo sada derivacije funkcije

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{2x^2-8x-10}{x^2-4x+3}\right)' \\
&= \left(\frac{2x^2-8x+6-16}{x^2-4x+3}\right)' \\
&= \left(2-\frac{16}{x^2-4x+3}\right)' \\
&= \frac{16(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} \\
&= \frac{32(x-2)}{(x^2-4x+3)^2} \\
f''(x) &= \frac{32(x^2-4x+3)^2-64(x-2)(x^2-4x+3)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^4} \\
&= \frac{(x^2-4x+3)[32(x^2-4x+3)-64(x-2)(2x-4)]}{(x^2-4x+3)^4} \\
&= \frac{-32(3x^2-12x+13)}{(x^2-4x+3)^3}
\end{aligned}$$

Odavde lako vidimo da je nultočka derivacije $x_3 = 2$, dok druga derivacija nema nultočaka.

	$-\infty$	1	2	3	∞
f'	$-$	$-$	$+$	$+$	
f	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	

Vidimo da funkcija pada na intervalima $\langle -\infty, 1\rangle$ i $\langle 1, 2\rangle$, a raste na intervalima $\langle 2, 3\rangle$ i $\langle 3, +\infty\rangle$, te da je točka $m(2, 18)$ lokalni minimum (jer funkcija u toj točki prelazi iz padajuće u rastuću).

	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f''	$-$	$+$	$-$	
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	

Vidimo da je funkcija konkavna na intervalima $\langle -\infty, 1\rangle$ i $\langle 3, +\infty\rangle$, a konveksna na intervalu $\langle 1, 3\rangle$. Nema točaka infleksije.

d) $f(x) = \arcsin \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$
Uočimo,

$$|1-x^2| \leq |1| + |-x^2| = |1+x^2| \implies \left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

pa je domena funkcije cijeli $\mathbb{R}$. Nadalje, očito je funkcija parna, pa je graf simetričan s obzirom na os y i dovoljno je ograničiti se na skup $x \geq 0$
Kako je jedina nultočka fje arcsin u nuli, da bismo odredili nultičku funkcije f, dovoljno je odrediti nultočke funkcije $\frac{1-x^2}{1+x^2}$, a nultočke te funkcije su očito $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$.
Odredimo asimptote. Kako je domena cijeli $\mathbb{R}$, nema vertikalnih asimptota, dok s druge strane, zbog neprekidnosti, imamo

$$\lim_{x\to+\infty} \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} = \arcsin\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Slijedi da je pravac $y = -\frac{\pi}{2}$ desna, a zbog parnosti i lijeva, horizontalna asimptota, dok kosih asimptota nema.
Odredimo sada derivacije funkcije. Za $x > 0$ imamo (gledamo $x > 0$, jer kad je $x = 0$, vrijednost funkcije unutar arkus sinusa je 1, što je na rubu domene arkus

sinusa, pa tu nema derivacije).

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{1+x^2}{2x} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{-2}{1+x^2} \\
f''(x) &= \frac{2\cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{4x}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}$$

Vidimo da funkcija pada na cijelom intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$. Slijedi, zbog parnosti da funkcija raste na $\langle -\infty, 0\rangle$. Naime, ako uzmemo $x, y < 0$, takve da je $x < y$, slijedi da je $-y < -x$ i $-x, -y > 0$, pa zbog pada na skupu pozitivnih brojeva imamo $f(-y) > f(-x)$. No, zbog parnosti je sada $f(x) = f(-x) < f(-y) = f(y)$. Alternativno, mogli smo derivirati na skupu negativnih brojeva (svakako to napravite za vježbu, pripazite na korjenovanje $4x^2$, dobije se $\frac{2}{1+x^2}$, iz čega je odmah jasno zašto funkcija nije derivabilna u 0). Također, vidimo da je točka $M(0, \frac{\pi}{2})$ lokalni, a u ovom slučaju i globalni maksimum.
Također, vidimo da je funkcija konveksna na $\langle 0, +\infty\rangle$, pa je zbog parnosti konveksna i na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$ (opet, možemo derivirati na skupu negativnih brojeva, ali vidi se direktno iz definicija konveksnosti i parnosti, tj. $f(\frac{-x-y}{2}) = f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{f(-x)+f(-y)}{2}$). Ipak, nije konveksna na cijelom intervalu. Npr., provjerite kada nacrtate njezin graf: u $x = 0$ funkcija ima "špic" okrenut prema gore.

e) $f(x) = \ln(\cos x)$
Domena funkcije je skup na kojem je $\cos x > 0$, a to se lako vidi da je skup

$$D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$$

Uočimo da je funkcija parna (jer je i kosinus paran) i periodička s periodom 2π. To nam bitno olakšava posao jer je dovoljno promatrati što se događa na skupu $[0, \frac{\pi}{2}\rangle$.
Što se tiče nultočaka, imamo da je $f(x) = 0 \iff \cos x = 1 \iff x = 0$ u

našem glavnom intervalu, odnosno, nultočke su $x_k = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ kada primijenimo periodičnost.
Odredimo asimptote. Imamo, uz supstituciju $t = \cos x$ i opasku da t pada u 0 kada kosinus raste prema $\frac{\pi}{2}$ (naravno, na nekom dovoljno malom intervalu oko $\frac{\pi}{2}$, ali samo nas takvi zanimaju kad gledamo limes).

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \ln(\cos(x)) = \lim_{t\to 0+} \ln(t) = -\infty$$

Uočimo da nema smisla promatrati desni limes u $\frac{\pi}{2}$ jer funkcija nije definirana neposredno desno od $\frac{\pi}{2}$, te da zbog parnosti direktno dobivamo

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} \ln(\cos(x)) = -\infty$$

Kad još primijenimo periodičnost, zaključujemo da su vertikalne asimptote svi pravci oblika

$$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

S druge strane, uočimo da, iako je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\cos x)}{x} = 0,$$

ne postoji

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(\cos x)$$

pa nema horizontalnih ni kosih asimptota. Odredimo sada derivacije funkcije na skupu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \big(\ln(\cos x)\big)' \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' \\ &= \frac{-\sin x}{\cos x} \\ &= -\operatorname{tg} x \\ f''(x) &= -\frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Kako je $-\operatorname{tg} x < 0$ na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ zaključujemo da funkcija pada na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, pa zbog parnosti, uz isti argument kao u prošlom podzadatku, raste na $\langle -\frac{\pi}{2}, 0\rangle$. Nakon što sve proširimo po periodičnosti, dobivamo da su intervali pada

$$\Big\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi\Big\rangle, \quad k \in \mathbb{Z},$$

dok su intervali rasta

$$\Big\langle 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\Big\rangle, \quad k \in \mathbb{Z},$$

Lokalni (a u ovom slučaju i globalni) maksimumi su točke $M_k(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.
Što se tiče intervala zakrivljenosti, vidimo da je druga derivacija negativna na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, pa zaključujemo da je funkcija i konkavna na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Po periodičnosti i na svakom intervalu oblika $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$

Rješenje zadatka 7.13: $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{2}{x^2 + x - 2}\right)$

Odredimo najprije domenu. Rješavamo jednadžbu

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{x^2 + x - 2} > 0 &\iff \frac{x^2 + x - 2 + 2}{x^2 + x - 2} > 0 \\ &\iff \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2} > 0 \\ &\iff \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)} > 0 \end{aligned}$$

Odavde se lako vidi da je domena skup

$$\langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -1, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$$

Uočimo, funkcija nije parna ni neparna (npr. $f(3) = \ln(\frac{6}{5})$ dok je $f(-3) = \ln(\frac{3}{2})$; to smo mogli vidjeti i jer je domena asimetrična) i f nema nultočaka.
Odredimo asimptote

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -2-} f(x) &= \lim_{x\to -2-} \ln\left(\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}\right) = \ln\left(\frac{-2\cdot(-1)}{-3}\cdot\frac{1}{0-}\right) = +\infty \\ \lim_{x\to -1+} f(x) &= \lim_{x\to -1+} \ln\left(\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}\right) = \ln\left(\frac{-1}{(-2)\cdot 1}\cdot(0+)\right) = -\infty \\ \lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0-} \ln\left(\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}\right) = \ln\left(\frac{1}{(-1)\cdot 2}\cdot(0-)\right) = -\infty \\ \lim_{x\to 1+} f(x) &= \lim_{x\to 1+} \ln\left(\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+2)}\right) = \ln\left(\frac{1\cdot 2}{3}\cdot\frac{1}{0+}\right) = +\infty \end{aligned}$$

Slijedi da su pravci $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, i $x = 1$ vertikalne asimptote. Kako je

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$$

zaključujemo da je pravac $y = 0$ horizontalna asimptota i da kosih asimptota nema.

Izračunajmo derivaciju

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\ln\left(1+\frac{2}{x^2+x-2}\right)\right]' \\
&= \frac{1}{1+\frac{2}{x^2+x-2}} \cdot \left(1+\frac{2}{x^2+x-2}\right)' \\
&= \frac{x^2+x-2}{x^2+x} \cdot \frac{-2(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} \\
&= \frac{-2(2x+1)}{(x^2+x)(x^2+x-2)} \\
&= \frac{-2(2x+1)}{x(x-1)(x+1)(x+2)}
\end{aligned}$$

Vidimo da je nultočka derivacije $x_0 = -\frac{1}{2}$.

	$-\infty$ … -2	-2 … -1	-1 … $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ … 0	0 … 1	1 … ∞
f'	$+$		$+$	$-$		$-$
f	$\nearrow$		$\nearrow$	$\searrow$		$\searrow$

Zaključujemo, funkcija raste na

$$\langle -\infty, -2\rangle \text{ i } \langle -1, -\frac{1}{2}\rangle,$$

pada na

$$\langle -\frac{1}{2}, 0\rangle \text{ i } \langle 1, +\infty\rangle,$$

dok je točka $m(-\frac{1}{2}, -\ln 9)$ lokalni maksimum (jer funkcija prelazi iz rastuće u padajuću oko nje).

8

Neposredno integriranje i metoda supstitucije

Novu cjelinu započinjemo novim pojmom: integral. Pojam integrala funkcije motivira se na dva načina koja nisu tako očito ekvivalentna. Jedan način je kao rješenje sljedećeg problema: za danu funkciju f kao naći funkciju F koja derivirana daje f. Drugi način je odrediti površinu ispod grafa funkcije f na nekom intervalu $[a, b]$.

Definicija 8.1. Dana je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je I otvoren interval. Funkcija $F : I \to \mathbb{R}$ takva da je $F'(x) = f(x)$ naziva se antiderivacija ili primitivna funkcija funkcije f.

Jednostavno vidimo da ako je $F(x)$ primitivna funkcija za $f(x)$ da je i $F(x) + C$ primitivna funkcija $f(x)$. Pokazuje se da su i sve primitivne funkcije za f takvog oblika.

Teorem 8.2. Neka su $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ dvije primitivne funkcije funkcije $f : I \to \mathbb{R}$. Tada postoji realna konstanta C takva da je $C = F_1(x) - F_2(x)$ za sve $x \in I$. Drugim riječima, skup svih primitivnih funkcija za f dan je kao $F(x) + C$, za neku funkciju $F : I \to \mathbb{R}$ i za sve $C \in \mathbb{R}$.

Definicija 8.3. Dana je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je I otvoren interval. **Neodređeni integral** funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ je skup njoj primitivnih funkcija $\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$. Oznaka:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Napomena 8.4. Obratimo pozornost: (neodređeni) integral nije funkcija, nego skup funkcija. Sjetite se to svako malo, jer lako se zaboravi. Pogotovo u gornjem zapisu: izgleda kao da je neodređeni integral funkcije $f(x)$ funkcija $F(x)$, što nije istina - integral je skup svih funkcija $F(x) + C$, gdje C trči po cijelom skupu realnih brojeva.
Obratimo još malo pažnju na oznaku neodređenog integrala: imamo oznaku za integral $\int$. Iznad i ispod nje nema oznake kada pričamo o neodređenom integralu (za razliku od određenog integrala koji ćemo definirati uskoro). Nakon funkcije $f(x)$ dolazi oznaka "dx". O njoj zasada ne trebate znati mnogo. Najbitnije je da "x" u "dx" označava da integriramo po varijabli x. S desne strane jednakosti, kao što smo rekli, dolazi skup

funkcija. Iako ne pišemo vitičaste zagrade (kako bi zapis bio kraći), uvijek pamtimo da se radi o skupu funkcija oblika $F(x) + C$. Zato je bitno da pišemo "$+C$" i $C \in \mathbb{R}$. Ovo je, nažalost, vrlo čest način gubitka bodova na kolokviju.

Kao što postoji neodređeni integral, postoji i određeni integral. **Određeni integral** funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ možemo definirati kao površinu skupa ispod grafa funkcije $f(x)$. Preciznije: ako je funkcija $f(x)$ pozitivna, onda je određeni integral na intervalu $[a, b]$ površina skupa omeđenog pravcima $x = a$, $x = b$, $y = 0$ i grafom funkcije f; ako je negativna, tada računamo površinu ispod osi x s negativnim predznakom; ako je i negativna i pozitivna, onda zbrojimo površine dijelova iznad osi x i oduzmemo površine dijelova ispod osi x. Oznaka:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Budući da je određeni integral neke funkcije površina, to je (realan) broj. Oznaka, za razliku od neodređenog integrala, ima brojeve a i b iznad i ispod oznaka za integral.

Veza između određenog i neodređenog integrala dana je Newton-Leibnizovom formulom.

Teorem 8.5. (Newton-Leibniz) Dana je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$, gdje je I otvoren interval i $F : I \to \mathbb{R}$ neka njena primitivna funkcija. Tada za svaki interval $[a, b] \subset I$ vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(b).$$

Ova formula nam sugerira da problem traženja određenog integrala možemo svesti na problem traženja neodređenog integrala: kada nađemo neodređeni integral i bilo koju primitivnu funkciju iz tog skupa, za određeni integral treba samo oduzeti vrijednosti primitivne funkcije u rubovima intervala. Također, primijetimo da gornja formula ne ovisi o izboru primitivne funkcije, budući da se svake dvije primitivne funkcije razlikuju za neku konstantu koja se oduzme u formuli.

Pričajmo malo konkretnije: kako za neku funkciju f odredimo njezin (neodređeni) integral, odnosno njenu primitivnu funkciju? Kao prvo, kako je po definiciji treba raditi proces suprotan od derivacije, većinu tablice integrala možemo dobiti kao zamjenom stupaca u tablici derivacije.

Pogledom na tablicu, za neke retke prepoznajemo uistinu da smo samo zamijenili stupce u tablici derivacija. Za preostale retke istinitost možemo provjeriti sami po definiciji: derivirajte funkcije desnog stupca i uvjerite se da ćemo dobiti funkcije iz lijevog.

Kao drugo, iz derivacije možemo izvući i neka pravila: za dvije funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$ i konstantu $k \in \mathbb{R}$ vrijede formule

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = \int (f(x) + g(x))dx, \text{ i } k \int f(x)dx = \int kf(x)dx.$$

Također, gornje formule vrijede i za određene integrale (na fiksnom intervalu $[a, b]$). Za određene integrale vrijedi i sljedeće pravilo za a, b, c brojeve u intervalu I, uz $a < b < c$

(logično uz definiciju preko površine):

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx,$$

Tablica integrala:

$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ C \in \mathbb{R}\ (a \neq 1)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C,\ C \in \mathbb{R}$
e^x	$e^x + C,\ C \in \mathbb{R}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C,\ C \in \mathbb{R}\ (a > 0, a \neq 1)$
$\sin x$	$-\cos x + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{ctg} x + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C,\ C \in \mathbb{R}\ (a > 0)$
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,\ C \in \mathbb{R}\ (a > 0)$
$\frac{1}{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x+a}{x-a} \right\rvert + C,\ C \in \mathbb{R}\ (a > 0)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$\ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2} \right\rvert + C,\ C \in \mathbb{R}\ (a > 0)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$	$\ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C,\ C \in \mathbb{R}\ (a > 0)$

Riješimo nekoliko primjera.

Primjer 8.6. Izračunajte neodređene integrale:

- (8.1.a)) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}}dx;$
- (8.1.d)) $\int \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx;$
- (8.1.g)) $\int \operatorname{tg}^2 x\ dx.$

U ovom zadatku služimo se onime što znamo. Za prvi primjer koristit ćemo znanje integriranja funkcija oblika x^a i aditivnost integriranja. Kada zapišemo sve faktore i pribrojnike u tom formatu, imamo

$$\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx = \int \left(1 - x^{-2}\right) x^{\frac{3}{4}} dx = \int \left(x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{-5}{4}}\right) dx$$
$$= \frac{x^{7/4}}{7/4} - \frac{x^{-1/4}}{-1/4} + C = \frac{4}{7} x^{7/4} + 4x^{-1/4} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

U drugom zadatku koristimo iz tablice integral funkcije a^x. Znamo što raditi sa zbrojem takvih funkcija, ali ne znamo što raditi s omjerom. Zato ćemo razlomak rastaviti na zbroj dva izraza, a svaki će biti funkcija oblika a^x:

$$\int \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx = \int \left(\frac{2^x}{10^x} + \frac{5^x}{10^x}\right) dx = \int \left[\left(\frac{1}{5}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right] dx$$
$$= \left(\frac{1}{5}\right)^x \frac{1}{\ln(1/5)} + \left(\frac{1}{2}\right)^x \frac{1}{\ln(1/2)} + C = -\frac{5^{-x}}{\ln 5} + -\frac{2^{-x}}{\ln 2} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

U zadnjem primjeru nije toliko jasno kao u prošlim primjerima budući da se funkcija tg ne pojavljuje u tablici. Ipak, možemo se malo poigrati s definicijom funkcije tangens:

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Sada smo zapisali funkciju kao zbroj dviju funkcija koje znamo integrirati:

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \operatorname{tg} x - x + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Nemojte se brinuti ako imate dojam da se sami ne biste sjetili rješenja ovih zadataka. Zadatke integralima shvatite slično kao zadatke s limesima: zadatke ćemo pokušati klasificirati i odrediti koju metodu primijeniti u kojoj situaciji. Iako to neće biti tako jednostavno kao u slučaju s limesima.

Napomena 8.7. Komentirajmo jedan od integrala iz prošlog primjera, recimo drugi po redu. Koristili smo pravilo da je integral zbroja zbroj integrala. Integral je skup funkcija oblika $F(x) + C$. Znači li to da se konstante C za te dva integrala zbrajaju u $2C$? Bi li se kod razlike integrala te dvije konstante pokratile? Odgovor je ne. Smatrajte tu konstantu kao *tzv.* generičku konstantu, za koju vrijede posebna pravila: razlika i zbroj generičkih konstanti "C" je opet ista ta konstanta "C". Također umnožak te konstante s "uobičajenom" konstantom (npr. $2, -3, \pi$) je opet ista generička konstanta C.

Primjer 8.8. (8.2.b)) Izračunajte određeni integral $\displaystyle\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{dx}{x^2 + 5}$.

Kao prvo, primjetimo da se oznaka dx nalazi u brojniku razlomka. Neka vas to ne začudi, to je samo stvar oznake: podintegralna funkcija je $\frac{1}{x^2+5}$.

Zadatku pristupamo kao u slučaju neodređenog integrala, a zatim primjenjujemo Newton-Leibnizovu formulu. Odredimo odgovarajući neodređeni integral. Primjećujemo da se taj integral nalazi u tablici, za $a = \sqrt{5}$ imamo

$$\int \frac{dx}{x^2 + 5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Za svaki C funkcija $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{5}} + C$ je primitivna funkcija funkcije $\dfrac{1}{x^2+5}$. To znači da u Newton-Leibnizovu formulu smijemo uvrstiti funkciju za bilo koju konstantu C. Najjednostavnije je to za $C = 0$:

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{dx}{x^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{(\sqrt{5})}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{(-\sqrt{5})}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} \right) = \frac{\pi\sqrt{5}}{10}.$$

Ubuduće ćemo ovaj proces izvoditi brže i kraće, pozivajući se na Newton-Leibnizovu formulu bez njenog navođenja. Kraće i jednako točno rješenje zadatka bi izgledalo ovako:

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{dx}{x^2+5} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} \right) \Big|_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} \right) = \frac{\pi\sqrt{5}}{10}.$$

U prvoj jednakosti određujemo neodređeni integral (to može potrajati i više koraka, ovisno o težini problema). Oznaka $(F(x))\Big|_a^b$ je pokrata za izraz $F(b) - F(a)$. Nakon toga uvrštavamo vrijednosti u odabranu primitivnu funkciju i računamo izraz.

