$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 04.03.2021.

Napomene: Odmah potpišite svih pet listova koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 15 bodova):

   (a) (6 bodova) Odredite Taylorov polinom šestog stupnja za funkciju

   $$f(x) = e^{x^2+1}.$$

   (b) (9 bodova) Odredite radijus konvergencije za red potencija

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n \cdot (n+1)} x^n.$$

   Konvergira li taj red za $x = 2$ i $x = -3$?

Rješenje.

(a) Na vježbama smo pokazali da ako je funkcija jednaka redu potencija na nekoj okolini 0, tada je taj red baš Taylorov red, a njegov početni komad je Taylorov polinom. Prema tome, zbog

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

slijedi da je

$$f(x) = e \cdot e^{(x^2)} = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$$

Kako je $2n \leq 6$ za $n \leq 3$, slijedi

$$T_6(x) = e \cdot \sum_{n=0}^{3} \frac{1}{n!} x^{2n} = e + ex^2 + \frac{e}{2} x^4 + \frac{e}{6} x^6.$$

Alternativno, može se računati i prvih 6 derivacija funkcije f.

(b)

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{3^n \cdot (n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt{n}}{3^n \cdot (n+1)}}$$
$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\sqrt{n}}}{\sqrt[n]{n+1}}.$$

Kako je

$$1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{\sqrt{n}} \leq \sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \to 1,$$

prema teoremu o sendviču dobijemo da oba izraza $\sqrt[n]{\sqrt{n}}$ i $\sqrt[n]{n+1}$ teže ka 1, pa je

$$\rho = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3},$$

a radijus konvergencije je jednak $r = 3$.
Znamo da za sve $x \in \langle -r, r \rangle$ red konvergira, a za sve x t.d. $|x| > r$ red divergira. Kako je $r = 3$, zaključujemo da za $x = 2$ red **konvergira**. Za $x = -3$, imamo red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1},$$

na koji ćemo primijeniti Leibnizov kriterij. Red je očito alternirajući. Dalje imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}} 0.$$

Zadnje trebamo dokazati da je padajući. Promotrimo funkciju $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$. Njena derivacija $g'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$ je negativna za $x > 1$, stoga je funkcija padajuća g na istom intervalu, pa je red padajući. Prema Leibnizovom kriteriju zaključujemo da red za $x = -3$ **konvergira**.

JMBAG　　　IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 04.03.2021.

2. (ukupno 10 bodova) Odredite globalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x - 2y - x^2 y$$

na domeni $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le y \le 4, \ x^2 \le y\}$.

Rješenje. Prvo promotrimo stacionarne točke

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x - y + 1 - 2xy \\ -x + 2y - 2 + x^2 \end{bmatrix} = 0.$$

Prvu jednadžbu zapišimo kao $(2x+1)(1-y) = 0$, odakle je $y = 1$ ili $x = \frac{-1}{2}$.

Kako je $y = 1$ jedan od rubova, taj slučaj ćemo obraditi kasnije.

Za $x = \dfrac{-1}{2}$ iz druge jednadžbe dobivamo $y = \dfrac{7}{8}$, no ta točka se ne nalazi u domeni.

Promotrimo rubove domene. Prvo, za $y = 1$ imamo funkciju $f_1(x) = f(x,1) = x^2 - x + 1 + x - 2 - x^2 = -1$ na domeni $[-1,1]$. Dakle, na tom rubu funkcija je konstanta.

Za rub $y = 4$ imamo funkciju $f_2(x) = f(x,4) = x^2 - 4x + 16 + x - 8 - 4x^2 = -3x^2 - 3x + 8$ na domeni $[-2,2]$. To je kvadratna funkcija kojoj se lokalni ekstrem postiže u točki $x = \dfrac{-1}{2}$.

Dakle, u razmatranje trebamo ubaciti točku $\left(\dfrac{-1}{2}, 4\right)$.

Na preostala dva ruba funkcija ima jednako ponašanje, a drugačije domene. Promatramo funkciju $f_3(x) = f(x,x^2) = x^2 - x^3 + x^4 + x - 2x^2 - x^4 = -x^3 - x^2 + x$ na domenama $[-2,-1]$ i $[1,2]$. Derivacija te funkcije je $f_3'(x) = -3x^2 - 2x + 1$, a nultočke derivacije su -1 i $\dfrac{1}{3}$. Samo $x = -1$ se nalazi u nekoj od spomenutih domena, i dobivamo točku $(-1,1)$. To je točka koja se nalazi na rubu $y = 1$, pa je već bila promatrana.

