1a	1b

JMBAG   IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 29.11.2022.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora niti ikakvih formula osim onih koje će vam biti podijeljene na početku pisanja.

1. (ukupno 16 bodova)

   (a) (8 bodova) Odredite Taylorov red oko nule za funkciju $f(x) = x \cdot \ln(2 + x)$.

   (b) (8 bodova) Izračunajte s greškom manjom od 10^{-4}

   $$\int_0^{1/3} \frac{\ln(1-x^2)}{x} dx.$$

   Napomena: Taylorov polinom n-tog stupnja i ostatak za funkciju $\ln(1 + x)$ iznose

   $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

   uz $|R_n(x)| \leq \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ (kad je $x \in \langle 0, 1\rangle$) i $|R_n(x)| \leq \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)}$ (kad je $x \in \langle -1, 0\rangle$).

$2a$	$2b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 29.11.2022.

2. (ukupno 18 bodova)

   (a) (12 bodova) Ispitajte konvergiraju li redovi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}(n^2+2n+3)}{(2n+1)^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2n\ln n}{n^2+n+1}.$$

   (b) (6 bodova) Odredite radijus konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+\sqrt{n+1}}{3^n+1}\, x^n.$$

$3a$	$3b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 29.11.2022.

3. (ukupno 16 bodova)

   (a) (10 bodova) Pokažite da se graf funkcije $f(x, y) = e^{x^2-y^2} - 2xy - 3$ i pravac p čija je jednadžba
   $$\frac{x-4}{3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$$
   sijeku u točki $T = (1, -1, 0)$. Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf funkcije f u točki T. Odredite kut između te tangencijalne ravnine i pravca p.

   (b) (6 bodova) Napišite parametarsku jednadžbu tangente na krivulju $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zadanu s $c(t) = (2t^2, t^2+t, 2t+1)$ u točki njenog presjeka s ravninom $x-2y+2z = 6$.

4	5	6	7	8

JMBAG ______ IME I PREZIME ______ PROFESOR ______

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 29.11.2022.

4. (10 bodova) Neka su $a_n \geq 0$. Pokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju: Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan ako i samo ako mu je pripadni niz parcijalnih suma $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ omeđen.

5. (10 bodova) Odredite i opišite onu nivo-krivulju funkcije

$$f(x, y) = 16x^2 + 4y^2$$

koja prolazi točkom $T(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$, ako takva postoji.

6. (10 bodova) Postoji li limes

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sin^2 x + \sin^2 y} \ ?$$

Obrazložite!

7. (10 bodova) Zadane su funkcije

$$f(x, y) = e^{1-x^2-y^2} \ , \quad g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \ .$$

Pokažite da se njihove vrijednosti podudaraju za sve točke $T(x, y)$ kružnice radijusa 1 sa središtem u ishodištu te da su im u tim točkama normale na grafove jednake, tj. vektori normala su im kolinearni.

8. (10 bodova) Odredite Taylorov red funkcije $f(x) = \sin x \, \cos x$ oko točke $x = \frac{\pi}{2}$.

RJEŠENJA

4. (10 bodova) Neka su $a_n \geq 0$. Pokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju: Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan ako i samo ako mu je pripadni niz parcijalnih suma $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ omeđen.

Rješenje. Tvrdnja vrijedi.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Ako je red konvergentan, onda je (po definiciji) konvergentan njegov niz parcijalnih suma (s_n), a svaki konvergentni niz je omeđen (Dir1).
$\boxed{\Longleftarrow}$ Obzirom da je $a_n \geq 0$, imamo $s_n = s_{n-1} + a_n \geq s_{n-1}$ pa je niz (s_n) rastući. Uz pretpostavku da je i omeđen znamo (iz Dir1) da on mora biti konvergentan, no to upravo znači da dani red konvergira.

5. (10 bodova) Odredite i opišite onu nivo-krivulju funkcije

$$f(x, y) = 16x^2 + 4y^2$$

koja prolazi točkom $T(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$, ako takva postoji.

Rješenje.
$$f\Big(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\Big) = 16\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 + 4\big(\sqrt{3}\big)^2 = 4 + 12 = 16$$
Zato jednadžba te krivulje glasi

$$16x^2 + 4y^2 = 16,$$

tj.

$$x^2 + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Vidimo da je riječ o (standardnoj) elipsi sa središtem u ishodištu i poluosima duljina $a = 1$ i $b = 2$.

6. (10 bodova) Postoji li limes

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sin^2 x + \sin^2 y} \ ?$$

Obrazložite!

Rješenje. Navedeni limes ne postoji.
Ako limes funkcije $f(x, y) = \frac{xy}{\sin^2 x + \sin^2 y}$ u točki $(0, 0)$ računamo duž pravca $y = 0$, dobit ćemo
$$\lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$
Ako pak limes računamo duž pravca $y = x$, dobit ćemo

$$\lim_{x\to 0} f(x, x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \Big(\frac{x}{\sin x}\Big)^2 = \frac{1}{2}.$$

Kako su te dvije dobivene vrijednosti različite, slijedi da ne postoji $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

7. (10 bodova) Zadane su funkcije

$$f(x, y) = e^{1-x^2-y^2} \ , \quad g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \ .$$

Pokažite da se njihove vrijednosti podudaraju za sve točke $T(x,y)$ kružnice radijusa 1 sa središtem u ishodištu te da su im u tim točkama normale na grafove jednake, tj. vektori normala su im kolinearni.