Napomena 8.9. Sjetimo se: određeni integral pozitivne funkcije je površina ispod grafa funkcije, što je pozitivan broj. Podintegralna funkcija u prošlom zadatku je pozitivna i dobili smo na kraju pozitivan broj. Naravno da to ništa ne znači jesmo li zadatak točno riješili. No, da smo na kraju dobili negativan broj, sigurno bismo mogli zaključiti da smo pogriješili u postupku rješavanja. To možete i inače koristiti kao neku kontrolu u zadatcima.

Zadatak 8.10. Izračunajte sljedeće određene i neodređene integrale:

a) (8.1.b)) $\displaystyle\int \frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}} dx$,

b) (8.1.c)) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$,

c) (8.2.a)) $\displaystyle\int_0^1 (3x^2 - x + 2) dx$.

Napomena 8.11. Iako je integriranje obrnuto od deriviranja, postoji jedna velika razlika. Svaka (derivabilna) funkcija sastavljena od zbroja/razlika/umnožaka/kompozicija elementarnih funkcija da se derivirati, algoritam je jasan, i njena derivacija ponovno je funkcija sastavljena od elementarnih funkcija. Kod integrala to nije tako. Iako postoji rezultat iz teorije koji kaže da je svaka neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu integrabilna (postoji njoj primitivna funkcija), ne mora značiti da funkcija sastavljena od elementarnih funkcija ima primitivnu funkciju koja je sastavljena od elementarnih funkcija. Primjer za to je $\displaystyle\int e^{x^2} dx$. Iako, kao što smo rekli, postoji neodređeni integral ove funkcije, nemoguće ga je zapisati elementarnim funkcijama.

To stavlja naglasak na zadatke s integralima da su teži nego zadatci s derivacijama. Također, ako ste za vježbu mogli uzeti bilo koju funkciju i "izmisliti zadatak" iz derivacija tako da samo derivirate tu funkciju, kod integrala to ne možete raditi - mogli biste izmisliti funkciju kojoj je nemoguće zapisati integral.

Primijetimo da smo do sada koristili samo pravila da se integral lijepo ponaša u odnosu na zbrajanje i množenje konstantom. Kao i kod derivacija (a integriranje je proces obrnut od deriviranja), ne očekujemo da će postojati lijepo pravilo kod umnoška i komponiranja. Na pravilu deriviranja kompozicije temeljimo prvu tehniku integriranja: metoda supstitucije.

Metoda supstitucije primijenjuje se u situacijama kada imamo kompoziciju funkcija i općenito se vrši na sljedeći način:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \begin{bmatrix} t = g(x) \\ dt = g'(x)dx \end{bmatrix} = \int f(t)dt.$$

Supstitucija znači da smo zamijenili varijabli integracije: umjesto integriranja po varijabli x, sada integriramo po varijabli $t = g(x)$, što je prirodno zbog funkcije $f(g(x))$. Ipak, za to smo morali platiti cijenu. Osim što smo podintegralnu funkciju zapisali preko varijable t, morali smo ažurirati i član dx tako da smo derivirali funkciju $g(x)$ (kojom supstituiramo). Na redak $dt = g'(x)dx$ gledamo kao da u retku u kojem definiramo supstituciju ($t = g(x)$) deriviramo lijevo po t, a desno po x, te nadopišemo dt i dx slijeva i zdesna.

Cijena suptitucije $dt = g'(x)dx$ vam se možda čini nelogična, ali ona je nužna. Pogledajmo primjer $\displaystyle\int 2xdx$. Znamo da je njen integral $x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}$. Ako bismo napravili supstituciju $t = 2x$, imali bismo

$$\int 2xdx = \begin{bmatrix} t = 2x \\ dt = 2dx \end{bmatrix} = \int t\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\frac{t^2}{2} + C = (\text{zbog } t = 2x) = x^2 + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Kada ne bismo "platili cijenu" $dt = 2dx$, dobili bismo krivi rezultat u gornjem računu.

Prije primjera, recimo još dvije stvari. Kao prvo, kao što smo vidjeli u gornjem računu, kod neodređenih integrala kada primijenimo supstituciju dobit ćemo funkciju izraženu preko druge varijable u odnosu na one s kojom smo počeli. Na kraju trebamo vratiti početnu varijablu x nazad istom supstitucijom. Kao drugo, zbog te "cijene" koje plaćamo ($dt = 2dx$) moramo biti oprezni kako i kada primjenjujemo metodu supstitucije, tj. moramo biti svjesni da se faktor $g'(x)$ već nalazi u podintegralnoj funkciji ili će ga biti lako naći. Primjerice, zato možemo integrirati funkciju $\int e^{x^2} 2xdx$ (jer je $2x$ upravo derivacija od $g(x) = x^2$), dok ne možemo $\int e^{x^2} dx$.

Pogledajmo na konkretnim primjerima.

Primjer 8.12. Izračunajte neodređene integrale:

- (8.3.a)) $\displaystyle\int \sin 3xdx$
- (8.3.c)) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^4}{x}dx.$

U prvom primjeru imamo kompoziciju funkcija $f(x) = \sin x$ i $g(x) = 3x$. Uvijek nam se sviđa kada je unutarnja funkcija afina jer je tada njena derivacija konstanta s kojom možemo lagano baratati kod metode supstitucije.

$$\int \sin 3x dx = \begin{bmatrix} t = 3x \\ dt = 3dx \end{bmatrix} = \int \sin t \frac{1}{3} dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos 3x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

U zadnjoj jednakosti vratili smo se u varijablu x preko $t = 3x$. Iako to nije nužno za zadatak, za vježbu se uvjerite da zaista funkcija dobivena na desnoj strani derivirana daje podintegralnu funkciju s kojom smo krenuli.
U drugom primjeru imamo kompoziciju funkcije x^4 i $\ln x$. Metodu supstitucije moći ćemo lagano izvesti samo ako imamo derivaciju unutarnje funkcije $\ln x$ kao faktor u podintegralnoj funkciji, a imamo je - to je $1/x$. Zato imamo

$$\int \frac{(\ln x)^4}{x} dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{bmatrix} = \int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{(\ln x)^5}{5} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Da nismo imali faktor $1/x$, ovaj zadatak bio bi mnogo teži.

Primjer 8.13. (8.6.c)) Izračunajte određeni integral $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.
U ovom zadatku naučit ćemo dvije stvari: prva kako rješavati određene integrale metodom suspstitucije, a druga vidjeti metodu supstitucije na nešto kompliciranijem primjeru.
U ovom zadatku imamo više funkcija koje možemo supstituirati. Primijećujemo da ponovno imamo $\ln x$, koju "čeka" faktor x u nazivniku, pa je to dobra opcija za supstituciju. Još bolja je $t = \ln x + 1$. Tako ćemo u korijenu imati samo varijablu t zbog čega će nam kasnije račun biti jednostavniji. Dodati konstantu 1 u prvotno zamišljenu susptituciju $t = \ln x$ je "besplatno", budući da se ta kosntanta derivira i neće biti viđena u zamjeni dx u dt.
Budući da se ovdje radi o određenom, a ne o neodređenom integralu, radimo dvije drugačije stvari:

- Kada napravimo supstituciju x preko t, treba promijeniti rubove integracije - ako smo prije integrirali od a do b, sada integriramo od $g(a)$ do $g(b)$ (gdje je $t = g(x)$).
- Budući da je određeni integral broj, a ne funkcija, na kraju ne trebamo vratiti integral u terminima po x, nego samo naći novi integral po t. Nemamo što vraćati po t.

Idemo napraviti sve navedeno:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \begin{bmatrix} t = 1 + \ln x & x = e \Rightarrow t = 1 + \ln e = 2 \\ dt = \frac{1}{x} dx & x = 1 \Rightarrow t = 1 + \ln 1 = 1 \end{bmatrix} = \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Kao što smo najavili, napravili smo supstituciju, te uz varijablu integracije zamijenili i rubove integracije. Inače ne morate detaljno zapisivati kako ste izračunali novi t, dovoljno je zapisati samo

$$\begin{bmatrix} t = 1 + \ln x & x = e \Rightarrow t = 2 \\ dt = \frac{1}{x} dx & x = 1 \Rightarrow t = 1 \end{bmatrix}.$$

Desno smo dobili određeni integral po t. To je neki broj, pa ga računamo i ne treba brinuti da je integral nekoć bio po x. Tako se radi u slučaju određenih integrala.

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_1^2 t^{-1/2} dt = \left(\frac{t^{1/2}}{1/2}\right)\Bigg|_1^2 = 2\sqrt{2} - 2.$$

Napomena 8.14. Kao što je najavljeno, rješavanje integrala trebalo bi ličiti na rješavanje limesa. Možda ćemo primijenjivati metode koje prvotno neće uspjeti (recimo kriva supstitucija). No, ne treba paničariti nego probati s nekim drugim metodama dok ne riješimo zadatak. Naš je cilj da pokušamo što bolje objasniti koje metode pokušavati u kojim situacijama, a vaš da pokušate vidjeti što više primjera i razviti što bolju intuiciju.

Također, ono što je bitno kod metode supstitucije je da kao što je prije primjene supstitucije sve bilo izraženo preko x, tako nakon primjene supstitucije sve mora biti izraženo preko nove varijable t. Ne smije vam se pojaviti varijabla x nakon primjene supstitucije u podintegralnoj funkciji, sve se treba supstiuirati.

Primjer 8.15. Odredite sljedeće neodređene integrale:

- (8.4.e)) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}} dx$,
- (8.4.h)) $\displaystyle\int \sin^2 x dx$.

Imamo kompoziciju funkcija e^x i $2x$, no bitnije, imamo kompoziciju racionalne funkcije i e^{2x}. Derivacija eksponencijalne funkcije je ona sama (do na multiplikativni faktor), pa se možemo nadati da će to biti dobar izbor za susptituciju.

$$\int \frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}} dx = \begin{bmatrix} t = e^{2x} \\ dt = 2e^{2x} dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{1-3t} \frac{1}{2} dt.$$

Svašta se pokratilo i dobili smo ljepšu funkciju. Ipak tu nije kraj. Sada možemo primijeniti još jednu susptituciju: $y = 1 - 3t$. To je afina susptitucija, pa ne bi trebalo biti problema.

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{1-3t} dt = \begin{bmatrix} y = 1 - 3t \\ dy = -3dt \end{bmatrix} = \frac{-1}{6} \int \frac{1}{y} dy.$$

Tek smo sad dobili integral koji znamo izračunati. Imamo dvije susptitucije, pa ćemo na kraju imati dva koraka vraćanja u terminima varijable x.

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-3t} dt = \frac{-1}{6} \int \frac{1}{y} dy = \frac{-1}{6} \ln|y| + C \\ = \frac{-1}{6} \ln|1-3t| + C = \frac{-1}{6} \ln|1-3e^{2x}| + C,\ C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ovime smo naučili da je dozvoljeno imati i više od jedne susptitucije, te kako baratati u toj situaciji. Također, primijetite da smo dva koraka mogli zamijeniti samo jednom

supstitucijom $y = 1 - 3e^{2x}$. Kada postanete iskusniji, moći ćete to raditi tako odjednom, no nije bitno ako to radite u više koraka.
U drugom zadatku imamo trigonometrijsku funkciju. Imat ćemo cijelu lekciju posvećenu integriranjem trigonometrijskih funkcija. Tada ćemo naučiti sljedeće nepisano pravilo:

- Ako se neka trigonometrijska funkcija $\sin x$, $\cos x$ pojavljuje s neparnom potencijom (npr $\sin x$ u izrazima $\sin^3 x \cos^7 x$, $\dfrac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}$ i sl.), uzmite "onu drugu" kao supstituciju (u ova dva primjera $t = \cos x$), te izrazite sve ostalo koristeći $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ preko te supstitucije. Zbog neparnosti potencije, dočekat će vas dobar faktor u prebacivanju iz dx u dt.

- Ako se sve pojavljuju s parnom potencijom, primjenjujemo formule dvostrukog kuta.

Kao što smo rekli, to ćemo detaljnije raditi za koji tjedan, ali danas je bitno da naučimo integrirati funkcije $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$. Po drugom gore napisanom nepisanom pravilu, primijenit ćemo formulu dvostrukog kuta: $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$. Kada izrazimo preko $\sin^2 x$, imat ćemo

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx.$$

Funkciju $1/2$ znamo integrirati. Za $\cos 2x$ primjenjujemo supstituciju $t = 2x$:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \begin{bmatrix} t = 2x \\ dt = 2dx \end{bmatrix} \\ = \int \frac{1-\cos t}{4} dt = \frac{t - \sin t}{4} + C = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C,\ C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Zapamtite ovaj integral, jako se često koristi (na ovom i ostalim kolegijima).

Zadatak 8.16. Odredite sljedeće integrale:

a) (8.3.d)) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}dx$

b) (8.4.c)) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

c) (8.4.d)) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$

d) (8.4.f)) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$

e) (8.4.i)) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$

f) (8.5.) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x\ln(1+x^2) + 1}{1+x^2} dx$

g) (8.6.e)) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$

h) (8.6.f)) $\int_0^6 (x-3)e^{x^2-6x} dx$

Nakon što riješite sve zadatke iz ovog materijala, savjetujemo da riješite i sve materijale s weba.

Upute za neke zadatke za samostalno rješavanje

Zadatak 8.10.b) Zapišite podintegralnu funkciju kao $1-g(x)$, gdje je $g(x)$ neka funkcija koju znamo integrirati.

Zadatak 8.16.c) Rastavite podintegralnu funkciju na zbroj dvije. Samo na jednoj primijenite supstituciju.

Zadatak 8.16.d) Je li bolje za supstituciju uzeti $t = \sin x$ ili $t = \cos x$? Možete li na to odgovoriti bez da pokušate raspisati?

Zadatak 8.16.e) Kao zadatak s $\sin^2 x$. Također, primijetite da mora vrijediti

$$\int \sin^2 x dx + \int \cos^2 x dx = \int 1 dx = x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 8.16.f) Iako to inače ne mora biti dobra ideja, ovdje rastavite podintegralnu funkciju na zbroj tri.

Zadatak 8.16.g) Kao supstituciju uzmite $t = \sqrt{e^x - 1}$. Izrazite i e^x preko t. Pazite da vam nakon susptitucije ne ostane ništa po x.

Rješenja zadataka za samostalno rješavanje

Rješenje zadatka 8.10:

(a) Napišimo sve članove kao potencije od x, te direktno integrirajmo:

$$\int \frac{x^2+5x+1}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^2+5x+1}{x^{\frac{1}{2}}}dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 5x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx =$$

$$\frac{x^{5/2}}{5/2} + 5\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{5} = x^{5/2} + \frac{10}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

(b) Ovo je česti "trik", dodamo i oduzmemo 1 u brojniku, dobivamo

$$\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x - \operatorname{arctg} x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

(c) Sama integracija je sasvim elementarna, samo treba ne zaboraviti da se radi o određenom integralu, pa nakon integriranja treba evaluirati u granicama,

$$\int_0^1 \left(3x^2 - x + 2\right) dx = \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_0^1 = \left(1 - \frac{1}{2} + 2\right) - (0 - 0 + 0) = \frac{5}{2}$$

Rješenje zadatka 8.16:

(a) Supstitucija $t = x^2$ će se lijepo uklopiti, budući da je onda $dt = 2xdx$. Račun će biti još lakši ako supstituiramo $t = 1 + x^2$,

$$\int x\sqrt{1+x^2}\, dx = \begin{bmatrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2xdx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{2}\sqrt{t}\, dt = \frac{1}{2}\int t^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

(b) Često treba supstituirati funkciju s kojom je komponirana neka elementarna podintegralna funkcija. Konkretno, u ovom slučaju, to bi bilo $t = \sqrt[3]{x}$. Tada će biti $dt = \frac{1}{3}x^{-2/3}dx$, što nam taman odgovara.

$$\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \begin{bmatrix} t = x^{1/3} \\ dt = \frac{1}{3}x^{-2/3}dx \end{bmatrix} = \int 3\sin t\, dt =$$

$$= -3\cos t + C = -3\cos(\sqrt[3]{x}) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

(c) Kada u brojniku ne bi bilo $\ln x$, tu bi funkciju bilo jednostavno integrirati. Zato, integral sume zapišimo kao sumu integrala, dobivamo

$$\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx = \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx + \int \frac{\ln x}{x}dx = (*).$$

Posvetimo se drugom integralu iz gornje sume. Funkciju $\ln x$ je (zasada, naučit ćete to u idućem poglavlju parcijalne integracije) nespretno integrirati, pa je možemo probati supstituirati. Dobivamo

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{bmatrix} = \int t\;dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C,\; C \in \mathbb{R}.$$

Sada možemo izračunati početni integral,

$$(*) = \int x^{-1/2}\;dx + \int \frac{\ln x}{x} dx = 2x^{1/2} + \frac{(\ln x)^2}{2} + C,\; C \in \mathbb{R}.$$

(d) Ako probamo supstituirati $t = \cos x$, tada je $dt = -\sin x\;dx$. Problem je što se pod integralom uz dx ne nalazi $\sin x$. Zato, supstituirat ćemo $t = \sin x$.

$$\int \frac{\cos x}{1 + 2\sin x} dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\;dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{1+2t} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+2t| + C = \frac{1}{2}\ln|1 + 2\sin x| + C,\; C \in \mathbb{R}.$$

(e) Kao u sličnom riješenom primjeru, koristit ćemo formulu za dvostruki kut, kako bismo "linearizirali" podintegralnu trigonometrijsku funkciju.

$$\int \cos^2 x\;dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos(2x)\;dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right) + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C,\; C \in \mathbb{R}.$$

Ukoliko niste sigurni "napamet" u integral $\int \cos(2x)\;dx$, riješite ga posebno supstitucijom $t = 2x$.

(f) Kao i u c) podzadatku, prikažimo integral kao sumu tri integrala, te odredimo svaki posebno:

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x\ln(x^2+1) + 1}{1+x^2} dx =$$

$$= \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx + \int \frac{x\ln(x^2+1)}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = (*).$$

Za prvi integral, primijetimo da se u brojniku nalazi kopozicija funkcija e^x i $\operatorname{arctg} x$, pa kao što smo napomenuli na početku (b) podzadatka, možemo probati supstituirati $t = \operatorname{arctg} x$. Tada je $dt = \frac{1}{1+x^2} dx$, što taman "pokupi" nazivnik. Imamo

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx = \begin{bmatrix} t = \operatorname{arctg} x \\ dt = \frac{1}{1+x^2} dx \end{bmatrix} = \int e^t\;dt = e^t + C = e^{\operatorname{arctg} x} + C,\; C \in \mathbb{R}.$$

Za drugi integral prolazi sličan recept, supstituirajmo argument funkcije ln:

$$\int \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx = \begin{bmatrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2x\ dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{2}\frac{\ln t}{t} =$$

$$= \{\text{pogledati c)}\} = \frac{(\ln t)^2}{4} + C = \frac{(\ln(1+x^2))^2}{4} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Budući da je treći integral tablični, sada imamo sve potrebno:

$$(*) = e^{\operatorname{arctg} x} + \frac{(\ln(1+x^2))^2}{4} + \operatorname{arctg} x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

(g) Po uputi, supstituirajmo $t = \sqrt{e^x - 1}$. Tada je $dt = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx$, što zapravo možemo pisati i kao $2t\ dt = e^x\ dx$. Preostaje nazivnik izraziti preko t, a to možemo iz supstitucije. Naime,

$$t = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow t^2 + 1 = e^x.$$

Budući da se radi o određenom integralu, ova će supstitucija pomaknuti i granice, $0 \to 0$ i $\ln 5 \to \sqrt{e^{\ln 5} - 1} = 2$. Dakle, koristeći supstituciju i ovaj kratki račun iznad, slijedi

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx = \int_0^2 \frac{2t^2}{t^2+4}dt = 2\int_0^2 \frac{t^2}{t^2+4}dt = (*).$$

Isti tip integrala riješili smo u zadatku 8.10(b), dakle treba dodati i oduzeti 4 u brojniku, time se integral svede na tablični. Konačno,

$$(*) = 2\int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right) dt = \left(2t - 4\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= (4 - 4\operatorname{arctg} 1) - (0 - 4\operatorname{arctg} 0) = 4 - \pi.$$

(h) Supstituirajmo $t = x^2 - 6x$, budući da tada dobivamo zgodno $dt = 2(x-3)dx$. Za granice, imamo $0 \to 0, 6 \to 0$. Ovdje nastaje problem,jer dobivamo iste vrijednosti za lijevi i desni rub integracije. Problem je nastao jer supstitucija koju smo uzeli na području na kojem integriramo nije injektivna, što mora biti. Problem ćemo riješiti tako da jednostavno rastavimo područje integracije na dva, na kojima će odabrana supstitucija biti injektivna. Odnosno, računamo

$$\int_0^6 (x-3)e^{x^2-6x}dx = \int_0^3 (x-3)e^{x^2-6x}dx + \int_3^6 (x-3)e^{x^2-6x}dx$$

Za prvi integral,

$$\int_0^3 (x-3)e^{x^2-6x}dx = \begin{bmatrix} t = x^2 - 6x,\ 0 \to 0 \\ dt = 2(x-3)dx,\ 3 \to -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{-3} \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2}(e^{-3} - e^0) = \frac{1}{2}(e^{-3} - 1).$$

Posve analogno riješimo i drugi integral, samo pazimo na granice:

$$\int_3^6 (x-3)e^{x^2-6x} dx = \begin{bmatrix} t = x^2 - 6x, \ 3 \to -3 \\ dt = 2(x-3)dx, \ 6 \to 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{-3}^{0} \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2}(e^0 - e^{-3}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-3}).$$

Zbrajajući dva dobivena rezultata, slijedi da je početni integral jednak 0.