Preostalo nam je provjeriti 4 rubne točke domene. Točke na pravcu $y = 1$ ne treba dodatno provjeravati, budući da znamo da na tom rubu funkcija ima konstantnu vrijednost -1. Popišimo sve kandidate za globalne ekstreme i njihove vrijednosti:

$f(t,1) = -1,\ t \in [-1,1]$

$f\left(\dfrac{-1}{2}, 4\right) = \dfrac{35}{4}$

$f(-2,4) = 2$

$f(2,4) = -10$

Zaključujemo da je globalni maksimum funkcije f jednak $\dfrac{35}{4}$ i postiže se u $\left(\dfrac{-1}{2}, 4\right)$, a globalni minimum je -10, te se postiže u $(2,4)$

3a	3b

JMBAG | IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 04.03.2021.

3. (ukupno 15 bodova) Izračunajte sljedeće integrale:

   (a) (9 bodova)

$$\int_0^\pi \int_y^\pi \frac{\sin x}{x} dxdy$$

   (b) (6 bodova)

$$\int_C xydx + xdy,$$

   gdje je C pozitivno orijentirani rub područja omeđenog s $y = x^2$, $y = x^3$, $x = 1$.

Rješenje.

(a) Zamjenom poretka integracije integral je jednak:

$$\int_0^\pi \int_0^x \frac{\sin x}{x} dydx = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = 2$$

(b) Koristeći Greenov teorem, integral je jednak:

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (1-x)dxdy = \int_0^1 (1-x)(x^2 - x^3)dx = \int_0^1 x^2 - 2x^3 + x^4 dx = \frac{1}{30}$$

JMBAG IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 04.03.2021.

4. (ukupno 10 bodova) Odredite integral:

$$\int_{\Omega} ze^{x^2+y^2+z^2}dxdydz,$$

gdje je:

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2+y^2 \leq z^2, z \leq 1\}$$

Rješenje. Koristeći cilindričke koordinate: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, Jacobijan preslikavanja je $J = r$ pa se integral može zapisati kao:

$$\int_0^1 \int_0^{z^2} \int_0^{2\pi} rze^{r^2+z^2} d\phi dr dz$$

Integriranjem slijedi:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{z^2} \int_0^{2\pi} rze^{r^2+z^2} d\phi dr dz &= 2\pi \int_0^1 \int_0^{z^2} rze^{r^2+z^2} dr dz \\
&= 2\pi \int_0^1 ze^{z^2} \left(\frac{1}{2}e^{r^2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=z} dz \\
&= \pi \int_0^1 ze^{2z^2} - ze^{z^2} dz \\
&= \pi \left(\frac{1}{4}e^{2z^2} - \frac{1}{2}e^{z^2}\right)\Bigg|_{z=0}^{1} \\
&= \frac{\pi}{4}(e-1)^2
\end{aligned}$$

5	6	7	8	9

JMBAG ______ IME I PREZIME ______

Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 04.03.2021.

5. (10 bodova) Razvijte funkciju $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ u Taylorov red oko točke $x = 1$.

Supstituirajmo $t = x - 1$ tako da zapravo trebamo oko točke $t = 0$ razviti

$$\frac{1}{x^3} = \frac{1}{(1+t)^3}.$$

Krenimo od razvoja koji slijedi iz formule za sumu geometrijskog reda:

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$$

čim je $|t| < 1$. Deriviranje član-po-član daje

$$\frac{-1}{(1+t)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n t^{n-1}$$

te još jednom

$$\frac{2}{(1+t)^3} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1) t^{n-2}.$$

Dijeljenjem s 2 i pomicanjem indeksa sumacije dobivamo

$$\frac{1}{(1+t)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)(n+1)}{2} t^n$$

pa je traženi razvoj

$$\frac{1}{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+2)(n+1)}{2}(x-1)^n$$

i on sigurno vrijedi barem za $|x-1| < 1$, tj. za $x \in \langle 0, 2\rangle$ (a ustvari i samo za te brojeve x).

6. (10 bodova) Ima li funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(2,1)\} \to \mathbb{R}$ dana formulom

$$f(x,y) = \frac{(x-2)^2(y-1)^2}{(x-y-1)^4 + (x+y-3)^4}$$

limes u točki $(2,1)$? Obrazložite odgovor.

