$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 08.02.2022.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 20 bodova)
   (a) (10 bodova) Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) = (y-2)\ln(x+y)$.
   (b) (10 bodova) Odredite globalne ekstreme funkcije $f(x,y) = x^4y - 4xy^2$ na kvadratu $[0,10]^2$.

$2a$	$2b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 08.02.2022.

2. (ukupno 20 bodova)
   (a) (10 bodova) Izračunajte dvostruki integral

$$\iint_A \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdje je $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1,\ (x-1)^2+y^2 \leq 1\}$.

   (b) (10 bodova) Integrirajte funkciju $f(x,y,z) = x+y+z$ po skupu

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 1/2\}.$$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 08.02.2022.

3. (ukupno 10 bodova) Izračunajte krivuljni integral

$$\int_C (xy + \sin x)\mathrm{d}x + (x^2 - \cos y)\mathrm{d}y,$$

gdje je C pozitivno orijentirani rub skupa $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi],\ 0 \leq y \leq \sin x\}$.

4	5	6	7	8

JMBAG IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 08.02.2022.

4. (10 bodova) Pokažite da sve tangencijalne ravnine plohe $z = xf(\frac{x}{y})$, gdje je f derivabilna funkcija, prolaze istom točkom.

5. (10 bodova) Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^2 koja u svakoj točki skupa $\mathbb{R}^2$ zadovoljava tzv. Laplaceovu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Pokažite da, ako je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \neq 0$ za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, onda f nema lokalnih ekstrema.

6. (10 bodova) Pretpostavimo da funkcija $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadovoljava $f(-x, -y) = -f(x, y)$ za sve $(x, y) \in \Omega$, gdje je $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. S obzirom na koji pravac skup Ω treba biti simetričan da bi vrijedilo $\iint_\Omega f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$?

7. (10 bodova) Neka je P četverokut u xy ravnini čiji su vrhovi točke $A(1, 1), B(2, 0), C(3, 2)$ i $D(2, 3)$, te neka je K kvadrat u uv ravnini

$$K = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq u \leq 1\ ,\ 0 \leq v \leq 1\ \}.$$

Odaberite realne brojeve a i b tako da funkcija

$$F(u, v) = (u + v + a, -u + 2v + b) = (x, y)$$

preslikava K u P. Koristeći dobivenu zamjenu varijabli, izračunajte integral

$$\iint_P \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

8. (10 bodova) Zamijenite redoslijed integracije u trostrukom integralu tako da odredite granice integracije u donjoj formuli

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{0}^{y} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{?}^{?}\int_{?}^{?}\int_{?}^{?} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$