Alternativno, možemo riješiti odgovarajući neodređeni integral, te na kraju samo uvrstiti granice. Imamo

$$\int (x-3)e^{x^2-6x} dx = \begin{bmatrix} t = x^2 - 6x \\ dt = 2(x-3)dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{2} e^t dt =$$

$$= \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2-6x} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Sada je

$$\int_0^6 (x-3)e^{x^2-6x} dx = \frac{1}{2} e^{x^2-6x} \Big|_0^6 = \frac{1}{2}(e^0 - e^0) = 0.$$

9

Metoda parcijalne integracije

Druga metoda kojom možemo integrirati funkcije zove se metoda parcijalne integracije. Temelji se na pravilu derivacije umnoška: budući da vrijedi

$$u(x)v'(x) + u(x)v'(x) = (u(x)v(x))',$$

vrijedi i

$$\int u(x)v'(x)dx + \int u(x)v'(x)dx = \int (u(x)v(x))'dx = u(x)v(x) + C$$

tj.

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

Konkretnije: parcijalna integracija primjenjuje se na umnožak funkcija, u kojem se jedan faktor "lijepo derivira", a drugi "lijepo integrira". Recimo da je takav umnožak $f(x) \cdot g(x)$, gdje $f(x)$ ima relativno lijepu derivaciju $f'(x)$, a $g(x)$ ima relativno lijepu antiderivaciju $G(x)$. Tada vrijedi

$$\int f(x)g(x)dx = \begin{bmatrix} u = f(x) & du = f'(x)dx \\ dv = g(x)dx & v = G(x) \end{bmatrix} = (f(x)G(x)) - \int f'(x)G(x)dx.$$

Dakle, integral umnoška $f(x)g(x)$ zamijenili smo integralom umnoška derivacije jedne funkcije i antiderivacijom druge. Ispred tog integrala ide znak minus, te još moramo dodati umnožak funkcija $f(x)$ i $G(x)$, tj. u terminima funkcija u i v, dodajemo umnožak $u(x)v(x)$.

Objasnimo tablicu u sredini zapisa: u prvom stupcu pišemo rastav podintegralne funkcije na lijevoj strani na u i dv: funkcija koju ćemo derivirati postavljamo na u, a onu koju ćemo antiderivirati za dv. Primijetite da je zapisano s oznakom dx, na jednak način kao kod metode supstitucije. U drugom stupcu zapisujemo funkcije koje čine faktore umnoška nove podintegralne funkcije. Prvi redak dobivamo tako da deriviramo prvi redak prvog stupca (opet u s dx kao kod metode supstitucije). Drugi redak dobivamo antiderivacijom drugog retka prvog stupca. Nakon dobro napisane tablice imamo:

- umnožak elemenata prvog stupca je podintegralna funkcija s kojom smo krenuli;
- umnožak elemenata drugog stupca je podintegralna funkcija na koju svodimo zadatak;
- umnožak elemenata na dijagonali je funkcija koju dobijemo na desnoj strani (i koju ne integriramo).

Ako smo imali sreće ili dovoljno iskustva/intuicije, novodobiveni integral trebao bi se računati lakše nego onaj s kojim smo krenuli. Za to treba paziti koju od funkcija $f(x)$, $g(x)$ biramo da bude u, a koja dv. Pogledajmo primjer.

Primjer 9.1. (9.1.a)) Izračunajte neodređeni integral $\displaystyle\int x \sin x dx$.

Ovaj integral zasada ne znamo riješiti (direktnom integracijom ili metodom supstitucije). Budući da imamo umnožak dviju funkcija, probajmo metodu parcijalne integracije. Postaje pitanje koji od faktora x, $\sin x$ treba biti u, a koji dv. Funkcija x derivirana daje konstantu, a antiderivirana polinom drugog stupnja. Funkcija $\sin x$ i derivirana i antiderivirana daje $\cos x$ (do na faktor ± 1). Kako nas je polinom x i doveo u "nepriliku" i onemogućio nam direktno integriranje, zaključujemo da je bolje x derivirati (da je on u), a sinus antiderivirati (da je on dv). Zato imamo

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = (x(-\cos x)) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Osim što smo uspješno riješili primjer, napomenimo da i za ubuduće možemo zaključiti da x "voli" biti deriviran (i općenito polinomi višeg stupnja), "skoro uvijek", a funkcijama sinus i kosinus je svejedno da li se deriviraju ili integriraju. Kao sinus i kosinus je i eksponencijalna funkcija.

Primjer 9.2. Izračunajte neodređene integrale:

- (9.1.f)) $\displaystyle\int x e^{2x} dx$,
- (9.1.e)) $\displaystyle\int (x^2 + 2x + 3) e^x dx$.

Kao što smo gore rekli, x voli biti integriran, a eksponencijalnoj funkciji je svejedno. Zato će nam biti $u = x$ i $dv = e^{2x} dx$. Koja je antiderivacija od e^{2x}? Nadam se da ste dobili intuiciju s metodom supstitucije, a ako niste, izračunajte sa strane $\int e^{2x} dx$.

$$\int x e^{2x} dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{2x} dx & v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{bmatrix} = \left(\frac{x}{2} e^{2x}\right) - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Za drugi integral vidimo da imamo sličnu situaciju, osim što se sada pojavljuje polinom drugog stupnja. Kada napravimo parcijalnu integraciju dobit ćemo umnožak eksponencijalne i polinoma prvog stupnja. Iz zadatka koji smo maloprije riješili vidimo da treba još jednom izvesti parcijalnu integraciju. Dakle, pokazujemo primjer s dvostrukom primjenom parcijalne integracije:

$$\int (x^2+2x+3)e^x dx = \begin{bmatrix} u = x^2+2x+3 & du = 2x+2dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{bmatrix}$$
$$= \Big((x^2+2x+3)e^x\Big) - \int (2x+2)e^x dx = \begin{bmatrix} u = 2x+2 & du = 2dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{bmatrix}$$
$$= \Big((x^2+2x+3)e^x\Big) - ((2x+2)e^x) + \int 2e^x dx = (x^2+3)e^x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Napomena 9.3. Kod dvostruke primjene parcijalne integracije treba paziti na dvije stvari. Kao prvo, pazite na predznake: drugu parcijalnu integraciju vršimo na integral s negativnim predznakom. Druga stvar je paziti da se ne "izgubimo" u parcijalnoj integraciji. Kada drugi put izvodimo parcijalnu integraciju, ako stavimo krivi izbor za u i dv, vratit ćemo se na integral s kojim smo i krenuli.

Primjer 9.4. Izračunajte određeni integral $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}$.
Kao i u prošloj lekciji, u jednom zadatku vidjet ćemo nešto kompliciraniji primjer metode parcijalne integracije i razliku između primjene metode na određenim i neodređenim integralima.
Kao i u većini zadataka do sada, jedan od faktora podintegralne funkcije je polinom. Znamo da on voli biti deriviran, pa se nadamo da druga funkcija voli biti antiderivirana. Budući da joj je teško napamet vidjeti antiderivaciju, integrajmo ju sa strane. Cilj nam je naći antiderivaciju, pa zato računamo neodređeni integral sa strane. Vidimo li kako ćemo ga riješiti? Pojavljuje li se neka trigonometrijska funkcija s neparnom potencijom? Koja supstitucija će biti bolja?

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{bmatrix} = \int \frac{-dt}{t^3} = \frac{1}{2t^2} + C = \frac{1}{2\cos^2 x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Vratimo se na originalan zadatak: možemo staviti $u = x$ i $dv = \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$ jer $v = \frac{1}{2\cos^2 x}$. Dapače, i v ima tablični integral, pa smo sve probleme riješili. Pogledajmo sada kako to izgleda (uz novost zbog određenog integrala):

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x\sin x}{\cos^3 x} dx = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx & v = \frac{1}{2\cos^2 x} \end{bmatrix} = \left(\frac{x}{2\cos^2 x}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2\cos^2 x} dx$$
$$= \left(\frac{x}{2\cos^2 x}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} - \left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - \left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Konkretna razlika između računanja određenog i neodređenog integrala metodom parcijalne integracije je u novodobivenom članu bez integrala. Da smo ovdje trebali izračunati neodređeni integral, u prvom retku imali bismo član $\frac{x}{2\cos^2 x}$. U slučaju određenog

integrala taj član se ne uzima kao funkcija, nego imamo $\left(\frac{x}{2\cos^2 x}\right)\Big|_0^{\pi/4}$ (evaluiramo u granicama integracije).
Također, primijetimo da je podintegralna funkcija iz teksta zadatka nenegativna na intervalu $[0, \pi/4]$, pa je i njezin neodređeni integral takav.

Rekli smo da se polinomi "skoro uvijek" deriviraju. Jedina funkcija koja može nad njima imati prioritet je logaritam.

Primjer 9.5. Izračunajte sljedeće neodređene integrale:

- (9.1.b)) $\int x \ln x dx$,
- $\int \ln x dx$.

Kada bismo u prvom zadatku kao inače derivirali x, trebali bismo znati antiderivaciju od $\ln x$. To ne znamo, još, izračunat ćemo u drugom zadatku. S druge strane, kada bismo antiderivirali x, dobili bismo polinom drugog stupnja, a s njime derivaciju od $\ln x$, koja će se s tim polinomom lijepo ponašati. Zbog svoje jednostavne derivacije, $\ln x$ "ima prioritet" nad polinomima, u smislu da samo u tom slučaju polinome antideriviramo u parcijalnoj integraciji.

$$\int x \ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \left(\frac{x^2}{2}\ln x\right) - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Može se reći da logaritam toliko voli biti deriviran u parcijalnoj integraciji da mu ne treba poseban faktor. U drugom zadatku imamo samo jednu funkciju ($\ln x$), pa izmišljamo faktor 1 koji ćemo antiderivirati kako bi se $\ln x$ derivirao u parcijalnoj integraciji:

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} = (x \ln x) - \int \frac{x}{x}dx$$
$$= (x \ln x) - \int 1 dx = x \ln x - x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Slično se rješavaju i općenito integrali s logaritmima - u pravilu logaritam treba derivirati.

Pogledajmo još jedan primjer koji treba zapamtiti kako se izvodi (slično kao $\sin^2 x$ u prošloj lekciji).

Primjer 9.6. (9.1.h)) Odredite neodređeni integral $\int e^x \cos x dx$.
Kao što smo komentirali ranije, i eksponencijalna funkcija i trigonometrijske funkcije ne žale se ni na deriviranje ni na antideriviranje u parcijalnoj integraciji. Doista, nije bitno koji je prvi korak u rješavanju ovog zadatka (napravit ćemo na jedan način, može se i na obratan, možete pokušati sami).

$$\int e^x \cos x dx = \begin{bmatrix} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{bmatrix} = (e^x \sin x) - \int e^x \sin x dx.$$

Koliko je prvi korak bio nebitan, drugi je dosta bitan. Iako naoko nismo pojednostavnili problem, možemo ponovno izvesti parcijalnu integraciju. Kao što smo rekli ranije, kod višestrukog izvođenja parcijalne integracije bitno je koji član deriviramo, a koji antideriviramo. Budući da smo u već do sada derivirali e^x, moramo ga ponovno derivirati, a trigonometrijsku funkciju antideriviramo (jer smo je antiderivirali i ranije). Da sada učinimo obratno, samo bi se vratili na originalan problem. Zato dalje imamo

$$\int e^x \cos x dx = (e^x \sin x) - \int e^x \sin x dx = \begin{bmatrix} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{bmatrix}$$
$$= (e^x \sin x) - (e^x(-\cos x)) + \int e^x(-\cos x) dx = (e^x(\sin x + \cos x)) - \int e^x \cos x dx.$$

Naoko se čini da nismo dobili mnogo, no jesmo. Integral koji tražimo pojavio nam se s desne strane jednadžbe s negativnim predznakom. Ako ga označimo s I, imamo

$$I = (e^x(\sin x + \cos x)) - I \implies \int e^x \cos x dx = I = \frac{1}{2}(e^x(\sin x + \cos x)) + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Ovakav trik u rješavanju nije čest, ali ga treba zapamtiti.

Zadatak 9.7. Izračunajte sljedeće integrale:

a) (9.1.d)) $\int x^2 \sin x dx$

b) (9.2.a)) $\int \ln^2 x dx$

c) (9.2.e)) $\int x \cos^2 x dx$

d) (9.2.d)) $\int x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx$

e) (9.1.g), izmijenjen) $\int e^{2x} \sin(5x) dx$

f) (9.1.i)) $\int \cos(\ln x) dx$

g) (9.3.a)) $\int e^{\sqrt{x}} dx$

h) (9.3.c)) $\int e^{2x} \sin(e^x) dx$

i) (9.4.c)) $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$

j) (9.4.f)) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$

Za kraj pogledajmo jedan drugačiji i težak primjer zadatka iz integrala.

Primjer 9.8. (9.5.a)) Odredite rekurzivnu formulu za integral $I_n = \int \sin^n x dx,\ n \in \mathbb{N}_0$.
Općenito, niz zadan rekurzivnom formulom znači da mu zadamo nekoliko prvih članova i formulu kojom iz tih članova možemo izračunati sve ostale. Primjer za to je Fibonaccijev niz:

$$F_0 = F_1 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

U gornjoj formuli su zadani nulti i prvi član niza. Drugi računamo po formuli iz nultog i prvog. Treći računamo iz dobivenog drugog i zadanog prvog. Četvrti možemo iz izračunatog trećeg i četvrtog, i tako dalje.
Isto tako, trebali bismo odrediti formulu i zadati prvih par članova u našem zadatku. Nemamo još ideje kako će to izgledati, ali ovo je lekcija o parcijalnoj integraciji, pa ćemo tako početi.
Funkcija $\sin^n x$ može se na razne načine rastaviti na umnožak dva faktora. Budući da trebamo dobiti rekurzivnu formulu (koja će ovisiti o nekim prethodnim članovima I_{n-1}, $\ldots$), najbolje je rastaviti na umnožak $\sin^{n-1} x \cdot \sin x$. Prvoj funkciji ne znamo integral, pa ju deriviramo, jer drugoj je svejedno.

$$\begin{aligned}\int \sin^n x dx = &\begin{bmatrix} u = \sin^{n-1} x & du = (n-1)\sin^{n-2}\cos x dx \\ dv = \sin dx & v = -\cos x \end{bmatrix} \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1)\sin^{n-2}\cos^2 x dx.\end{aligned}$$

S druge strane jednakosti primjećujemo $\cos^2 x$ koji posljedicom Pitagorinog teorema možemo pretvoriti u $sin^2 x$. Na taj način svi integrali s desne strane jednakosti bit će izraženi preko $\sin^k x$:

$$\begin{aligned}\int \sin^n x dx &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1)\sin^{n-2}(1-\sin^2 x) dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x - \int (n-1)\sin^n \sin^2 x + \int (n-1)\sin^{n-2} dx.\end{aligned}$$

Sada sve integrale možemo zapisati pomoću oznake I_n iz teksta zadatka:

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x - (n-1)I_n + (n-1)I_{n-2},$$

a iz te jednakosti možemo izraziti I_n preko sve ostalog:

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Na ovaj način dobili smo rekurzivnu formulu: za računanje proizvoljnog integrala I_n potrebno je znati vrijednost integrala I_{n-2}.

Odredimo još nekoliko početnih vrijednosti za I_n (kao što je u Fibonaccijevom nizu definirano F_0 i F_1). Kada bismo sa strane direktno izračunali samo I_0, ne bismo mogli izračunati I_1 iz rekurzivne formule. Ako pak sa strane izračunamo I_0 i I_1, onda možemo

izračunati sve ostale vrijednosti koristeći dobivenu rekurzivnu formulu.
Vrijedi $I_0 = \int dx = x + C,\ C \in \mathbb{R}$ i $I_1 = \int \sin x dx = -\cos x + C,\ C \in \mathbb{R}$.

Sada je zadatak gotov. Niz I_n zadan je s početnim vrijednostima $I_0 = x + C,\ C \in \mathbb{R}$ i $I_1 = -\cos x + C,\ C \in \mathbb{R}$ i rekurzivnom formulom

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Primijetite da gornjom fomulom možemo izračunati i $\int \sin^2 x dx$, integral koji inače moramo znati i drugačije izračunati, ali i proizvoljan integral $\int \sin^n x dx$, ako smo dovoljno strpljivi s primjenom rekurzivne formule.

Nakon što riješite sve zadatke iz ovog materijala, savjetujemo da riješite i sve materijale s weba.

Upute za neke zadatke za samostalno rješavanje

Zadatak 9.7.c) Integrirajte sa strane (ako trebate) $\cos^2 x$.

Zadatak 9.7.d) Znate što raditi s logaritmom. Zatim nađite pravu supstituciju.

Zadatak 9.7.e) Primijenite ideju iz Primjera 9.6.

Zadatak 9.7.f) Primijenite ideju iz Primjera 9.6.

Zadatak 9.7.g),h) Prvo supstitucija, pa parcijalna integracija.