Rješenje. Jednadžba jedinične kružnice sa središtem u ishodištu je $x^2+y^2=1$. Za svaku točku $T(x,y)$ čije koordinate zadovoljavaju tu jednadžbu imamo

$$\begin{aligned} f(T) &= e^{1-(x^2+y^2)} = e^{1-1} = e^0 = 1, \\ g(T) &= \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{1} = 1, \end{aligned}$$

što je jednako. Kako je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{1-x^2-y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{1-x^2-y^2},$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2},$$

vektori normala na grafove od f i g u točki T su redom

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_f(T) &= \Big(-\frac{\partial f}{\partial x}(T), -\frac{\partial f}{\partial y}(T), 1\Big) = \big(-2xe^{1-(x^2+y^2)}, -2ye^{1-(x^2+y^2)}, 1\big) \\ &= (-2xe^{1-1}, -2ye^{1-1}, 1) = (-2x, -2y, 1), \\ \mathbf{n}_g(T) &= \Big(-\frac{\partial g}{\partial x}(T), -\frac{\partial g}{\partial y}(T), 1\Big) = \Big(\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}, 1\Big) \\ &= \Big(\frac{-2x}{1^2}, \frac{-2y}{1^2}, 1\Big) = (-2x, -2y, 1). \end{aligned}$$

Kako je ispalo $\mathbf{n}_f(T) = \mathbf{n}_g(T)$, zaključujemo da se pripadne normale podudaraju.

8. (10 bodova) Odredite Taylorov red funkcije $f(x) = \sin x \cos x$ oko točke $x = \frac{\pi}{2}$.

Rješenje. Najprije koristimo formulu za sinus dvostrukog kuta, potom supstituiramo $y = x - \frac{\pi}{2}$, tj. $x = y + \frac{\pi}{2}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\sin 2\Big(y + \frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1}{2}\sin\big(2y+\pi\big) = -\frac{1}{2}\sin 2y,$$

a na kraju koristimo poznati (tablični) Taylorov razvoj funkcije sinus:

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Dobivamo

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2y)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} y^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)^{2n+1}. \end{aligned}$$

1a	1b

JMBAG ____________ IME I PREZIME ____________

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 29.11.2022.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora niti ikakvih formula osim onih koje će vam biti podijeljene na početku pisanja.

1. (ukupno 16 bodova)
   (a) (8 bodova) Odredite Taylorov red oko nule za funkciju $f(x) = x \cdot \ln(3 + x)$.
   (b) (8 bodova) Izračunajte s greškom manjom od 10^{-4}

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln(1 - x^4)}{x} dx.$$

Napomena: Taylorov polinom n-tog stupnja i ostatak za funkciju $\ln(1 + x)$ iznose

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

uz $|R_n(x)| \le \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ (kad je $x \in \langle 0, 1\rangle$) i $|R_n(x)| \le \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)}$ (kad je $x \in \langle -1, 0\rangle$).

2a	2b

JMBAG ______ IME I PREZIME ______

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 29.11.2022.

2. (ukupno 18 bodova)

   (a) (12 bodova) Ispitajte konvergiraju li redovi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}(n^2+n+4)}{(3n+1)^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3n\ln n}{n^2+2n+2}.$$

   (b) (6 bodova) Odredite radijus konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+\sqrt{n+2}}{4^n+1}\, x^n.$$

$3a$	$3b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 29.11.2022.

3. (ukupno 16 bodova)

   (a) (10 bodova) Pokažite da se graf funkcije $f(x,y) = e^{-x^2+y^2} - 2xy - 3$ i pravac p čija je jednadžba
   $$\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-1}{1}$$
   sijeku u točki $T = (-1,1,0)$. Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf funkcije f u točki T. Odredite kut između te tangencijalne ravnine i pravca p.

   (b) (6 bodova) Napišite parametarsku jednadžbu tangente na krivulju $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ zadanu s $c(t) = (t^2+t, 2t^2, 2t+1)$ u točki njenog presjeka s ravninom $-2x + y + 2z = 8$.

4	5	6	7	8

JMBAG | IME I PREZIME | PROFESOR

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 29.11.2022.

4. (10 bodova) Neka su $a_n \geq 0$. Pokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju: Red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentan ako i samo ako mu je pripadni niz parcijalnih suma $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ omeđen.

5. (10 bodova) Odredite i opišite onu nivo-krivulju funkcije

$$f(x, y) = 16x^2 + 4y^2$$

koja prolazi točkom $T(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$, ako takva postoji.

6. (10 bodova) Postoji li limes

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sin^2 x + \sin^2 y} \ ?$$

Obrazložite!

7. (10 bodova) Zadane su funkcije

$$f(x, y) = e^{1-x^2-y^2} \ , \quad g(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \ .$$

Pokažite da se njihove vrijednosti podudaraju za sve točke $T(x, y)$ kružnice radijusa 1 sa središtem u ishodištu te da su im u tim točkama normale na grafove jednake, tj. vektori normala su im kolinearni.

8. (10 bodova) Odredite Taylorov red funkcije $f(x) = \sin x \, \cos x$ oko točke $x = \frac{\pi}{2}$.