$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 04.03.2021.

Napomene: Odmah potpišite svih pet listova koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 15 bodova):

   (a) (6 bodova) Odredite Taylorov polinom šestog stupnja za funkciju

   $$f(x) = e^{x^2+1}.$$

   (b) (9 bodova) Odredite radijus konvergencije za red potencija

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n \cdot (n+1)} x^n.$$

   Konvergira li taj red za $x = 2$ i $x = -3$?

JMBAG IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 04.03.2021.

2. (ukupno 10 bodova) Odredite globalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x - 2y - x^2y$$

na domeni $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq y \leq 4,\ x^2 \leq y\}$.

3a	3b

JMBAG — IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 04.03.2021.

3. (ukupno 15 bodova) Izračunajte sljedeće integrale:

   (a) (9 bodova)

   $$\int_0^\pi \int_y^\pi \frac{\sin x}{x} dx dy$$

   (b) (6 bodova)

   $$\int_C xy dx + x dy,$$

   gdje je C pozitivno orijentirani rub područja omeđenog s $y = x^2$, $y = x^3$, $x = 1$.

JMBAG IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 04.03.2021.

4. (ukupno 10 bodova) Odredite integral:

$$\int_{\Omega} z e^{x^2+y^2+z^2} dxdydz,$$

gdje je:

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2+y^2 \leq z^2, z \leq 1\}$$

5	6	7	8	9

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 04.03.2021.

5. (10 bodova) Razvijte funkciju $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ u Taylorov red oko točke $x = 1$.

6. (10 bodova) Ima li funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(2,1)\} \to \mathbb{R}$ dana formulom

$$f(x,y) = \frac{(x-2)^2(y-1)^2}{(x-y-1)^4 + (x+y-3)^4}$$

limes u točki $(2,1)$? Obrazložite odgovor.

7. (10 bodova) Dvostruki integral

$$\int_1^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\, dy\, dx$$

zapišite u polarnim koordinatama.

8. (10 bodova) Nađite neke funkcije $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvom: za svaki krug K polumjera 1 negdje u ravnini $\mathbb{R}^2$ i za svaki put (tj. parametriziranu krivulju) γ koji jednom obilazi rubnu kružnicu od K u pozitivnom smjeru vrijedi

$$\int_\gamma f(x,y)\, dx + g(x,y)\, dy = 7.$$

9. (10 bodova) Neka je A realna simetrična matrica reda 3. Pretpostavimo da među svim točkama jedinične sfere $S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = 1\}$ funkcija $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ svoj maksimum postiže u točki $\tilde{\mathbf{x}} \in S$. Pokažite da $\tilde{\mathbf{x}}$ mora biti svojstveni vektor matrice A, tj. da postoji broj $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $A\tilde{\mathbf{x}} = \lambda\tilde{\mathbf{x}}$.

   Napomena. U ovom zadatku vektore iz $\mathbb{R}^3$ identificiramo sa stupcima duljine 3. Nadalje, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ je standardni skalarni produkt od $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, dok $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ označava uobičajenu duljinu vektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.