Rješenja zadataka za samostalno rješavanje

Rješenje zadatka 9.7:

a) Ovaj integral se rješava na sličan način kao integral oblika $\int x \sin x dx$, jedino što u ovom slučaju 2 puta primijenjujemo formulu za parcijalnu integraciju. Imamo

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin x dx &= \begin{bmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{bmatrix} \\
&= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx \\
&= \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{bmatrix} \\
&= -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x dx \right) \\
&= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
&= (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

b) Ideja u ovom zadatku je zapisati $\ln^2 x = \ln x \cdot \ln x$, i onda derivirati jedan, a antiderivirati drugi dio. Iz primjera 9.5) znamo da je $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$. Računamo

$$\begin{aligned}
\int \ln^2 x dx &= \int \ln x \cdot \ln x dx \\
&= \begin{bmatrix} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = \ln x dx & v = x \ln x - x \end{bmatrix} \\
&= x \ln^2 x - x \ln x - \int \frac{x \ln x - x}{x} dx \\
&= x \ln^2 x - x \ln x - \int \ln x dx + \int dx \\
&= x \ln^2 x - x \ln x - (x \ln x - x) + x + C \\
&= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

c) Jasno je da ćemo u parcijalnoj integraciji derivirati x i antiderivirati $\cos^2 x$. Iz zadatka 8.16c) znamo $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$ (iskoristimo $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

i ovdje stavimo supstituciju $t = 2x$). Odavde slijedi

$$\begin{aligned}
\int x\cos^2 x dx &= \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos^2 x dx & v = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \end{bmatrix} \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x\sin(2x)}{4} - \int \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right) dx \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x\sin(2x)}{4} - \frac{1}{2} \cdot \int x dx - \frac{1}{4} \cdot \int \sin(2x) dx \\
&= \begin{bmatrix} t = 2x \\ dt = 2dx \end{bmatrix} \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x\sin(2x)}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \int \frac{\sin t}{2} dt \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x\sin(2x)}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos t}{8} + C \\
&= \frac{x^2}{4} + \frac{x\sin(2x)}{4} + \frac{\cos(2x)}{8} + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

d) Jasno, u parcijalnoj integraciji ćemo derivirati logaritam, stoga najprije računamo

$$\begin{aligned}
\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' &= \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' \\
&= \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{2}{1-x^2} \\
&= \frac{-2}{x^2-1}
\end{aligned}$$

Sada računamo

$$\begin{aligned}
\int x \ln\frac{1+x}{1-x} dx &= \begin{bmatrix} u = \ln\frac{1+x}{1-x} & du = \frac{-2}{x^2-1} dx \\ dv = x dx & v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \int \frac{x^2}{x^2-1} dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \int \frac{x^2-1+1}{x^2-1} dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \int dx + \int \frac{1}{x^2-1} dx \\
&= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \\
&= \frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + x - \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C \\
&= \frac{1}{2}(x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x} + x + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Integral u 4. redu čitamo iz tablice, a apsolutne vrijednosti se rješavamo (uz promjenu predznaka) jer je u zadatku, budući da je zadan $\ln \frac{1+x}{1-x}$ implicitno navedeno da je $\frac{1+x}{1-x} > 0$. Također, u šestom redu smo zamijenili brojnik i nazivnik unutar logaritma (i promijenili predznak) jer je $-\ln a = \ln a^{-1}$.

e) Ovdje je svejedno koju funkciju deriviramo u formuli parcijalne integracije, samo treba paziti na argumente (2x i 5x) da se ne dogodi nepotrebna greška. Također, koristi se isti trik kao u primjeru 9.6

$$
\begin{aligned}
\int e^{2x}\sin(5x)dx &= \begin{bmatrix} u = e^{2x} & du = 2e^{2x}dx \\ dv = \sin(5x)dx & v = -\frac{1}{5}\cos(5x) \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{5}e^{2x}\cos(5x) + \frac{2}{5}\int e^{2x}\cos(5x)dx \\
&= \begin{bmatrix} u = e^{2x} & du = 2e^{2x}dx \\ dv = \cos(5x)dx & v = \frac{1}{5}\sin(5x) \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{5}e^{2x}\cos(5x) + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{5}e^{2x}\sin(5x) - \frac{2}{5}\int e^{2x}\sin(5x)dx\right) \\
\implies \frac{29}{25}\int e^{2x}\sin(5x)dx &= \frac{2}{25}e^{2x}\sin(5x) - \frac{1}{5}e^{2x}\cos(5x) + C \\
\implies \int e^{2x}\sin(5x) &= \frac{1}{29}e^{2x}\left(2\sin(5x) - 5\cos(5x)\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

f) Kako baš ne znamo naći antiderivaciju kompozicije, jedina ideja je derivirati ovu funkciju, i uzeti antiderivaciju od 1 (kad deriviramo, iz logaritma ćemo dobiti član $\frac{1}{x}$, što će se pokratiti s antiderivacijom od 1, tj. x)

$$
\begin{aligned}
\int \cos(\ln x)dx &= \begin{bmatrix} u = \cos(\ln x) & du = -\frac{\sin(\ln x)}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} \\
&= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)dx \\
&= \begin{bmatrix} u = \sin(\ln x) & du = \frac{\cos(\ln x)}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{bmatrix} \\
&= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx \\
\implies \int \cos(\ln x) &= \frac{x}{2}(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

g) Uočimo najprije da ne možemo odmah primijeniti formulu za parcijalnu integraciju. (jedini pokušaj koji ima smisla je $u = e^{\sqrt{x}}$ i $dv = dx$, ali to ne daje ništa pametno). Zato je ideja da najprije napravimo supstituciju i probamo dobiti ljepši oblik.

Imamo

$$\begin{aligned}
\int e^{\sqrt{x}}dx &= \begin{bmatrix} t=\sqrt{x} \implies x=t^2 \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} \\
&= 2\int te^t dt \\
&= \begin{bmatrix} u=t & du=dt \\ dv=e^t dt & v=e^t \end{bmatrix} \\
&= 2\left(te^t - \int e^t dt\right) \\
&= 2(t-1)e^t + C \\
&= 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C, \quad C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

h) Kao u prethodnom zadatku, opet ne dobijemo ništa lijepo ako odmah parcijalno integriramo (ako stavimo $u = e^{2x}$, ne znamo uopće odrediti v, a ako stavimo $u = \sin(e^x)$, integral $\int vdu$ postaje $\int e^{3x}\cos(e^x)$, tj. eksponenti u integralu rastu sa svakom primjenom formule parcijalne integracije, pa ne možemo primijeniti trik iz primjera 9.6). Stoga je ideja ista kao i u prethodnom zadatku, želimo najprije naći pametnu supstituciju.

$$\begin{aligned}
\int e^{2x}\sin(e^x)dx &= \begin{bmatrix} t=e^x \\ dt = e^x dx \end{bmatrix} \\
&= \int t\sin t dt \qquad (e^{2x}dx = e^x\cdot e^x dx = t\cdot dt) \\
&= \begin{bmatrix} u=t & du=dt \\ dv=\sin t dt & v=-\cos t \end{bmatrix} \\
&= -t\cos t + \int \cos t dt \\
&= -t\cos t + \sin t + C \\
&= \sin(e^x) - e^x\cos(e^x) + C, \quad C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

i) Ovdje, iako izgleda banalno, posao dosta olakšava supstitucija $t = x+1$ (jer se derivacija u ovom slučaju lijepo skrati kad primijenjujemo parcijalnu integraciju), a u krajnjoj liniji, zadatak postaje gotovo isti kao primjer 9.5)

$$\begin{aligned}\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx &= \begin{bmatrix} t = x+1 & e-1 \to e \\ dt = dx & 0 \to 1 \end{bmatrix} \\ &= \int_1^e \ln t dt \\ &= \begin{bmatrix} u = \ln t & du = \frac{dt}{t} \\ dv = dt & v = t \end{bmatrix} \\ &= (t \ln t)\Big|_1^e - \int_1^e dt \\ &= e \cdot \ln e - 1 \cdot \ln 1 - (e-1) \\ &= 1\end{aligned}$$

j) Ovaj zadatak je prilično "straightforward", naprosto primijenimo formulu za parcijalnu integraciju u kojoj deriviramo $\ln x$.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx &= \begin{bmatrix} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{bmatrix} \\ &= -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} \\ &= -\left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 1}{1}\right) - \frac{1}{x}\Big|_1^2 \\ &= -\frac{\ln 2}{2} - \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 - \ln 2)\end{aligned}$$

10

Integriranje racionalnih funkcija

Racionalne funkcije su oblika $\frac{p(x)}{q(x)}$, pri čemu su p i q proizvoljni polinomi, i naravno $q \neq 0$. Već smo se susreli s nekim primjerima integrala racionalnih funkcija, npr. znamo

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R},$$

i

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

No, zasada nemamo razvijen univerzalni princip koji bi riješio integral proizvoljne racionalne funkcije. Krenimo od jednostavnog primjera.

Primjer 10.1. Odredite integral

$$\int \frac{3x}{x^2 - x - 2} dx.$$

Nije baš očito kako bismo krenuli rješavati ovaj integral. Možemo možda probati supstitucijom $t = x^2 - x - 2$, no tada je $dt = (2x - 1)dx$, pa vidimo da nam u brojniku podintegralne funkcije fali nekakav slobodni član. Možemo ga probati dodati i oduzeti, no tada bi se problem sveo na računanje integrala oblika

$$\int \frac{c}{x^2 - x - 2} dx$$

za neku konstantu $c \in \mathbb{R}$, ali to je (pokazat će se) zapravo problem istog tipa kao početni integral. Princip koji moramo primijeniti je **rastav na parcijalne razlomke**. Ako faktoriziramo nazivnik, vidimo da je

$$\frac{3x}{x^2 - x - 2} = \frac{3x}{(x-2)(x+1)},$$

što dalje možemo zapisati kao

$$\frac{3x}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2},$$

a pribrojnike zdesna u gornjoj jednakosti znamo integrirati. Konačno,

$$\int \frac{3x}{x^2 - x - 2} dx = \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{2}{x-2} dx = \ln|x+1| + 2\ln|x-2| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Metoda rastava na parcijalne razlomke je **univerzalni princip kojim se rješavaju integrali racionalnih funkcija**. Ideja je "kompliciranu" racionalnu funkciju dekomponirati na sumu "jednostavnijih" racionalnih funkcija koje znamo integrirati. Ključno u korištenju te metode je znati pretpostaviti kojeg oblika su te "jednostavnije" racionalne funkcije na koje ćemo dekomponirati početnu funkciju. Kao što ćemo vidjeti, to možemo odrediti iz faktorizacije nazivnika početne racionalne funkcije. Također, treba imati na umu da se rastav na parcijalne razlomke racionalne može primijeniti na funkcije oblika $\frac{p(x)}{q(x)}$ samo ako je to tzv. prava racionalna funkcija, tj. ako je $\deg p(x) < \deg q(x)$. Ako to nije slučaj, treba prvo podijeliti polinom p polinomom q.

Primjer 10.2. Odredite integral

$$\int \frac{x^2 + 3x + 5}{x+1} dx.$$

Budući da je $\deg(x^2 + 3x + 5) \geq \deg(x+1)$, moramo podijeliti polinome. Dobivamo

$$\frac{x^2 + 3x + 5}{x+1} = x + 2 + \frac{3}{x+1}.$$

Budući da je nazivnik stupnja 1, nema faktorizacije i rastava na parcijalne razlomke, već direktno integriramo

$$\int \frac{x^2 + 3x + 5}{x+1} dx = \int (x+2) dx + \int \frac{3}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 3\ln|x+1| + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 10.3. Odredite integrale

(a) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x+2} dx$,

(b) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^3}{x^2 - x} dx$.

Dakle, integrali racionalnih funkcija su veoma specifični jer, za razliku od inače, postoji točan algoritam koji izvesti prilikom integracije. U sljedećim lekcijama bit će zadataka koji će se i svoditi na racionalne funkcije. Rješavanje možda potraje, ali znate da ćete doći do rješenja. Ključni dio je svladati rastav na parcijalne razlomke. Tome ćemo se sada posvetiti, a na kraju ćemo vidjeti kako integrirati članove koji se javljaju u rastavu.

Da bismo racionalnu funkciju $\frac{p(x)}{q(x)}$ rastavili na parcijalne razlomke, radimo sljedeće:

(1) Provjerimo radi li se o pravoj racionalnoj funkciji, odnosno je li

$$\deg p(x) < \deg q(x).$$

Ako nije, podijelimo polinome.

(2) Faktoriziramo nazivnik $q(x)$ u produkt linearnih i ireducibilnih kvadratnih faktora. Ireducibilni kvadratni faktori su oni koji nemaju realnih nultočaka, npr. $x^2+1, x^2+2x+3, \ldots$.

(3) Dobiveni faktori određuju oblik dekompozicije na parcijalne razlomke, i to na sljedeći način:

(a) Ako faktorizacija od $q(x)$ sadrži linearan faktor $ax+b$, dekompozicija će sadržavati član oblika $\frac{A}{ax+b}$.

(b) Ako faktorizacija od $q(x)$ sadrži linearan faktor na n-tu potenciju $(ax+b)^n$, dekompozicija će sadržavati sumu oblika

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}.$$

(c) Ako faktorizacija od $q(x)$ sadrži ireducibilni kvadratni faktor ax^2+bx+c, dekompozicija će sadržavati član oblika $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$.

(d) Ako faktorizacija od $q(x)$ sadrži ireducibilni kvadratni faktor na n-tu potenciju $(ax^2+bx+c)^n$, dekompozicija će sadržavati sumu oblika

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

(4) Odredimo konstante u dobivenom rastavu.

Primijenimo gornji recept na nekoliko primjera kako bismo pronašli rastav na parcijalne razlomke za neke racionalne funkcije.

Primjer 10.4. Odredite rastav na parcijalne razlomke sljedećih funkcija:

(a) $\frac{2x-3}{x^3+x}$.

Radi se o pravoj racionalnoj funkciji (kao i u iduća tri primjera pa to nećemo više naglašavati), pa možemo odmah faktorizirati nazivnik. Trivijalno se vidi

$$x^3+x = x(x^2+1).$$

U faktorizaciji se nalazi linearan faktor , x, pa ćemo u rastavu imati član $\frac{A}{x}$; i ireducibilni kvadratni faktor, x^2+1, pa ćemo u rastavu imati član $\frac{Bx+C}{x^2+1}$. Dakle,

$$\frac{2x-3}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Idući je korak odrediti konstante A, B i C. Pomnožimo cijelu jednakost s nazivnicima, dakle s $x(x^2+1)$, pa dobivamo

$$2x-3 = A(x^2+1) + x(Bx+C).$$

Ovdje možemo nastaviti na 2 načina:

(i) Uvrštavamo proizvoljne vrijednosti za x, kako bismo dobili vezu između nepoznanica. Zgodno je uvrstiti (ako je moguće) nultočke faktora od $q(x)$, što je u ovom slučaju samo $x = 0$. Uvrštavanjem dobivamo $A = -3$. Vratimo to u jednakost, dobivamo

$$2x - 3 = -3(x^2 + 1) + x(Bx + C) \Leftrightarrow 3x^2 + 2x = Bx^2 + Cx,$$

odakle je naravno $B = 3, C = 2$. Traženi rastav je

$$\frac{2x-3}{x^3+x} = \frac{-3}{x} + \frac{3x+2}{x^2+1}.$$

(ii) Druga mogućnost je jednakost shvatiti kao jednakost polinoma, te iskoristiti činjenicu da su dva polinoma jednaka ako i samo ako imaju iste koeficijente uz odgovarajuće potencije. Odnosno,

$$2x - 3 = A(x^2 + 1) + x(Bx + C) \Leftrightarrow 2x - 3 = (A + B)x^2 + Cx + A.$$

Sada mora vrijediti

$$A + B = 0,\ C = 2,\ A = -3.$$

Iz prve jednadžbe onda dobijemo $B = 3$, te naravno isti rastav kao i pod (i).

(b) $\frac{1}{x^3-8}$.
Faktoriziramo $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$. Drugi faktor je ireducibilan, tj. nema realnih nultočaka. Zato je rastav na parcijalne razlomke oblika

$$\frac{1}{x^3-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4}.$$

Množeći s nazivnikom dobivamo

$$1 = A(x^2+2x+4)+(x-2)(Bx+C) \Leftrightarrow 1 = (A+B)x^2+(2A-2B+C)x+(4A-2C),$$

odakle je

$$A + B = 0,\ 2A - 2B + C = 0,\ 4A - 2C = 1.$$

Rješenje ovog sustava je $A = \frac{1}{12}, B = \frac{-1}{12}, C = \frac{-1}{3}$, pa je traženi rastav

$$\frac{1}{x^3-8} = \frac{\frac{1}{12}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{12}x - \frac{1}{3}}{x^2+2x+4}.$$

(c) $\frac{x^3}{(x^2+1)^2}$.
Nazivnik je zapravo već faktoriziran, imamo samo jedan faktor, ali s potencijom dva. Rastav na parcijalne razlomke tada će biti oblika

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}.$$

Množeći s nazivnicima i sređujući izraz dobivamo

$$x^3 = Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D),$$

a rješavanjem sustava slijedi $A = 1, B = 0, C = -1, D = 0$. Rastav na parcijalne razlomke je

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

(d) $\frac{x^2+3x+1}{(x+2)(x-3)^2(x^2+4)^2}$.
U ovome primjeru ćemo samo odrediti oblik rastava na parcijalne razlomke, nećemo računati same konstante. Nazivnik je već faktoriziran, pa zaključujemo ovako:

- linearni faktori $x + 2$ pa rastav sadrži član $\frac{A}{x+2}$.
- linearni faktor $x - 3$ ali s potencijom 2, pa rastav sadrži sumu

$$\frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}.$$

- ireducibilni kvadratni član $x^2 + 4$ s potencijom 2, pa rastav sadrži sumu

$$\frac{Dx+E}{x^2+4} + \frac{Fx+G}{(x^2+4)^2}.$$

Dakle, rastav na parcijalne razlomke je oblika

$$\frac{x^2+3x+1}{(x+2)(x-3)^2(x^2+4)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+4} + \frac{Fx+G}{(x^2+4)^2}.$$

Kada rastavimo racionalnu funkciju na parcijalne razlomke, preostaje ih integrirati. U dobivenom rastavu pojavljuje se šest tipova članova za koje ćemo pokazati kako ih integrirati.

Od linearnih faktora "dolaze" članovi $\frac{1}{x+c}$ i $\frac{1}{(x+c)^n}$ za neku konstantu $c \in \mathbb{R}$. Oni su najjednostavniji i već ih znamo integrirati, naime

$$\int \frac{dx}{x+c} = \ln|x+c| + C,\ C \in \mathbb{R},$$

$$\int \frac{dx}{(x+c)^n} = \int (x+c)^{-n} dx = -\frac{1}{(n-1)(x+c)^{n-1}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Od ireducibilnih kvadratnih članova "dolaze" članovi $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ i $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$. Prilikom integracije ovih članova prvi je korak uvijek napraviti odgovarajuću supstituciju, kako bi nazivnik dobio formu $x^2 + d$ tj. $(x^2 + d)^n$, za neku nenegativnu konstantu $d \geq 0$. Supstituciju nađemo nadopunjavanjem do potpunog kvadrata. Da se previše ne gubimo u konstantama A, B, a, b, c, d, ilustrirat ćemo ideju na primjeru.

Primjer 10.5. Promotrimo funkciju sličnu onoj koja se pojavila u primjeru 10.4(b), npr.

$$\frac{2x+3}{x^2+2x+4}.$$

Transformirajmo nazivnik na sljedeći način,

$$x^2+2x+4=(x^2+2x+1)+3=(x+1)^2+3.$$

Željena supstitucija je sada $t=x+1$. Time smo dobili traženi oblik, jer je

$$\frac{2x+3}{x^2+2x+4}=\frac{2(x+1)+1}{(x+1)^2+3}=\frac{2t+1}{t^2+1}.$$

Primijetite da bi manipulacija bila potpuno ista da smo imali posla sa izrazom tipa

$$\frac{2x+3}{(x^2+2x+4)^n}.$$

Korištenjem gore opisane supstitucije zapravo integrale članova oblika $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ i $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$ svodimo na integrale članova oblika $\frac{Ax+B}{x^2+c}$ i $\frac{Ax+B}{(x^2+c)^n}$, pri čemu je $c\geq 0$, pa je dovoljno znati integrirati svaki od njih. Za prvi spomenuti, situacija je opet sasvim poznata, naprosto imamo

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+c}dx=A\int\frac{x}{x^2+c}dx+B\int\frac{1}{x^2+c}dx.$$

Za prvi integral vrijedi (ako ne vidite odmah, supstituirajte $t=x^2$)

$$\int\frac{x}{x^2+c}dx=\frac{1}{2}\ln|x^2+c|+C,\ C\in\mathbb{R},$$

a za drugi

$$\int\frac{1}{x^2+c}dx=\frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right)+C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Preostaje pokazati kako integriramo članove oblika $\frac{Ax+B}{(x^2+c)^n}$, odnosno koristeći linearnost, dovoljno je znati integrirati $\frac{x}{(x^2+c)^n}$ i $\frac{1}{(x^2+c)^n}$. Prvi je jednostavan, (ponovo, ako niste sigurni supstituirajte $t=x^2$)

$$\int\frac{x}{(x^2+c)^n}dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n-1)(x^2+c)^{n-1}}+C,C\in\mathbb{R}.$$

Za drugi integral, stvari su nažalost nešto kompliciranije. Srećom, on se na fakultetu ne pojavljuje često u praksi (tj. na kolokvijima). Promotrimo primjer.