Izračunajmo limese u danoj točki duž pravaca $x - y - 1 = 0$ i $x + y - 3$. Prvi od tih pravaca se može eksplicitno zapisati $y = x - 1$, dok se drugi može eksplicitno zapisati $y = -x + 3$.

$$\lim_{x \to 2} f(x, x-1) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^4}{(2x-4)^4} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

$$\lim_{x \to 2} f(x, -x+3) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^4}{(2x-4)^4} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

Premda su gornji limesi jednaki to još uvijek ništa ne znači za postojanje limesa iz zadatka. Limes duž horizontalnog pravca $y = 1$ i limes duž vertikalnog pravca $x = 2$ su očigledno jednaki 0. Zaključujemo da limes iz zadatka ne postoji.

7. (10 bodova) Dvostruki integral

$$\int_1^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$$

   zapišite u polarnim koordinatama.

Vidimo da integriramo po skupu

$$\mathcal{S} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ 1 \leq x \leq 2\big\},$$

kojeg prepoznajemo kao kružni odsječak od kruga polumjera 2. U polarnim koordinatama (r, θ) za r će morati vrijediti

$$\frac{1}{\cos\theta} \leq r \leq 2,$$

pri čemu gledamo samo kutove $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, jer se odsječak nalazi desno od y-osi. Nadalje, gornji raspon r-ova je neprazan upravo kada je

$$\frac{1}{\cos\theta} \leq 2 \iff -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}.$$

Dakle, integral iz zadatka u polarnim koordinatama glasi

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_{1/\cos\theta}^{2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

Ako inzistiramo da se kutovi θ uzimaju samo iz intervala $[0, 2\pi\rangle$, tada ga možemo zapisati i kao

$$\int_0^{\pi/3} \int_{1/\cos\theta}^{2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta + \int_{5\pi/3}^{2\pi} \int_{1/\cos\theta}^{2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

8. (10 bodova) Nađite neke funkcije $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvom: za svaki krug K polumjera 1 negdje u ravnini $\mathbb{R}^2$ i za svaki put (tj. parametriziranu krivulju) γ koji jednom obilazi rubnu kružnicu od K u pozitivnom smjeru vrijedi

$$\int_\gamma f(x,y)\, dx + g(x,y)\, dy = 7.$$

Korištenjem Greenovog teorema (ukoliko f i g imaju neprekidne parcijalne derivacije) dobivamo
$$\int_\gamma f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \iint_K \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\,dx\,dy$$
za svaki krug K polumjera 1. Obzirom da K ima površinu π, vidimo da nam je najpraktičnije zahtijevati da vrijedi
$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{7}{\pi}$$
na cijeloj domeni $\mathbb{R}^2$. Sada ima više mogućih odabira funkcija f i g:
$$f(x,y) = 0, \quad g(x,y) = \frac{7}{\pi}x,$$
$$f(x,y) = -\frac{7}{\pi}y, \quad g(x,y) = 0,$$
$$f(x,y) = -\frac{7}{2\pi}y, \quad g(x,y) = \frac{7}{2\pi}x.$$

9. (10 bodova) Neka je A realna simetrična matrica reda 3. Pretpostavimo da među svim točkama jedinične sfere $S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = 1\}$ funkcija $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ svoj maksimum postiže u točki $\tilde{\mathbf{x}} \in S$. Pokažite da $\tilde{\mathbf{x}}$ mora biti svojstveni vektor matrice A, tj. da postoji broj $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $A\tilde{\mathbf{x}} = \lambda\tilde{\mathbf{x}}$.

   Napomena. U ovom zadatku vektore iz $\mathbb{R}^3$ identificiramo sa stupcima duljine 3. Nadalje, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ je standardni skalarni produkt od $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, dok $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ označava uobičajenu duljinu vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Neka je matrica A eksplicitno dana sa
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$
Funkcija koju maksimiziramo je
$$f(x_1,x_2,x_3) = f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3,$$
dok funkcija koja određuje uvjet $g(\mathbf{x}) = 0$ glasi
$$g(x_1,x_2,x_3) = g(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 - 1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1.$$
Imamo
$$\nabla f(x_1,x_2,x_3) = 2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3),$$
tj.
$$\nabla f(\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x}$$
i
$$\nabla g(x_1,x_2,x_3) = 2(x_1,x_2,x_3),$$
tj.
$$\nabla g(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$$
te usput primijetimo da ∇g nikada nije jednak $(0,0,0)$ u nekoj točki sfere S. Ako je $\tilde{\mathbf{x}}$ točka maksimuma od f na S, tada po nužnom uvjetu za uvjetne ekstreme znamo da postoji Lagrangeov multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je
$$\nabla f(\tilde{\mathbf{x}}) = \lambda\nabla g(\tilde{\mathbf{x}}),$$
što daje
$$2A\tilde{\mathbf{x}} = 2\lambda\tilde{\mathbf{x}},$$
a to smo i trebali.