Primjer 10.6. Odredite integral

$$\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx.$$

Ideja u svim integralima ovog tipa je koristeći parcijalnu integraciju smanjivati potenciju nazivnika dok ne postane 1 (u našem slučaju potencija je 2 pa ćemo imati samo jednu parcijalnu integraciju). Račun je sljedeći

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2}dx = \\ &= \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \\ &= \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = (*).\end{aligned}$$

Preostaje riješiti posljednji integral, a tu nastupa parcijalna integracija.

$$x = u, \quad dx = du,$$

$$dv = \frac{x}{(1+x^2)^2}, \quad v = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}.$$

Dobivamo

$$\begin{aligned}(*) &= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} - \int \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}dx = \\ &= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C = \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{x^2+1}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Nakon što smo opisali tehniku rastava na parcijalne razlomke i tehniku integracije svakoga od njih, riješimo nekoliko cjelovitih primjera.

Primjer 10.7. Odredite integrale sljedećih racionalnih funkcija:

(a) $\displaystyle\int \frac{x-2}{(2x-1)^2(x-1)}dx.$

Rastavimo na parcijalne razlomke. Zbog oblika faktora u nazivniku znamo da će rastav imati sljedeći oblik,

$$\frac{x-2}{(2x-1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{(2x-1)^2}.$$

Množenjem s nazivnicima dobivamo

$$x-2 = A(2x-1)^2 + B(x-1)(2x-1) + C(x-1).$$

Ako uvrstimo $x = \frac{1}{2}$ dobivamo $C = 3$, iz čega slijedi

$$-2x+1 = A(2x-1)^2 + B(x-1)(2x-1),$$

odakle uvrštavanjem $x = 1$ dobivamo $A = -1$, te na kraju $B = 2$. Sada možemo integrirati

$$\int \frac{x-2}{(2x-1)^2(x-1)}dx = \int \frac{-1}{x-1}dx + \int \frac{2}{2x-1}dx + \int \frac{3}{(2x-1)^2}dx =$$

$$= -\ln|x-1| + \ln|2x-1| - \frac{3}{2}\frac{1}{2x-1} + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x^2+8x+11}{x^2+2x+3}dx.$

Primijetimo prvo da racionalna funkcija nije prava jer stupanj brojnika nije manji od stupnja nazivnika. Stoga treba prvo podijeliti polinome. Dobivamo

$$\frac{2x^2+8x+11}{x^2+2x+3} = 2 + \frac{4x+5}{x^2+2x+3}.$$

Primijetimo da je kvadratni član x^2+2x+3 ireducibilan, tj. nema realnih nultočaka (zaista, diskriminanta je $2^2 - 4 \cdot 3 < 0$). Stoga je on zapravo faktoriziran, pa već imamo rastav na parcijalne razlomke.

$$\int \frac{2x^2+8x+11}{x^2+2x+3}dx = \int 2\,dx + \int \frac{4x+5}{x^2+2x+3}dx = 2x + \int \frac{4x+5}{(x+1)^2+2}dx =$$

$$= \begin{bmatrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{bmatrix} = 2x + \int \frac{4t+1}{t^2+2}dt = 2x + 4\int \frac{t}{t^2+2}dt + 5\int \frac{1}{t^2+2}dt =$$

$$= 2x+2\ln(t^2+2)+\frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C = 2x+2\ln(x^2+2x+3)+\frac{5}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C, \ C \in \mathbb{R}.$$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx.$

Zadana racionalna funkcija je prava, pa možemo krenuti na faktorizaciju nazivnika,

$$x^4 + x = x(x^3+1) = x(x+1)(x^2-x+1).$$

Faktor $x^2 - x + 1$ nema realnih nultočaka, pa znamo oblik rastava na parcijalne razlomke:

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

Množeći s nazivnicima slijedi

$$x^3+4x^2-2x+1 = A(x+1)(x^2-x+1) + Bx(x^2-x+1) + (Cx+D)x(x+1),$$

te nakon sređivanja

$$x^3+4x^2-2x+1 = x^3(A+B+C) + x^2(-B+C+D) + x(B+D) + A.$$

Izjednačimo koeficijente uz iste potencije, dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -B+C+D=4 \\ B+D=-2 \\ A=1, \end{cases}$$

čije je rješenje $A=1, B=-2, C=2, D=0$. Sada računamo početni integral

$$\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{-2}{x+1}dx + \int \frac{2x}{x^2-x+1}dx =$$

$$= \ln|x| - 2\ln|x+1| + 2\int \frac{x}{x^2-x+1}dx = (*).$$

Izračunajmo i preostali integral. Nazivnik nadopunimo do potpunog kvadrata, dobivamo

$$x^2-x+1 = \left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4} = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4},$$

pa je

$$\int \frac{x}{x^2-x+1}dx = \begin{bmatrix} t = x-\frac{1}{2} \\ dt = dx \end{bmatrix} = \int \frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt =$$

$$= \int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}dt = \frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Konačno,

$$(*) = \ln|x| + 2\ln|x+1| + \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Zadatak 10.8. Odredite integrale sljedećih racionalnih funkcija:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-2x^2+x}dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^4}{(x+1)^3}dx,$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2-x}{(x+1)(x^2+1)}dx,$

(d) $\displaystyle\int \frac{2x^3+3x^2+x-1}{(x^2+2x+2)^2}dx.$

Nakon što riješite sve zadatke iz ovog materijala, savjetujemo da riješite i sve materijale s weba.

Rješenja zadataka za samostalno rješavanje

Rješenje zadatka 10.3:

(a) Kako je stupanj i u brojniku i u nazivniku jednak 1, čak ne moramo ni provoditi postupak rastava na parcijalne razlomke, nego lagano dobivamo

$$\begin{aligned}\int \frac{x-3}{x+2}dx &= \int \frac{x+2-5}{x+2}dx \\ &= \int \left(1-\frac{5}{x+2}\right)dx \\ &= x-5\ln|x+2|+C, \quad C\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

(b) Kako je stupanj brojnika veći od stupnja nazivnika, najprije dijelimo polinome. Dobivamo

$$(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1 = (x+4)(x^2-x)+7x+1.$$

Nadalje, nakon rastava na parcijalne razlomke, dobivamo

$$\frac{7x+1}{x^2-x} = \frac{8}{x-1} - \frac{1}{x}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx &= \int \frac{(x+4)(x^2-x)+7x+1}{x^2-x}dx \\ &= \int \left(x+4-\frac{7x+1}{x(x-1)}\right)dx \\ &= \int \left(x+4-\frac{8}{x-1}+\frac{1}{x}\right)dx \\ &= \frac{x^2}{2}+4x-8\ln|x-1|+\ln|x|+C\end{aligned}$$

Rješenje zadatka 10.8:

(a) Naravno, najprije rastavljamo na parcijalne razlomke, a da bismo to mogli, uočimo najprije

$$x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$$

Slijedi da je rastav oblika

$$\frac{1}{x^3-2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Odavde lagano dobivamo $A = 1$, $B = -1$ i $C = 1$.
Dakle, dobivamo

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \\ &= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C \\ &= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + C\end{aligned}$$

(b) Kako je polinom u brojniku većeg stupnja od onog u nazivniku, najprije dijelimo te polinome. Dobivamo

$$x^4 = (x-3)(x+1)^3 + 6x^2 + 8x + 3$$

Kako je polinom u nazivniku već faktoriziran, slijedi da je rastav ostatka na parcijalne razlomke oblika.

$$\frac{6x^2 + 8x + 3}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

Odavde se lako dobije $A = 6$, $B = -4$ i $C = 1$, odnosno, rastav je

$$\frac{6x^2 + 8x + 3}{(x+1)^3} = \frac{6}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$$

Sada dobivamo

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{(x+1)^3} dx &= \int \left(\frac{6}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx \\ &= 6\ln|x+1| + \frac{4}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C\end{aligned}$$

(c) Vidimo da je funkcija prava racionalna, i da je nazivnik već faktoriziran, te da je polinom $x^2 + 1$ ireducibilan. Slijedi da je rastav na parcijalne razlomke oblika

$$\frac{x^2 - x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Svođenjem na zajednički nazivnik i izjednačavanjem pripadnih koeficijenata, dobivamo sustav

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ B + C = -1 \\ A + C = 0 \end{cases}$$

Lako se dobiju rješenja $A = 1$, $B = 0$ i $C = -1$, odnosno rastav oblika

$$\frac{x^2 - x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+1}.$$

Odavde slijedi, koristeći poznati integral $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C$,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-x}{(x+1)(x^2+1)} dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \ln|x+1| - \operatorname{arctg} x + C \end{aligned}$$

(d) Uočimo da je stupanj polinoma u nazivniku jednak 4, dakle racionalna funkcija u pitanju je prava racionalna funkcija, te da je ireducibilan, odnosno, polinom x^2+2x+2 nema realnih nultočaka. Slijedi da je rastav na parcijalne razlomke oblika

$$\frac{2x^3+3x^2+x-1}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}.$$

Svođenjem na zajednički nazivnik i izjednačavanjem pripadnih koeficijenata dobivamo sustav

$$\begin{cases} A = 2 \\ 2A + B = 3 \\ 2A + 2B + C = 1 \\ 2B + D = -1 \end{cases}$$

Odavde slijedi da je $A = 2$, $B = -1$, $C = -1$ i $D = 1$, odnosno, da je rastav oblika

$$\frac{2x^3+3x^2+x-1}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{2x-1}{x^2+2x+2} - \frac{x-1}{(x^2+2x+2)^2}.$$

Slijedi

$$\int \frac{2x^3+3x^2+x-1}{(x^2+2x+2)^2} = \int \frac{2x-1}{x^2+2x+2} dx - \int \frac{x-1}{(x^2+2x+2)^2} dx$$

Kako je $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$, koristeći tehniku kao u primjeru 10.5 uz supstituciju $t = x+1$ dobivamo

$$\frac{2x-1}{x^2+2x+2} = \frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2+1} = \frac{2t-3}{t^2+1}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{x^2+2x+2} dx &= \begin{bmatrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{bmatrix} \\ &= \int \frac{2t-3}{t^2+1} dt \\ &= 2 \int \frac{t}{t^2+1} dt - 3 \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= \ln(t^2+1) - 3 \operatorname{arctg} t + C \\ &= \ln(x^2+2x+2) - 3 \operatorname{arctg}(x+1) + C \end{aligned}$$

S druge strane, imamo

$$\frac{x-1}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{(x+1)-2}{((x+1)^2+1)^2} = \frac{t-2}{(t^2+1)^2}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{t}{(t^2+1)^2}dt &= \begin{bmatrix} u = t^2+1 \\ du = 2tdt \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}du \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u} + C \\ &= \frac{-1}{2(x^2+2x+2)} + C\end{aligned}$$

Nadalje, vidimo da je integral $\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt$ zapravo integral iz primjera 10.6, odnosno

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} t + \frac{t}{t^2+1}\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}(x+1) + \frac{x+1}{x^2+2x+2}\right) + C\end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{(x^2+2x+2)^2}dx &= \int \frac{t}{(t^2+1)^2} - 2\int \frac{1}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{-1}{2(x^2+2x+2)} - \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{x+1}{x^2+2x+2} + C \\ &= \frac{-2x-3}{2x^2+4x+4} - \operatorname{arctg}(x+1) + C\end{aligned}$$

Napokon, imamo

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+3x^2+x-1}{(x^2+2x+2)^2}dx &= \int \frac{2x-1}{x^2+2x+2}dx - \int \frac{x-1}{(x^2+2x+2)^2}dx \\ &= \frac{2x+3}{2x^2+4x+4} + \ln(x^2+2x+2) - 2\operatorname{arctg}(x+1) + C\end{aligned}$$

11

Integriranje trigonometrijskih funkcija

Integrali trigonometrijskih funkcija najčešće se rješavaju koristeći supstitucije i trigonometrijske identitete. Dobar pokušaj supstitucije je očigledno $t = \sin x$ ili $t = \cos x$. To je dovoljno, uz poneke manipulacije izraza, za (manji) dio trigonometrijskih integrala.

Primjer 11.1. Odredite integrale

(a) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx.$
Primijetimo da je zgodna supstitucija $t = \sin x$, naime:

$$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx = \int \frac{\cos x(\cos^2 x + \cos^4 x)}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{1 - t^2 + (1 - t^2)^2}{t^2 + t^4} dt = \int \frac{2 - 3t^2 + t^4}{t^2(1 + t^2)} dt,$$

čime smo integral doveli na dobro poznati teren, integral racionalne funkcije. Dovršite primjer.

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} dx.$
Transformirajmo funkciju koristeći $1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2$, slijedi

$$\frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} = \frac{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^4 x} =$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} + 2\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Posljednja 2 pribrojnika iz gornje sume znamo integrirati, pa se pozabavimo prvim. On se zapravo svodi na jednostavan integral neočiglednom **supstitucijom**

$\boldsymbol{t = \operatorname{tg} x}$. To je supstitucija koju vrijedi zapamtiti, jer može jako pojednostavniti integral. Ovdje dobivamo trivijalno

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x}\ dx \end{bmatrix} = \int t^2\ dt =$$

$$= \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Sada znamo i početni integral

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx + 2 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 11.2. Odredite integrale

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x} dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x (2\cos^2 x - 1)} dx.$

Dok ponekad, kao u gornjim primjerima, moramo "nabosti" kako transformirati izraz prije nego se nametne supstitucija, postoje i tipovi trigonometrijskih integrala za koje postoji sustavni pristup. Pozabavimo se nekima od njih, za početak integralima tipa

$$\int \sin^m x \cos^n x\ dx.$$

Primjer 11.3. Odredite integral

$$\int \sin^4 x \cos^3 x\ dx.$$

Pokušajmo supstitucijom $t = \cos x$. Tada je $dt = -\sin x\ dx$. Dakle od $\sin^4 x$ u podintegralnoj funkciji izdvojili bismo jedan $\sin x$ da ga "pokupi" dt, no preostalih $\sin^3 x$ ne bismo uspjeli prikazati preko t. Ako probamo sa supstitucijom $t = \sin x$, tada stvar izgleda ljepše,

$$\int \sin^4 x \cos^3 x\ dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cdot \cos x\ dx =$$

$$= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x\ dx = \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\ dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int t^4 (1 - t^2) dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Gornji primjer je zapravo ilustracija kako pristupiti svim integralima oblika

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx,$$

pri čemu su m, n prirodni brojevi (ili nula) od kojih je **jedan paran i jedan neparan**. U tom slučaju supstituiramo trigonometrijsku funkciju koja ima **paran** eksponent. Nije teško vidjeti da u slučaju da su oba eksponenta m i n neparna, možemo iskoristiti bilo koju od dvije supstitucije, ali integral je nešto lakši ako supstituiramo trigonometrijsku funkciju s većim eksponentom.

Podsjetimo se sada nekih identiteta koji će nam biti od koristi. Počevši od osnovnog, dobro poznatog

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

preko formula za dvostruki kut

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x, \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Posljednji identitet možemo malo transformirati koristeći prvi iznad spomenuti, pa dobivamo

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2},$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

Dobiveni identiteti su korisni kod integrala jer nam dopuštaju da spuštamo stupnjeve podintegralnih trigonometrijskih funkcija. Taj nam je "trik" dovoljan za integriranje funkcija oblika

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx,$$

pri čemu su oba m, n **parni** prirodni brojevi (ili 0). Promotrimo primjer.

Primjer 11.4. Odredite integral

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx.$$

Transformirajmo podintegralnu funkciju koristeći gornje identitete dok ne dobijemo linearne izraze (po $\sin x$ i $\cos x$). Najprije koristimo formule za spuštanje potencija

$$\sin^4 x \cos^2 x = \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1 + \cos(2x)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\right)\left(1 + \cos(2x)\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 - \cos(2x) - \cos^2(2x) + \cos^3(2x)\right) =$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(2x) - \frac{1}{8} \cdot \frac{1 + \cos(4x)}{2} + \frac{1}{8}\cos^3(2x) =$$

$$= \frac{1}{16} - \frac{1}{8}\cos(2x) - \frac{1}{16}\cos(4x) + \frac{1}{8}\cos^3(2x).$$

Dakle slijedi

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\cos(2x) - \frac{1}{16}\cos(4x) + \frac{1}{8}\cos^3(2x) \right) dx =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\sin(2x) - \frac{1}{64}\sin(4x) + \frac{1}{8}\int \cos^3(2x)\, dx.$$

Posljednji smo integral spada u klasu integrala koje je obuhvatio prethodni primjer, dakle

$$\int \cos^3(2x)\, dx = \int \cos^2(2x) \cdot \cos(2x)\, dx = \begin{bmatrix} t = \sin(2x) \\ dt = 2\cos(2x)\, dx \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int (1 - t^2) dt = \frac{1}{2}\left(t - \frac{t^3}{3} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{1}{6}\sin^3(2x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Konačno, dobili smo

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin(4x) - \frac{1}{48}\sin^3(2x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Zadnja porcija identiteta koji nam mogu pomoći pri rješavanju integrala su formule pretvorbe produkta u zbroj:

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)),$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)),$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)),$$

budući da je lakše integrirati zbroj (zbog linearnosti integrala) nego produkt funkcija. Njih koristimo za klasu integrala oblika

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\, dx, \int \sin(ax)\cos(bx)\, dx, \int \cos(ax)\cos(bx)\, dx.$$

Primjer 11.5. Odredite integral

$$\int \sin x \sin(3x)\, dx.$$

Koristeći prvu od gornje 3 jednakosti, vrijedi

$$\int \sin x \sin(3x)\, dx = \frac{1}{2}\int \big(\cos(x-3x) - \cos(x+3x)\big) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \big(\cos(2x) - \cos(4x)\big) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin(4x)}{4} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{8}\sin(4x) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 11.6. Odredite integrale

(a) $\displaystyle\int \cos^4 x \, dx$,

(b) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$,

(c) $\displaystyle\int \sin x \sin(2x) \cos(3x) \, dx$.

Kada se nađemo u slijepoj ulici, niti jedan pristup nas ne probliži rješenju, osim supstitucije koja se pojavila u prvom primjeru,

$$t = \operatorname{tg} x, \quad dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx,$$

ponekad se koristi i takozvana **univerzalna supstitucija**, $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Ona je (u teoriji) zgodna jer će integral trigonometrijskih funkcija "prebaciti" u integral racionalne funkcije, za koji znamo postupak rješavanja. Nažalost, problem koji se javlja je što su često te racionalne funkcije dosta komplicirane, pa ih je tehnički, a time i vremenski (npr. na kolokviju) zahtjevno riješiti. Uz supstituciju $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ vrijedi

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Pokažimo primjenu na jednostavnom primjeru.

Primjer 11.7. Odredite integral

$$\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 1} dx.$$

Koristimo univerzalnu supstituciju $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, dobivamo

$$\int \frac{1}{2\sin x - \cos x + 1} dx = \int \frac{1}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{4t-1+t^2+1+t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{2t+t^2} dt = \int \frac{1}{t(t+2)} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \frac{1}{2} (\ln|t| - \ln|t+2|) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 \right| + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 11.8. Odredite sljedeće integrale

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}dx,$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx.$

Nakon što riješite sve zadatke iz ovog materijala, savjetujemo da riješite i sve materijale s weba.

Rješenja zadataka za samostalno rješavanje

Rješenje zadatka 11.2:

(a) Uočimo najprije,

$$\frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x \cos^4 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} + \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x}$$

Sada, kao u primjeru 11.1 b), dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} &= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^2 x \cos^4 x} = \frac{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x}{\sin^2 x \cos^4 x} \\ &= \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} + \frac{2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x},\end{aligned}$$

i potpuno analogno

$$\frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} + \frac{2}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$$

Odavde slijedi

$$\frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} + \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sin^2 x}$$

Zadnja 2 integrala imamo u tablici, a prva 2 rješavamo kao u primjeru 11.1 b)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx &= \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{bmatrix} \\ &= \int t^2 dt \\ &= \frac{t^3}{3} + C \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx &= \begin{bmatrix} t = \operatorname{ctg} x \\ dt = \frac{-dx}{\sin^2 x} \end{bmatrix} \\ &= -\int t^2 dt \\ &= -\frac{t^3}{3} + C \\ &= -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Napokon, imamo

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = \frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{ctg}^3 x\right) + 3\left(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(b) U ovom integralu prva ideja koja se nameće je supstitucija $t = \sin x$ jer nam "smeta" ovaj sinus u nazivniku (odnosno njegova prva potencija, izrazi $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$ se lako transformiraju jedan u drugoga pomoću osnovnog trigonometrijskog identiteta), no ta ideja ne prolazi jer ne možemo provesti supstituciju (fali nam $\cos x$ kojeg pokupi derivacija kada radimo supstituciju). Međutim, uočimo, ako pomnožimo brojnik i nazivnik sa $\sin x$, prolazi supstitucija $t = \cos x$ jer se tada automatski rješavamo dobivenog sinusa u brojniku, a dobiveni kvadrat sinusa u nazivniku nije nikakav problem. Dakle, dobivamo

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x(2\cos^2 x - 1)}dx &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x(2\cos^2 x - 1)}dx \\ &= \begin{bmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{bmatrix} \\ &= -\int \frac{dt}{(1-t^2)(2t^2-1)} \\ &= \int \frac{dt}{(t^2-1)(2t^2-1)} \\ &= (*)\end{aligned}$$

Iako bismo sada mogli dodatno faktorizirati nazivnik i rastavljati na parcijalne razlomke, u ovom slučaju bi to bilo dosta mukutrpno. Uočimo, u tablici imamo integrale oblika $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, pa istim postupkom kao za rastav na parcijalne razlomke tražimo rastav oblika

$$\frac{1}{(t^2-1)(2t^2-1)} = \frac{A}{t^2-1} + \frac{B}{2t^2-1}$$

Nakon svođenja na zajednički nazivnik i izjednačavanja koeficijenata dobivamo sustav

$$\begin{cases} 2A + B = 0 \\ -A - B = 0 \end{cases}$$

Rješenja ovog sustava su $A = 1$ i $B = -2$. Rastav sada postaje

$$\frac{1}{(t^2-1)(2t^2-1)} = \frac{1}{t^2-1} - \frac{2}{2t^2-1} = \frac{1}{t^2-1} - \frac{1}{t^2-\frac{1}{2}}$$

Napokon, računamo

$$\begin{aligned}(*) &= \int \frac{dt}{t^2-1} - \int \frac{dt}{t^2-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{\sqrt{2}}}{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Rješenje zadatka 11.6:

(a) Imamo integral oblika $\int \sin^m x \cos^n x dx$, gdje je $m = 0$ i $n = 4$. Kako su oba eksponenta parna, moramo transformirati izraz. Rješavamo se jednog kvadrata preko formule $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$. Dobivamo

$$
\begin{aligned}
\int \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 dx \\
&= \int \frac{1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4} dx \\
&= \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)dx \\
&= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right) dx \\
&= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{8} + \frac{1}{8}\int \cos(4x)dx \\
&= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

(b) Ovdje opet imamo integral oblika $\int \sin^m x \cos^n x dx$, pri čemu su eksponenti jednaki i neparni, pa možemo supstituirati bilo koju od trigonometrijskih funkcija.

$$
\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^3 x dx &= \int \sin^3 x \cos^2 x \cos x dx \\
&= \begin{bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{bmatrix} \\
&= \int t^3(1-t^2)dt \\
&= \int \left(t^3 - t^5\right) dt \\
&= \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + C \\
&= -\frac{1}{6}\sin^6 x + \frac{1}{4}\sin^4 x + C, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

(c) Ovdje koristeći formule za pretvorbu produkta u zbroj i kasnije eventualno formulu s kojom eliminiramo kvadrat (iz (a) dijela) dobivamo

$$\sin x \sin(2x) = \frac{1}{2}\left(\cos(-x) - \cos(3x)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos x - \cos(3x)\right)$$

Slijedi

$$\sin x \sin(2x)\cos(3x) = \frac{1}{2}\left(\cos x \cos(3x) - \cos^2(3x)\right)$$

Nadalje, imamo još

$$\cos x\cos(3x) = \frac{1}{2}\left(\cos(4x)+\cos(-2x)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(4x)+\cos(2x)\right),$$

pa dobivamo

$$\begin{aligned}\int \sin x\sin(2x)\cos(3x)dx &= \frac{1}{2}\int \cos x\cos(3x)dx - \frac{1}{2}\int \cos^2(3x)dx\\ &= \frac{1}{4}\int \left(\cos(4x)+\cos(2x)\right)dx - \frac{1}{2}\int\left(\frac{1+\cos(6x)}{2}\right)dx\\ &= -\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\sin(2x)+\frac{1}{16}\sin(4x)-\frac{1}{24}\sin(6x)+C\end{aligned}$$

Rješenje zadatka 11.8:

(a) Koristimo univerzalnu supstituciju $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, što nam daje

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2t}{1+t^2}\\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\\ dx &= \frac{2}{1+t^2}dt\end{aligned}$$

pa dobivamo

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)} &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-2\frac{2t}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt\\ &= \int \frac{dt}{t\left(\frac{2+2t^2+1-t^2-4t}{1+t^2}\right)}\\ &= \int \frac{1+t^2}{t(t^2-4t+3)}dt\\ &= \int \frac{1+t^2}{t(t-1)(t-3)}dt\\ &= (*)\end{aligned}$$

Preostaje izračunati integral ove racionalne funkcije koju najprije rastavljamo na parcijalne razlomke. Rastav je oblika

$$\frac{1+t^2}{t(t-1)(t-3)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t-3}$$

Svođenjem na zajednički nazivnik i izjednačavanjem koeficijenata dobivamo

$$\begin{cases}A+B+C=1\\ -4A-3B-C=0\\ 3A=1\end{cases}$$

Rješenja ovog sustava su $A = \frac{1}{3}$, $B = -1$ i $C = \frac{5}{3}$, odnosno, rastav je

$$\frac{1+t^2}{t(t-1)(t-3)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{t-3},$$

pa dobivamo

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t-1} + \frac{5}{3} \int \frac{dt}{t-3} \\
&= \frac{1}{3} \ln |t| - \ln |t-1| + \frac{5}{3} \ln |t-3| + C \\
&= \frac{1}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 \right| + \frac{5}{3} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 \right| + C
\end{aligned}$$

(b) Podijelimo brojnik i nazivnik s $\cos^2 x$ i koristimo supstituciju $t = \operatorname{tg} x$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} &= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 2} dx \\
&= \begin{bmatrix} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{bmatrix} \\
&= \int \frac{dt}{t^2 + 2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

12

Integriranje iracionalnih funkcija

Zadnja posebna vrsta funkcija koju ćemo naučiti integrirati su iracionalne funkcije, barem neki njihov poseban podskup. "Nepisana" pravila izgledaju ovako:

1. Ako imamo da se u izrazu pojavljuju korijeni oblika $(ax+b)^{m_i/n_i}$ (a i b fiksirani, eksponenti raznoliki), tada za supstituciju uzmemo $ax+b=t^k$, gdje je k najmanji zajednički višekratnik od $n_1, n_2, \ldots$.

2. Ako imamo pod korijenom neki kvadratni izraz, koristimo odgovarajuće trigonometrijske supstitucije:

   (a) $\sqrt{k^2-x^2}$: $x = k\sin t$ (ili naravno $x = k\cos t$). Tada je $dx = k\cos t dt$, i $\sqrt{k^2-x^2} = \sqrt{k^2\cos^2 t} = k\cos t$.

   (b) $\sqrt{k^2+x^2}$: $x = k \operatorname{tg} t$. Tada je $dx = \frac{kdt}{\cos^2 t}$, i $\sqrt{k^2+x^2} = \sqrt{k^2 + \frac{k^2\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{k}{\cos t}$.

   (c) $\sqrt{x^2-k^2}$: $x = \frac{k}{\cos t}$. Tada je $dx = \frac{k\sin t dt}{\cos^2 t}$, i $\sqrt{x^2-k^2} = \sqrt{\frac{k^2}{\cos^2 t} - k^2} = k\operatorname{tg} t$.

   (d) svaki kompliciraniji slučaj oblika $\sqrt{a^2+bx+c}$ svodimo na jedan od ova tri (kao nazivnike drugog stupnja u rastavu na parcijalne razlomke).

Pogledajmo nekoliko primjera.

Primjer 12.1. (12.1.b)) Izračunajte $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$.
Pod svim korijenima pojavljuje se izraz x. Da se pojavljuje neki "kompliciraniji" afin izraz (npr. $7x+3$), postupak bi bio analogan. Eksponenti koji se javljaju su 1 koji ne gledamo jer nam ne "smeta" te 2/3, 1/6 i 4/3 (izmnožili smo faktor x u nazivniku sa zagradom i ukomponirali taj eksponent u ovaj račun). Najmanji zajednički višekratnik brojeva $3, 6, 3$ je $V(3,6) = 6$. Zato je supstitucija $x = t^6$.

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx = \begin{bmatrix} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{bmatrix} = \int \frac{t^6+t^4+t}{t^6(1+t^2)}6t^5 dt = 6\int \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt.$$

Došli smo do racionalne funkcije. Dijelimo brojnik s nazivnikom i nastavljamo rastavom na parcijalne razlomke. Srećom po nas, u ovom zadatku je to trivijalno.

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx = 6\int \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}dt = \int \left(6t^3+\frac{6}{1+t^2}\right)dt$$
$$= \frac{3}{2}t^4 + 6\operatorname{arctg}(t) + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 6\operatorname{arctg}(\sqrt[6]{x}) + C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Kao što smo vidjeli, problem integriranja iracionalne funkcije sveli smo na problem integriranja racionalne funkcije. To nije slučajno, to će se i inače događati i zato je bitno da znate integrirati racionalne funkcije. U slučaju da je pod korijenom kvadratni član, koristit ćemo trigonometrijske supstitucije, pa je zato bitno da ste naučili i integrirati trigonometrijske funkcije.

Primjer 12.2. (12.3.a)) Izračunajte $\int \sqrt{4x^2-4x+3}dx$.
Slušamo nepisana pravila. Pod korijenom imamo kompliciranu kvadratnu funkciju. Možemo ju zapisati kao $4x^2-4x+3=(2x-1)^2+2$, pa nam je zato prva supstitucija $t=2x-1$:

$$\int \sqrt{4x^2-4x+3}dx = \begin{bmatrix} t=2x-1 \\ dt=2dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{2}\sqrt{t^2+2}dt$$

Sada imamo integral kao u slučaju 2.b. Uzimamo supstituciju $t=\sqrt{2}\operatorname{tg}y$. Tada će biti $\sqrt{t^2+2}=\frac{\sqrt{2}}{\cos y}$.

$$\int \sqrt{4x^2-4x+3}dx = \int \frac{1}{2}\sqrt{t^2+2}dt = \begin{bmatrix} t=\sqrt{2}\operatorname{tg}y \\ dt=\frac{\sqrt{2}}{\cos^2 y}dy \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{2}}{\cos y}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos^2 y}dy = \int \frac{dy}{\cos^3 y}.$$

Imamo trigonometrijsku funkciju koja se pojavljuje s neparnom potencijom. Možemo uvrstiti supstituciju $\sin y$. To zaista daje rješenje (pokušajte sami), no ovdje ćemo pokazati malo manje intuitivno, ali kraće rješenje, parcijalnom integracijom.

$$\int \frac{dy}{\cos^3 y} = \int \frac{1}{\cos y}\cdot\frac{1}{\cos^2 y}dy = \begin{bmatrix} u=\frac{1}{\cos y} & du=\frac{\sin y}{\cos^2 y}dy \\ dv=\frac{dy}{\cos^2 y} & v=\operatorname{tg}y \end{bmatrix}$$
$$= \frac{\sin y}{\cos^2 y} - \int \frac{\sin^2 y}{\cos^3 y}dy = \frac{\sin y}{\cos^2 y} - \int \frac{1-\cos^2 y}{\cos^3 y}dy = \frac{\sin y}{\cos^2 y} - \int\frac{dy}{\cos^3 y} + \int \frac{dy}{\cos y}.$$

Uočavajući da integral s kojim smo krenuli imamo i na desnoj strani, te koristeći supstituciju $\sin y$ u zadnjem integralu, dobivamo

$$\int \frac{dy}{\cos^3 y} = \frac{1}{2}\frac{\sin y}{\cos^2 y} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin y+1}{\sin y-1}\right| + C,\ C\in\mathbb{R}.$$

Sada imamo još jedan problem, izraziti ovu funkciju u terminima početne varijable x. Prije toga je problem izraziti preko t: imali smo $t = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\, y$, pa želimo $\sin y$ i $\cos y$ izraziti preko t.

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \implies \mathrm{tg}^2\, y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y} \implies \cos y = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\, y}}.$$

Sada je lagano: $\sin y = \cos y \cdot \mathrm{tg}\, y = \dfrac{\mathrm{tg}\, y}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\, y}}$. Uvrštavanjem, dobivamo

$$\frac{\sin y}{\cos^2 y} = \mathrm{tg}\, y\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\, y}, \text{ te}$$

$$\ln\left|\frac{\sin y + 1}{\sin y - 1}\right| = \ln\left|\frac{\mathrm{tg}\, y + \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\, y}}{\mathrm{tg}\, y - \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\, y}}\right|.$$

Konačno:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4x^2-4x+3}dx = {}& \frac{2x-1}{4}\sqrt{4x^2-4x+3}\\ &+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{(2x-1)+\sqrt{4x^2-4x+3}}{(2x-1)-\sqrt{4x^2-4x+3}}\right| + C,\ C\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Primjer 12.3. (12.2.b)) Izračunajte $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1-4\ln x - \ln^2 x}}dx.$

Ovdje vidimo da ćemo prije obračuna s iracionalnom funkcijom prvo morati iskoristiti supstituciju $y = \ln x$. Faktor x nas već "čeka" u nazivniku.

$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}dx = \begin{bmatrix} y = \ln x \\ dy = \frac{dx}{x}\end{bmatrix} = \int \frac{y}{\sqrt{1-4y-y^2}}dy = \int \frac{y}{\sqrt{5-(y+2)^2}}dy.$$

Zbog korijena u nazivniku, sljedeći korak je supstitucija $y+2 = \sqrt{5}\sin t$. Tada će korijen biti $\sqrt{5-(y+2)^2} = \sqrt{5}\cos t$. Slučajno, isto toliko će biti i dy, pa će se stvari kratiti:

$$\begin{aligned}&\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}dx = \int \frac{y}{\sqrt{5-(y+2)^2}}dy = \begin{bmatrix} y+2 = \sqrt{5}\sin t \\ dy = \sqrt{5}\cos t\end{bmatrix}\\ &= \int \frac{(\sqrt{5}\sin t - 2)}{\sqrt{5}\cos t}\sqrt{5}\cos t dt = \int (\sqrt{5}\sin t - 2)dt = -\sqrt{5}\cos t - 2t + C,\ C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Opet trebamo vratiti u terminima x, odnosno prije toga y. Za dio $2t$ nema ljepšeg zapisa od toga da koristimo arcsin:

$$y+2 = \sqrt{5}\sin t \implies t = \arcsin\left(\frac{y+2}{\sqrt{5}}\right).$$

Za prvi dio ima ljepšeg načina:

$$\sqrt{5}\cos t = \sqrt{5}\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{5}\sqrt{1-\left(\frac{y+2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1-4y-y^2}$$

Uzimajući u obzir i $y = \ln x$, konačno rješenje je

$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 - 4\ln x - \ln^2 x}}dx = -\sqrt{1 - 4\ln x - \ln^2 x} - 2\arcsin\left(\frac{\ln x + 2}{\sqrt{5}}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 12.4. Izračunajte integrale:

a) (12.1.c)) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+1)^{2/3} - (2x+1)^{1/2}}$

b) (12.1.d)) $\displaystyle\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}}dx$

c) (12.2.c)) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}}dx$

d) (12.4.) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2}dx$

Nakon što riješite sve zadatke iz ovog materijala, savjetujemo da riješite i sve materijale s weba.

Upute za neke zadatke za samostalno rješavanje

Zadatak 12.4.d) Pazite na rubne uvjete kod supstitucija.

Rješenja zadataka za samostalno rješavanje

Rješenje zadatka 12.4:

(a) Kao u primjeru 12.1, imamo supstituciju $2x-1=t^6$ jer nam se pojavljuju drugi i treći korijen.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}} &= \begin{bmatrix} 2x-1=t^6 \\ 2dx=6t^5dt \to dx=3t^5dt \end{bmatrix} \\
&= \int \frac{3t^5}{t^4-t^3}dt = 3\int \frac{t^2}{t-1}dt \\
&= 3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt \\
&= 3\int (t+1)dt + 3\int \frac{dt}{t-1} \\
&= \frac{3}{2}t^2+3t+3\ln|t-1|+C \\
&= \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x-1}+3\sqrt[6]{2x-1}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x-1}-1\right|+C, \quad C\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

(b) Po istom principu kao i u prošlom podzadatku, supstitucija nam je $x+1=t^6$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx = \begin{bmatrix} x+1=t^6 \\ dx=6t^5dt \end{bmatrix} &= \int \frac{1-t^3}{1+t^2}\cdot 6t^5dt \quad / \quad \text{(dijelimo polinome)} \\
&= 6\int \frac{-t(1+t^2)+t+1}{1+t^2}\cdot t^5dt \\
&= 6\int \left(-t^6+\frac{t^5(1+t)}{1+t^2}\right)dt \\
&= -\frac{6}{7}t^7+6\int \frac{t^6+t^5}{t^2+1}dt \quad / \quad \text{(opet dijelimo polinome)} \\
&= -\frac{6}{7}t^7+6\int \left(t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt \\
&= -\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t+6\int \frac{t-1}{t^2+1}dt
\end{aligned}$$

Izračunajmo još ovaj zadnji integral. Imamo

$$\int \frac{t-1}{t^2+1}dt = \int \frac{t}{t^2+1}dt - \int \frac{dt}{t^2+1}$$

Po tablici je $\int \frac{t}{t^2+1}dt = \operatorname{arctg} t + C$, dok je s druge strane

$$\int \frac{t}{t^2+1}dt = \begin{bmatrix} u=t^2+1 \\ du=2tdt \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+C$$

Napokon, imamo

$$\begin{aligned}\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx &= -\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t+3\ln\left(t^2+1\right)-6\operatorname{arctg} t+C\\ &= -\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{8}{7}}+\frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}}+\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}}-2(x+1)^{\frac{1}{2}}-3(x+1)^{\frac{1}{3}}+\\ &\quad+6(x+1)^{\frac{1}{6}}+3\ln\left(\sqrt[3]{x+1}+1\right)-6\operatorname{arctg}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)+C, \quad C\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Uočite još samo, kako je u zadatku zadan parni korijen iz $x+1$, implicitno je zadano da je $x+1\geq 0$. Pripazite na takve stvari, pogotovo kad imate posla s funkcijom ln (ovdje nemamo problema, sve je pozitivno, pa smo zato ispustili apsolutnu vrijednost unutar logaritma).

(c) U ovom zadatku ćemo imati barem dvije supstitucije (slično kao u primjeru 12.3), prva s kojom se rješavamo trigonometrijskih funkcija, pa će nam ostati "obična" iracionalna funkcija, koju opet moramo nekako supstituirati. Srećom, ovdje možemo odmah primijeniti supstituciju $t=\cos x$ bez ikakvih transformacija izraza. Računamo

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}}dx &= \begin{bmatrix} t=\cos x\\ dt=-\sin x dx\end{bmatrix} = -\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4t+1}}\\ &= -\int\frac{dt}{\sqrt{(t+2)^2-3}} = \begin{bmatrix} y=t+2\\ dy=dt\end{bmatrix}\\ &= -\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-3}} = \begin{bmatrix} y=\frac{\sqrt{3}}{\cos u}\\ dy=\frac{\sqrt{3}\sin u du}{\cos^2 u}\end{bmatrix}\\ &= -\int\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{\cos^2 u}-3}}\cdot\frac{\sqrt{3}\sin u}{\cos^2 u}du\\ &= -\int\frac{1}{\sqrt{\frac{3-3\cos^2 u}{\cos^2 u}}}\cdot\frac{\sqrt{3}\sin u}{\cos^2 u}du\\ &= -\int\frac{1}{\sqrt{3}\operatorname{tg} u}\cdot\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} u}{\cos u}du\\ &= -\int\frac{du}{\cos u} = -\int\frac{\cos u du}{\cos^2 u}du\\ &= \begin{bmatrix} v=\sin u\\ dv=\cos u du\end{bmatrix} = -\int\frac{dv}{1-v^2}\\ &= \int\frac{dv}{v^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|+C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{v+1}{v-1}\right|+C\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin u+1}{\sin u-1}\right|+C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sin u+1)^2}{\sin^2 u-1}\right|+C\\ &= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin u+1}{\cos u}\right|^2+C = -\ln\left|\frac{\sin u+1}{\cos u}\right|+C\end{aligned}$$

Preostaje vratiti supstitucije. Uočimo najprije

$$\frac{\sin u + 1}{\cos u} = \operatorname{tg} u + \frac{1}{\cos u}$$

Imamo

$$\frac{1}{\cos u} = \frac{y}{\sqrt{3}}$$

Odatle je

$$\sin u = \sqrt{1 - \cos^2 u} = \sqrt{1 - \frac{3}{y^2}} = \sqrt{\frac{y^2 - 3}{y^2}}$$

pa je

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{y^2 - 3}$$

odnosno

$$\frac{\sin u + 1}{\cos u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(y + \sqrt{y^2 - 3} \right)$$

Sada lako vratimo ostale dvije supstitucije i dobivamo

$$\frac{\sin u + 1}{\cos u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2 + \cos x + \sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1} \right)$$

Preostaje uočiti, nakon što iskoristimo $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ ova konstanta $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ se "stopi" s općom konstantom C, pa možemo maknuti faktor $\frac{1}{\sqrt{3}}$ iz argumenta logaritma. Konačno rješenje je

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}} dx = -\ln \left| 2 + \cos x + \sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1} \right| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(d) Kako imamo $\sqrt{1 - x^2}$, koristimo supstituciju $x = \sin t$. Treba samo uočiti da možemo izabrati bilo koji interval takav da sinus ide od $\frac{\sqrt{2}}{2}$ do 1, pa je najlakše uzeti interval od $\frac{\pi}{4}$ do $\frac{\pi}{2}$. Sukladno tome, treba uočiti da je kosinus pozitivan na tom intervalu jer ćemo ga dobiti u brojniku nakon supstitucije.

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2} dx &= \begin{bmatrix} x = \sin t & \frac{\sqrt{2}}{2} \to \frac{\pi}{4} \\ dx = \cos t dt & 1 \to \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sin^2 t} \cos t dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t + \sin^2 t - \sin^2 t}{\sin^2 t} dt \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 t} dt - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dt \\
&= -\operatorname{ctg} t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \\
&= -\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) - \frac{\pi}{4} \\
&= 1 - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

13

Površina i težište ravninskog lika, volumen rotacijskog tijela

U ovoj lekciji napravit ćemo veći naglasak na određeni integral i neke njegove primjene.

Sjetimo se nekih svojstava određenih integrala:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

za funkciju $f(x)$ definiranu na $[a, b]$ i neku točku c između a i b. Također, vrijedi i

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Naći ćemo još jedno svojstvo rješavajući sljedeći primjer.

Primjer 13.1. Izračunajte sljedeće integrale

- (13.1.a)) $\int_{-5}^{5} x\sqrt{x^2 + \cos x}dx$,
- (13.1.b)) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\{\sin x, \cos x\}dx$.

U prvom primjeru imamo funkcije korijen, polinom i trigonometrijsku. To ne može biti dobra kombinacija i to je već prvi hint da ovaj zadatak nećemo moći riješiti na uobičajen način.

Način na koji ćemo riješiti ovaj zadatak je koristeći sljedeću činjenicu: *Integral neparne funkcije na simetričnoj domeni je jednak nuli.*

Zaista, ako općenito imamo neparnu funkciju $f(x)$, supstitucijom $y = -x$ možemo pokazati da vrijedi

$$\int_0^a f(x)dx = -\int_{-a}^0 f(y)dy.$$

Funkcija iz prvog podzadatka jest neparna, domena na kojoj integiramo $[-5, 5]$ jest simetrična pa je integral jednak nuli. Kada bi ovaj zadatak bio zadan analogno s ciljem da se izračuna određeni integral na nekoj drugoj (asimetričnoj domeni) ili neodređeni integral, ne bismo ga znali izračunati, vrlo vjerojatno antiderivacija podintegralne funkcije nije zapisiva pomoću elementarnih funkcija. No, oko toga se ne moramo brinuti, jer ovaj zadatak jesmo riješili.

Za drugi dio zadatka, skicirajući grafove $\sin x$ i $\cos x$, primijećujemo da je na domeni $[0, \pi/2]$

$$\max\{\sin x, \cos x\} = \begin{cases} \cos x & x \in [0, \pi/4], \\ \sin x & x \in [\pi/4, \pi/2]. \end{cases}$$

Također, uzimajući u obzir da su sinus i kosinus u suštini iste funkcije (do na pomak $\pi/2$), tj. koristeći pravilo $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$, jednom supstitucijom $t = \pi/2 - x$ dobivamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\{\sin x, \cos x\} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t dt.$$

Dakle, dobili smo za izračunati dva puta jedno te isti integral. Lagano je doći do rezultata $\sqrt{2}$.

Analogno tvrdnji za neparne funkcije, imamo i jednu tvrdnju za parne funkcije koja nije toliko efikasna kao za neparne: *Integral parne funkcije na simetričnoj domeni* $[-a, a]$ *jednak je dvostrukom integralu na polovici intervala* $[0, a]$. Nije toliko efikasna, ali kod nekih zadatka koji imaju općenito ružnu, ali parnu podintegralnu funkciju (recimo koristeći apsolutnu vrijednost), tvrdnja može biti korisna.

Pogledajmo još jedan primjer

Primjer 13.2. (13.3.) Ako je $y = f(x)$ neparna, takva da je $\int_1^3 f(x)dx = 7$ i $\int_{-1}^2 f(x)dx = 4$, koliko je $\int_2^3 6f(x)dx$?
Primijetimo da faktor 6 u traženom integralu je nebitan, rezultat za odgovarajući integral od $f(x)$ dobit ćemo množenjem sa 6. Drugo, koristeći pravilo o neparnoj funkciji na simetričnoj domeni, prebacimo sve uvjete na pozitivni dio domene. Prvi uvjet već jest. Za drugi imamo:

$$4 = \int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx.$$

Konačno, imamo

$$\int_2^3 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = 7 - 4 = 3.$$

Dakle, odgovor je 18.

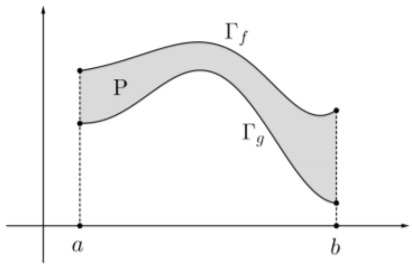
Također, ne zaboravimo još jednu stvar: određeni integral nenegativne funkcije je nenegativan broj. To će biti jako bitno u nastavku. Računat ćemo površine i volumene nekih likova i tijela čije će formule biti dane određenim integralom. Volumeni i površine bi trebali biti pozitivni brojevi, pa čim dobijete broj koji je nepozitivan, znate da ste zasigurno negdje pogriješili.

Za nastavak trebamo fomule sa sljedećeg linka: `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/dir1/files/slideovi/primjene.pdf`. U njima se nalazi 18 formula, no mi ćemo obraditi zadatke s onima u Kartezijevim koordinatama.

POVRŠINE LIKOVA

(a) Kartezijeve koordinate

$$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad f(x) \geq g(x); \quad x \in [a, b]$$

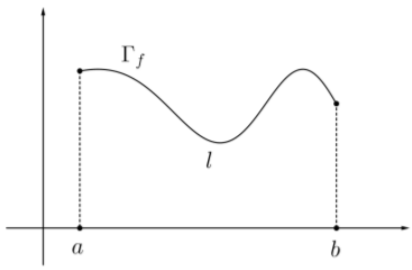


$$\mathrm{P} = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

DULJINE LUKOVA KRIVULJA

(a) Kartezijeve koordinate

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$



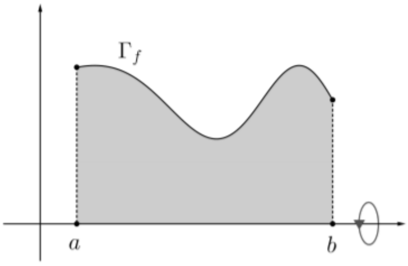
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

VOLUMENI ROTACIJSKIH TIJELA

(a) Kartezijeve koordinate

(1) Rotira oko x-osi

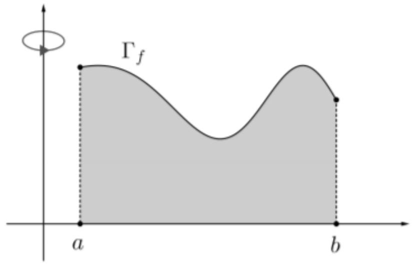
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$



$$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

(2) Rotira oko y-osi

$0 \leq a < b, \quad f : [a, b] \to [0, +\infty\rangle$



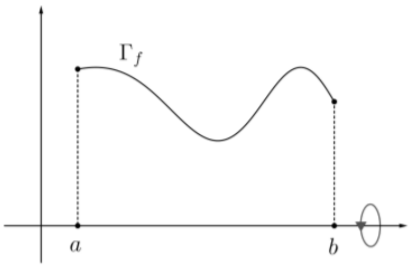
$$V_y = 2\pi \int_a^b x \, f(x) \, dx$$

POVRŠINE ROTACIJSKIH PLOHA

(a) Kartezijeve koordinate

(1) Rotira oko x-osi

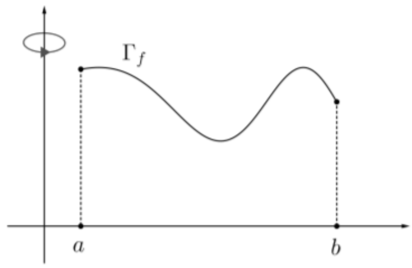
$f : [a, b] \to [0, +\infty\rangle$



$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

(2) Rotira oko y-osi

$0 \leq a < b, \quad f : [a, b] \to \mathbb{R}$



$$S_y = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

Pored tih formula, trebat ćemo još jednu: za lik omeđen pravcima $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ i $y = g(x)$ ($f > g$) težište ima koordinate

$$(x_T, y_T) = \left(\frac{\displaystyle\int_a^b x(f(x) - g(x))dx}{P}, \frac{\displaystyle\int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)dx}{2P} \right),$$

gdje je P površina lika. Intuitivno, kada bismo imali lik opisan na gornji način izrezan od jednolikog materijala te ga pridržali prstom u točki (x_T, y_T), on bi nam balansirao na našem prstu.

Riješimo par primjera.

Primjer 13.3. (13.5.) Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = 4 - x^2$ i $y = x^2 - 2x$.

Ključan dio kod ovakvih zadataka je nacrtati točnu skicu. Kao u lekciji Tok funkcije, nećemo mi crtati te grafove, nego ćete ih vi sami crtati. Ponavljamo: na kolokviju morate nacrtate grafove funkcija kod ovakvih zadataka. Razlog tome je što ovdje nije trivijalno primijeniti formulu za površinu lika budući da ne znamo granice integracije $[a, b]$. Za to treba naći sjecišta danih krivulja, i u ovom zadatku primjerice uvjeriti se da postoje samo dva takva (da sjecišta ima više, treba znati kako odrediti koja točno dva sjecišta nas zanimaju). Također, moramo odrediti koja se krivulja nalazi iznad koje.
Crtajući grafove funkcija (što znamo još i sa srednjoškolskim znanjem budući da se radi o kvadratnim funkcijama), vidimo da se na području omeđenom krivuljama funkcija $f(x) = 4 - x^2$ nalazi iznad $g(x) = x^2 - 2x$. Sa slike vidimo da te krivulje imaju samo dva sjecišta, koja tražimo algebarski rješavajući sustav $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$. Izjednačujući y, dobivamo kvadratnu jednadžbu $2x^2 - 2x - 4 = 0$ čija su rješenja $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$. Možemo odrediti i odgovarajuće ordinate sjecišta (3 i 0), no to je u ovom zadatku nebitno: saznali smo da su rubovi integracije -1 i 2 (apscise sjecišta).
Primijenjujući formulu za površinu lika između funkcija f i g dobivamo

$$P = \int_{-1}^{2} (4 - x^2) - (x^2 - 2x)dx = \left(4x - \frac{2x^2}{3} + x^2\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 9.$$

Primjer 13.4. (13.7.) Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $x^2 + y^2 = 2$, $y = x^2$ (unutar parabole).
Opet prvo skiciramo krivulje iz zadatka. Primijećujemo da se parabola i kružnica sijeku u dvije točke. Određivanjem njihovih koordinata odredit ćemo i rubove integracije. Također, budući da se naš lik nalazi iznad x-osi, te se kružnica na omeđenom liku nalazi iznad parabole, uzimamo funkcije $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$ i $g(x) = x^2$. Naime, da se lik nalazi ispod x-osi, uzeli bismo negativan predznak u funkciji f.
Za presjek rješavamo sustav $x^2 + y^2 = 2$, $y = x^2$. Primijećujemo da možemo izraziti x^2 iz obje jednadžbe. Time dobivamo kvadratnu jednadžbu po y kojoj su rješenja $y = 1$ i $y = -2$. No, uvrštavajući u jednadžbu parabole, samo prva vrijednost daje rješenja za x. Točke presjeka su $(-1, 1)$ i $(1, 1)$. Rubovi integracije su $[-1, 1]$.
Površina je sada dana integralom $P = \int_{-1}^{1} \sqrt{2 - x^2} - x^2 dx$. U prvom dijelu imamo korijen koji rješavamo trigonometrijskom supstitucijom, a u drugom dijelu polinom kojeg se trivijalno riješimo. Obradimo prvo iracionalni dio:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{2 - x^2}dx = \begin{bmatrix} x = \sqrt{2}\sin t & x = -1 \implies t = -\pi/4 \\ dx = \sqrt{2}\cos t dt & x = 1 \implies t = \pi/4 \end{bmatrix}$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\cos^2 t dt = \left(t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} + 1.$$

Kako je $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 dx = 2/3$, konačna površina je $P = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$.

Primjer 13.5. (13.18.) Izračunajte koordinate težišta dijela ravnine omeđenog pravcima $y = x$, $y = 2x$ i $x = 2$.

Ovdje koristimo formule kojih nema na webu kolegija. Skicirajući primijećujemo da je lik kojem treba naći težište trokut. Težište trokuta znamo računati i na drugačiji način (koordinate težišta su aritmetička sredina koordinata vrhova), no da pokažemo kako se koristi formula iz ovog materijala, zadatak ćemo riješiti drugačije. Naravno, u slučaju trokuta smijete koristiti koju god želite formulu.
Kako se prva dva pravca sijeku u ishodištu, a treći pravac je $x = 2$, rubovi integracije su 0 i 2. Gornja funkcija je $f(x) = 2x$, a donja $g(x) = x$. Sada smo spremni primijeniti formulu. Primijetite da se osim što trebamo izračunati integrale u dva brojnika, moramo izračunati i površinu lika za koju je formula ponovno dana integralom. Ponavljamo, budući da je ovo trokut, površinu možemo naći i direktno (i dapače, to bi bilo bolje jer bi bilo manje posla), ali ovo je trenutak u kojem vježbamo primjenu određenog integrala.

$$P = \int_0^2 (f(x) - g(x))dx = \int_0^2 xdx = 2.$$

$$\int_0^2 x(f(x) - g(x))dx = \int_0^2 x^2dx = \frac{8}{3}.$$

$$\int_0^2 f(x)^2 - g(x)^2dx = \int_0^2 3x^2dx = 8.$$

Zato je $(x_T, y_T) = (4/3, 2)$ (pazite, u formuli za ordinatu težišta je faktor 2).

Primjer 13.6. (13.25.) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = x^2$, $y = x^3$, $x = 0$, $x = 1$ oko y-osi.
Kod zadataka s volumenima rotacijskih tijela prvo treba biti oprezan u čitanju zadatka - piše li rotacijom oko x ili y osi? Ovdje se lik rotira oko y-osi, zato koristimo odgovarajuću formulu iz desnog stupca. Također, primijetite da je uvjet u formuli da je funkcija definirana za nenegativne x i ima samo nenegativne vrijednosti. Nadalje, ovaj zadatak je zanimljiv sam po sebi za pokazati znanje elementarnih funkcija. Kada sami skiciramo sliku, jasno je da obje funkcije x^2 i x^3 prolaze ishodištem i točkom $(1, 1)$ i lik koji se rotira nalikuje na "bananu" između tih točaka. Jasno je da obje funkcije konveksno rastu između $(0, 0)$ i $(1, 1)$, no pitanje je: koja se funkcija nalazi iznad koje?
Zadnje, kada nacrtamo sliku, uvjerimo se da nemamo situaciju istu kao na slici za formulu volumena rotacijskog tijela - područje koje se rotira se nalazi između dviju krivulja, a ne između funkcije i osi x.
Za zadnje koristimo trik: oduzet ćemo dva odgovarajuća volumena. Naime, volumen traženog tijela može se dobiti kao razlika volumena V_1 i V_2, gdje je V_1 volumen tijela nastalog rotacijom lika omeđenog s $y = f_1(x) = x^2$, $x = 1$ i $y = 0$, a V_2 volumen tijela nastalog rotacijom lika omeđenog s $y = f_2(x) = x^3$, $x = 1$ i $y = 0$. U oba slučaja, rubovi integracije su 0 i 1, pa računamo:

$$V_1 = 2\pi \int_0^1 xf_1(x)dx = 2\pi \int_0^1 x^3 = \frac{\pi}{2},$$

$$V_2 = 2\pi \int_0^1 xf_2(x)dx = 2\pi \int_0^1 x^4 = \frac{2\pi}{5},$$

i konačno, $V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{10}$.

Primjer 13.7. (13.21.) Izračunajte volumen kugle radijusa $r > 0$.
Za ovaj zadatak imamo poprilično slobodne ruke. Najvjerojatnije ćemo prvo središte kugle postaviti u središte. Ako ćemo volumen računati koristeći formule iz ovog materijala, trebamo kuglu radijusa r shvatiti kao neko rotacijsko tijelo. Ako gledamo rotaciju u odnosu na x-os, uzet ćemo polukrug u prva dva kvadranta ravnine. Ako gledamo rotaciju u odnosu na y-os, trebali bismo uzeti polukrug u prvom i četvrtom kvadrantu ravnine, ali problem je zbog uvjeta u formuli za volumen rotacijskog tijela u odnosu na y-os (nenegativnost podintegralne funkcije). Zato, zbog praktičnosti, biramo rotaciju oko x-osi.
Polukrug radijusa r treba prikazati kao graf funkcije f. To radimo koristeći formulu $x^2 + y^2 = r^2$, koristeći da je y pozitivan. Dobivamo $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Rubovi integracije su točke u kojima polukrug siječe x-os, a to su $-r$ i r. Sada, koristeći formulu iz prvog stupca za volumen rotacijskog tijela, dobivamo

$$V = \pi \int_{-r}^{r} f(x)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - x^3/3 \right) \Big|_{-r}^{r} = \frac{4}{3} r^3 \pi,$$

što je dobro nam poznata formula.

Primjer 13.8. (13.20., izmijenjen) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = \cos \frac{x}{2} + 1$, $y = 1$, $x = 0$, $x = \pi$ oko x-osi.
Zadnji primjer koji ćemo riješiti je dosta bitan. Sada nam je rotacija oko x zadana, nismo je sami izabrali. Skiciranjem lika koji se rotira primijećujemo da ponovno nemamo baš istu situaciju kao na slici gdje nam je dana formula - lik nije priljubljen na x-os. Zato ponovno moramo koristiti trik kao kada u Primjeru 13.6. - oduzet ćemo dva volumena. Neka je V_1 volumen tijela dobiven rotacijom lika omoeđenog krivuljama $y = f_1(x) = \cos \frac{x}{2} + 1$, $x = 0$, $x = \pi$, a V_1 volumen tijela dobiven rotacijom lika omoeđenog krivuljama $y = f_2(x) = 1$, $x = 0$, $x = \pi$. Traženi volumen je tada $V_1 - V_2$. Granice integracije su očito 0 i π, pa računamo

$$\begin{aligned} V_1 = \pi \int_0^{\pi} \left(\cos \frac{x}{2} + 1 \right)^2 dx &= \pi \int_0^{\pi} \left(\cos^2 \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} + 1 \right) dx \\ &= ... = \pi \left(\frac{3x}{2} + \frac{1}{2} \sin x + 4 \sin \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = 4\pi + \frac{3\pi^2}{2}, \end{aligned}$$

$$V_2 = \pi \int_0^{\pi} 1^2 dx = \pi^2,$$

dakle $V = V_1 - V_2 = 4\pi + \pi^2/2$.

Ono što je bitno u zadnjem primjeru je da smo zapravo izveli formulu za volumen između rotacijskog tijela omeđenog s dvije krivulje:

$$V = \pi \int_0^{\pi} f_1(x)^2 - f_2(x)^2 dx.$$

Česta greška je da se umjesto toga zadatak pokuša riješiti (krivom) formulom $\pi \int_0^\pi (f_1(x) - f_2(x))^2 dx$. Pokušajmo intuitivno objasniti zašto je to krivo. Zamislite da je zadatak odrediti volumen valjka radijusa 1 i recimo visine 1, te volumen "cilindra" kojem je baza kružni vijenac unutarnjeg radijusa 10 i vanjskog radijusa 11 (te ponovno visine 1). Oba tijela dobijemo rotacijom kvadrata 1×1 - za cilindar taj je kvadrat priljubljen uz x-os, dok je za drugi volumen taj kvadrat udaljen za 10 od x-osi. Ako bi druga "formula" bila točna, ta dva tijela imala bi jednak volumen, no dosta je jasno da je drugo tijelo puno većeg volumena od valjka.

Zadatak 13.9. Riješite zadatke:

a) (13.2.) Ako je $y = f(x)$ neparna funkcija takva da je $\int_{-2}^{1} f(x)dx = 3$, koliko je $\int_{-1}^{-2} 5f(x)dx$?

b) (13.8.) Izračunajte površinu lika omeđenog parabolom $y = 2x - x^2$ i pravcem $y = -x$.

c) (13.17.) Izračunajte koordinate težišta dijela ravnine omeđenog krivuljom $y = x^2$ i pravcem $y = 4$.

d) (13.22.) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = x^2$, $x = 0$, $y = 1$ oko x-osi.

e) (13.24.) Izračunajte volumen tijela koje nastaje rotacijom lika omeđenog krivuljama $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 0$ oko y-osi.

Nakon što riješite sve zadatke iz ovog materijala, savjetujemo da riješite i odgovarajuće zadatke s weba.

Upute za neke zadatke za samostalno rješavanje

Zadatak 13.9.c) Možete iskoristiti simetričnost u odnosu na y-os, odnosno neparnost odgovarajuće podintegralne funkcije.

Rješenja zadataka za samostalno rješavanje

Rješenje zadatka 13.9:

(a) Kako je funkcija f neparna, za svaki $a > 0$ vrijedi $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, pa je zbog aditivnosti po području integracije

$$\int_{-2}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} f(x)dx$$

Slijedi

$$\int_{-1}^{-2} 5f(x)dx = -5\int_{-2}^{-1} f(x)dx = -5\int_{-2}^{1} f(x)dx = -15$$

(b) Neka je $f(x) = 2x - x^2$ i $g(x) = -x$. Izjednačavanjem $f(x) = g(x)$ dobivamo jednadžbu $2x - x^2 = -x$ čija su rješenja $x_1 = 0$ i $x_2 = 3$, odakle uvrštavanjem lako dobijemo da su sjecišta točke $(0,0)$ i $(3,-3)$. Nadalje, lako se vidi da je $f(x) \geq g(x)$ za sve $x \in [0,3]$. Sada računamo površinu

$$\begin{aligned}
P &= \int_0^3 (f(x) - g(x))dx = \int_0^3 (2x - x^2 + x)dx \\
&= \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 \\
&= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

(c) Nakon rješavanja jednadžbe $x^2 = 4$ i uvrštavanja dobivamo da su sjecišta $(-2,4)$ i $(2,4)$. Izračunajmo površinu. Uz $f(x) = 4$ i $g(x) = x^2$ i činjenicu da je funkcija $x \mapsto 4 - x^2$ parna, imamo

$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx = 2\int_0^2 (4 - x^2)dx = 2\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{32}{3}.$$

Preostaje primijeniti formule za koordinate težišta uz $a = -2$, $b = 2$, $f(x) = 4$ i $g(x) = x^2$. Imamo, zbog neparnosti od $4x - x^3$ i parnosti od $16 - x^4$

$$\begin{aligned}
x_T &= \frac{1}{P}\int_a^b x(f(x) - g(x))dx = \frac{1}{P}\int_{-2}^{2} \left(4x - x^3\right)dx = 0 \\
y_T &= \frac{1}{2P}\int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2\right)dx = \frac{1}{2P}\int_{-2}^{2} \left(16 - x^4\right)dx \\
&= \frac{1}{P}\int_0^2 \left(16 - x^4\right)dx = \frac{3}{32}\left(16x - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 \\
&= \frac{3}{32}\left(32 - \frac{32}{5}\right) = \frac{3}{32} \cdot \frac{4}{5} \cdot 32 = \frac{12}{5}
\end{aligned}$$

Dakle, koordinate težišta su

$$T\left(0, \frac{12}{5}\right).$$

(d) Uočimo iz skice, na intervalu $[0,1]$, parabola $y = x^2$ nalazi se ispod pravca $y = 1$, pa ne računamo direktno po formuli, nego od volumena valjka dobivenog rotacijom kvadrata omeđenog s $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ oduzimamo volumen rotacijskog tijela nastalo rotacijom dijela ravnine omeđenog s x-osi, $y = x^2 (= f(x))$, $x = 0$ (odnosno točkom $(0,0)$) i $x = 1$. Lako dovivamo volumen valjka jer znamo mu visinu i polumjer baze (obje vrijednosti su 1, valjak će biti polegnut ako ga zamislite u $\mathbb{R}^3$, nadalje, možete ga izračunati pomoću formula za rotacijska tijela uz funkciju $f(x) = 1$, svakako preporučamo za vježbu) pa slijedi da je taj volumen jednak π. S druge strane, računamo

$$\begin{aligned} V' &= \pi \int_a^b f(x)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx \\ &= \pi \cdot \frac{x^5}{5}\bigg|_0^1 = \frac{\pi}{5} \end{aligned}$$

Konačno, volumen traženog tijela jednak je razlici volumena valjka i dobivenog volumena V':

$$V = \pi - V' = \frac{4\pi}{5}$$

(e) Uočimo da su sjecišta krivulje $y = x + 1$ i koordinatnih osi $(-1,0)$ i $(0,1)$, pa zapravo rotiramo trokut omeđen tim točkama i ishodištem. Međutim, vrijednosti nisu pozitivne, pa ne možemo direktno iskoristiti formulu. Stoga rotiramo trokut koji je simetričan s obzirom na os y, jer on daje isto rotacijsko tijelo. Općenito, to je najlakše napraviti tako da uzmemo $f_1(x) = f(-x)$ i da sredimo granice. Dakle, rotiramo trokut kojem su vrhovi ishodište, točka $(0,1)$ i točka $(1,0)$, odnosno imamo $a = 0$, $b = 1$ i $f(x) = -x + 1$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_a^b x f(x) dx = 2\pi \int_0^1 \left(-x^2 + x\right) dx \\ &= 2\pi \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\bigg|_0^1 = 2\pi\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

14

Nizovi i nepravi integral

Uvedimo pojam nepravog integrala i riješimo nekoliko zadataka.

Definicija 14.1. Dana je funkcija $f : [a, b\rangle \to \mathbb{R}$ (gdje b posebno može biti i $+\infty$) integrabilna na svakom intervalu $[a, B]$, $B \leq b$. Ako limes

$$L := \lim_{B \to b^-} \int_a^B f(x)dx$$

postoji, tada tu vrijednost nazivamo nepravim integralom i označavamo s

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Posebno kažemo da nepravi integral konvergira. Ako limes ne postoji, kažemo da integral divergira.

Analogno definiramo u slučaju limesa funkcije $f : \langle a, b] \to \mathbb{R}$. U slučaju $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$, nepravi integral se definira kao

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{A \to a^+} \int_A^c f(x)dx + \lim_{B \to b^-} \int_c^B f(x)dx,$$

za proizvoljnu točku c između a i b.

Dakle, nepravi integrali kombiniraju znanje određenih integrala i limesa funkcija. Najčešće su limesi koji se pojavljuju u ovakvim zadatcima lagani. Kao i kod "običnih" limesa, divergencija može uključivati da nepravi integral ide u $-\infty$, $+\infty$, ili "samo" divergira, tj. da mu se vrijednost ne približava nijednoj konkretnoj vrijednosti ili beskonačnosti, najčešće implicirajući da "titra" na neki način.

Također, pazite na definiciju "dvostranog" nepravog integrala. Recimo, za $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, netko bi mogao pomisliti da nepravi integral na cijeloj domeni funkcije f možemo računati kao $\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} f(x)dx$. No, on se tako ne definira i pogrešno je računati na taj način. Recimo krivom definicijom dobili bismo da funkcija $f(x) = x$ ima nepravi integral po cijeloj domeni jednak nula, no pravom definicijom vidimo da njen nepravi integral divergira.

Tehnika rješavanja zadataka s nepravim integralima ovisi samo o prirodi podintegralne funkcije i ne razlikuje se mnogo od računanja pravih integrala. Zato se za ovu lekciju podrazumijeva poznavanje ostalih tehnika integriranja iz prethodnih lekcija.

Primjer 14.2. Ukoliko konvergiraju, izračunajte neprave integrale:

- (14.7.b)) $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$,
- (14.7.c)) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx$,
- (14.7.i)) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

Budući da je jedna od granica $+\infty$, jasno je da se radi o nepravom integralu. U drugom rubu integracije funkcija je dobro definirana, pa ćemo ovaj nepravi integral naći preko limesa samo za gornji rub integracije. Kao i u svakom zadatku ovakvog tipa, prvo ćemo se pozabaviti integralom oblika $\displaystyle\int_0^B xe^{-x^2}dx$ (dakle, problematičan rub zamijenili smo konstantom B) i rješavamo ovaj integral u ovisnosti o tom parametru B.

$$\int_0^B xe^{-x^2}dx = \begin{bmatrix} t=-x^2 & x=0 \implies t=0 \\ dt=-2xdx & x=B \implies t=-B^2 \end{bmatrix}$$
$$= -\int_0^{-B^2} \frac{1}{2}e^t dt = \frac{1}{2}\int_{-B^2}^0 e^t dt = \frac{1}{2}\left(e^t\right)\Big|_{-B^2}^{0} = \frac{1-e^{-B^2}}{2}.$$

Sada za nepravi integral iz zadatka treba izračunati limes dobivenog izraza kada $B \to +\infty$. Obrazloženje će često ići baš kao i u ovom zadatku: kada $B \to +\infty$, tada $-B^2 \to -\infty$, pa $e^{-B^2} \to 0$, pa $\frac{1-e^{-B^2}}{2} \to \frac{1}{2}$. Dakle, nepravi integral konvergira i iznosi

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{B\to+\infty}\int_0^B xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}.$$

Riješimo na isti način drugi integral. Ponovno je jedan od rubova jasan ($+\infty$), dok je u nuli podintegralna funkcija definirana. Zato računamo integral s rubovima A i 0:

$$\int_A^0 \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx = \begin{bmatrix} t=3-x & x=0 \implies t=3 \\ dt=-dx & x=A \implies t=3-A \end{bmatrix}$$
$$= -\int_{3-A}^3 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \int_3^{3-A}\frac{1}{\sqrt{t}}dt = \left(2\sqrt{t}\right)\Big|_3^{3-A} = 2\sqrt{3-A}-2\sqrt{3}.$$

Ponovno je analiza oko limesa lagana: kada $A \to -\infty$, $3-A \to +\infty$, $\sqrt{3-A} \to +\infty$, ali to znači da i cijeli nepravi integral divergira u $+\infty$.

Za zadnji primjer, prvo uočavamo da ni u jednom rubu integracije funkcija nije definirana. Zato ćemo prvo trebati izračunati integrale s granicama A i c, a zatim c i B, gdje je A blizu 0, a B blizu 1. Točka c mora biti iz intervala $\langle 0, 1\rangle$, ali je proizvoljna, pa ćemo recimo uzeti $c = 1/2$. Također, kada računamo jedan od ova dva integrala, obraćajmo pažnju kako izračunati drugi. Idemo redom:

$$\int_A^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \int_A^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1/4-(x-1/2)^2}}dx$$
$$= \begin{bmatrix} t = x - 1/2 & x = A \implies t = A - 1/2 \\ dt = dx & x = 1/2 \implies t = 0 \end{bmatrix} = \int_{A-1/2}^{0} \frac{1}{\sqrt{1/4-t^2}}dt$$
$$= \begin{bmatrix} t = \frac{1}{2}\sin y & t = A - 1/2 \implies y = \arcsin(2A-1) \\ dt = \frac{1}{2}\cos y & t = 0 \implies y = 0 \end{bmatrix}$$
$$= \int_{\arcsin(2A-1)}^{0} 1dt = -\arcsin(2A-1).$$

Za integral između granica $1/2$ i B trebali bismo ponoviti sličan postupak ili nekako drugačije elegantno naći rješenje. Jedan način je tako da iskoristimo supstituciju oblika $u = 1 - x$ i svedemo integral na upravo već izračunati:

$$\int_{1/2}^{B} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \arcsin(2B-1).$$

Da bismo izračunali originalan nepravi integral, po definiciji prvo trebamo odrediti prirodu (i vrijednost) dva neprava integrala

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx \text{ i } \int_{1/2}^{1} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx \ (*).$$

Ako oba neprava integrala postoje, postoji i cijeli nepravi integral iz zadatka i vrijednost mu je zbroj dva gornja integrala. Za prvi imamo da je

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \lim_{A\to 0^+} \int_A^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \lim_{A\to 0^+} -\arcsin(2A-1)$$

Kada $A \to 0^+$, tada $2A - 1 \to -1^+$, dakle $\arcsin(2A-1) \to \frac{-\pi}{2}$. Dakle, prvi nepravi integral iz $(*)$ postoji (konvergira) i iznosi $\frac{\pi}{2}$. Analogno i drugi nepravi integral iz $(*)$ postoji i iznosi također $\frac{\pi}{2}$, pa konvergira i cijeli nepravi integral iz zadatka i iznosi π.

Zadatak 14.3. Ukoliko konvergiraju, izračunajte neprave integrale:

a) (14.7.a)) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}dx,$

b) (14.7.e)) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+9}dx,$

c) (14.7.f)) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x \sqrt[3]{\sin x} dx$,

d) (14.7.g)) $\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} dx$.

Nakon što riješite sve zadatke iz ovog materijala, savjetujemo da riješite i ostale primjere iz zadatka 14.7. s weba.

Rješenja zadataka za samostalno rješavanje

Rješenje zadatka 14.3:

(a) Vidimo da je interval $[e, +\infty\rangle$ sadržan u domeni funkcije, pa imamo nepravi integral u samo jednom smjeru. Za proizvoljni $A > e$ računamo

$$\begin{aligned}\int_e^A \frac{1}{x\ln^3 x}dx &= \begin{bmatrix} t = \ln x & e \to 1 \\ dt = \frac{dx}{x} & A \to \ln A \end{bmatrix} \\ &= \int_1^{\ln A} \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}\Big|_1^{\ln A} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln^2 A} - 1\right)\end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$\int_e^\infty \frac{1}{x\ln^3 x}dx = \lim_{A\to\infty}\int_e^A \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \lim_{A\to\infty} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln^2 A} - 1\right) = \frac{1}{2}$$

(b) Kako je nazivnik svugdje strogo veći od 0, funkcija je definirana na cijelom $\mathbb{R}$. Nadalje, moramo računati obostrani nepravi integral, pa ga treba razdvojiti u proizvoljnoj točki, a nekako je najprirodnije uzeti $c = 0$. Dakle, gledamo integrale na $[A, 0]$ i $[0, B]$ za proizvoljne $A < 0$ i $B > 0$. Izračunajmo neodređeni integral, pa ćemo nakon toga lako uvrstiti granice (da ne provodimo dva puta načelno isti račun).

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+4x+9}dx &= \int \frac{1}{(x+2)^2+5}dx \\ &= \begin{bmatrix} t = x+2 \\ dt = dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t^2+5}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right) + C\end{aligned}$$

Sada imamo

$$\int_A^0 \frac{1}{x^2+4x+9}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{A+2}{\sqrt{5}}\right)\right)$$

i

$$\int_0^B \frac{1}{x^2+4x+9}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{B+2}{\sqrt{5}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)$$

Kako je $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$, imamo

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+4x+9}dx &= \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{0} \frac{1}{(x+2)^2+5}dx \\
&= \lim_{A\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{A+2}{\sqrt{5}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \\
\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+9}dx &= \lim_{B\to\infty} \int_{0}^{B} \frac{1}{(x+2)^2+5}dx \\
&= \lim_{B\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{B+2}{\sqrt{5}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Napokon, kad zbrojimo ova dva integrala, dobivamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+9}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+4x+9}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+4x+9}dx = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

(c) Domena funkcije ctg (odnosno glavne grane koju promatramo), pa onda i cijele podintegralne funkcije je interval $\langle 0, \pi\rangle$, pa gledamo integral $\int_{A}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x \sqrt[3]{\sin x} dx$ za proizvoljni $0 < A < \frac{\pi}{2}$. Računamo

$$\begin{aligned}
\int_{A}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x \sqrt[3]{\sin x} dx &= \begin{bmatrix} t = \sin x & \frac{\pi}{2} \to 1 \\ dt = \cos x dx & A \to \sin A \end{bmatrix} = \int_{\sin A}^{1} \frac{1}{t} \cdot \sqrt[3]{t} dt \\
&= \int_{\sin A}^{1} t^{-\frac{2}{3}} dt = 3 \cdot t^{\frac{1}{3}} \Big|_{\sin A}^{1} = 3\left(1 - \sqrt[3]{\sin A}\right)
\end{aligned}$$

Sada lako dobivamo

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} \sqrt[3]{\sin x} dx = \lim_{A\to 0+} \int_{A}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} \sqrt[3]{\sin x} dx = \lim_{A\to 0+} 3\left(1 - \sqrt[3]{\sin A}\right) = 3$$

(d) Funkcija je definirana na intervalu $\langle 1, \infty \rangle$, pa računamo $\displaystyle\int_A^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx$ za proizvoljni $1 < A < 2$. Imamo

$$
\begin{aligned}
\int_A^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx &= \begin{bmatrix} t = x-1 & 2 \to 1 \\ dt = dx & A \to A-1 \end{bmatrix} = \int_{A-1}^1 \frac{t-1}{\sqrt{t}}dt \\
&= \int_{A-1}^1 \frac{t}{\sqrt{t}}dt - \int_{A-1}^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \int_{A-1}^1 t^{\frac{1}{2}}dt - \int_{A-1}^1 t^{-\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_{A-1}^1 - 2t^{\frac{1}{2}}\Big|_{A-1}^1 = \frac{2}{3}\left(1 - \sqrt{(A-1)^3}\right) - 2\left(1 - \sqrt{A-1}\right) \\
&= -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{(A-1)^3} + 2\sqrt{A-1}
\end{aligned}
$$

Sada lako dobivamo

$$
\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{A \to 1+} \int_A^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \lim_{A \to 1+} \left(-\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{(A-1)^3} + 2\sqrt{A-1}\right) = -\frac{4}{3}
$$