$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 26.11.2020.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 16 bodova):

   (a) (8 bodova) Odredite Taylorov polinom oko 0 stupnja 8 funkcije

   $$f(x) = x^3 \sin(2x).$$

   (b) (8 bodova) Izračunajte s greškom manjom od 10^{-2}

   $$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$$

   Napomena: ocjena ostatka Taylorovog polinoma oko nule stupnja $2m$ za $\cos x$ je $|R_{2m}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Rješenje.

(a) Na vježbama smo pokazali da ako je funkcija jednaka redu potencija na nekoj okolini 0, tada je taj red baš Taylorov red, a njegov početni komad je Taylorov polinom. Prema tome, zbog

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

slijedi da je

$$f(x) = x^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+4}$$

Kako je $2n + 4 \leq 8$ za $n \leq 2$, slijedi

$$T_8(x) = \sum_{n=0}^{2} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+4} = 2x^4 - \frac{4x^6}{3} + \frac{4x^8}{15}.$$

Alternativno, može se računati i prvih 8 derivacija funkcije f.

(b) Iz ocjene u zadatku vrijedi

$$\int_0^1 \frac{|R_{2m}(x)|}{\sqrt{x}} dx \leq \frac{1}{(2m+2)!} \int_0^1 x^{2m+\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{(2m+\frac{5}{2})(2m+2)!},$$

a desni izraz je manji od 10^{-2} već za $m = 1$ pa vrijedi

$$\left| \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx - \int_0^1 \frac{T_2(x)}{\sqrt{x}} dx \right| \leq 10^{-2}.$$

Kako je $T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, vrijedi:

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx \approx \int_0^1 \frac{1 - \frac{x^2}{2}}{\sqrt{x}} dx = 1.8.$$

2a	2b

JMBAG ______ IME I PREZIME ______

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 26.11.2020.

2. (ukupno 18 bodova)
   (a) (12 bodova) Ispitajte konvergenciju redova

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{(n+1)^{\frac{3}{2}}(\ln n)} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2 - 10\ln n + 20}.$$

   (b) (6 bodova) Odredite radijus konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}.$$

Rješenje.

(a) Za $n \geq 3$ vrijedi $\ln n \geq 1$ pa kako je i $|\cos(2n)| \leq 1$, vrijedi: $\left|\frac{\cos(2n)}{(n+1)^{\frac{3}{2}}\ln n}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$, a znamo s predavanja da red $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergira po integralnom kriteriju. Prema tome, po usporednom kriteriju konvergira i prvi red.
Znamo da konvergencija reda ne ovisi o prvih proizvoljno članova reda. Međutim, kako je funkcija $x \mapsto x^2 - 10x + 20$ rastuća za $x \geq 5$, to je funkcija $n \mapsto (\ln n)^2 - 10\ln n + 20$ rastuća za $n \geq e^5$. Lagano se pokaže i da članovi reda teže k nuli. Prema tome, red

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2 - 10\ln n + 20}$$

konvergira po Leibnizovom kriteriju pa i početni red konvergira.

(b) S vježbi znamo da je radijus konvergencije jednak

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n+3^n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n} = 3 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 3.$$

Alternativno, mogli smo koristiti formulu (koja vrijedi samo kada navedeni limes doista postoji)

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n+3^n}}{\frac{1}{2^{n+1}+3^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} : \frac{3^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = 3.$$

3a	3b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 26.11.2020.

3. (ukupno 16 bodova)
   (a) (8 bodova) Odredite $\partial_1 h_2(0,1)$, ako je $h = f \circ g$, te

$$f(u,v) = \left(e^{e^{e^{(u/v^2)}}}, u^4 + 6uv^2 - 3v\right), \qquad g(x,y) = \left(\ln(x+y), \frac{x+y}{\sqrt{y+3}}\right).$$

   (b) (8 bodova) Odredite sve točke u kojima cilindrična spirala $c(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$ siječe paraboloid $z = \pi(x^2+y^2)$, te za svaku točku presjeka T odredite kut pod kojim tangenta na c u T siječe tangencijalnu ravninu na paroboloid u T.

Rješenje.

(a) Kako bismo odredili $\partial_1 h_2(0,1)$, iz formule $Dh(0,1) = D(f\circ g)(0,1) = Df(g(0,1)) \cdot Dg(0,1)$ vidimo da je potrebno izračunati samo element u matrici na presjeku drugog retka i prvog stupca, a za to je potrebno izračunati samo parcijalnu derivaciju od druge komponente funkcije f i parcijalnu derivaciju od g po x.

$$\begin{bmatrix}\partial_u f_2(u,v) & \partial_v f_2(u,v)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4u^3+6v^2 & 12uv-3\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}\partial_x g_1(x,y) \\ \partial_y g_1(x,y)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{x+y} \\ \frac{1}{\sqrt{y+3}}\end{bmatrix},$$

$$g(0,1) = \left(0, \frac{1}{2}\right), \qquad \begin{bmatrix}\partial_u f_2(g(0,1)) & \partial_v f_2(g(0,1))\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -3\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}\partial_x g_1(0,1) \\ \partial_y g_1(0,1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 \\ \frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

$$\partial_1 h_2(0,1) = \begin{bmatrix}\partial_u f_2(g(0,1)) & \partial_v f_2(g(0,1))\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\partial_x g_1(0,1) \\ \partial_y g_1(0,1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 \\ \frac{1}{2}\end{bmatrix} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0.$$

(b) Odredimo prvo sjecišta. Tražimo točke koje se istodobno nalaze i na spirali $c(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$ i paraboloidu $z = \pi(x^2+y^2)$. Dakle, tražimo rješenje sustava

$$x_0 = \cos t_0,\ y_0 = \sin t_0,\ z_0 = 3t_0,\ z_0 = \pi(x_0^2 + y_0^2).$$

Iz $3t_0 = z_0 = \pi(x_0^2+y_0^2) = \pi(\cos^2 t_0 + \sin^2 t_0) = \pi$, vidimo da je $t_0 = \frac{\pi}{3}$, a onda i da je

$$x_0 = \frac{1}{2},\ y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2},\ z_0 = \pi.$$

Dakle, postoji točno jedna točka presjeka: $T(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \pi)$. Točka se nalazi na krivulji i na paraboloidu kao rješenje sustava.
Vektor smjera tangenta na krivulju c u točki T dana je s $c'(t_0) = (-\sin t_0, \cos t_0, 3) = (\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 3)$.

Paraboloid je dan kao nivo skup $F(x, y, z) = 0$, za funkciju $F(x, y, z) = \pi(x^2 + y^2) - z$. Vektor smjera normale na tangencijalnu ravninu je $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (2\pi x_0, 2\pi y_0, -1) = (\pi, \pi\sqrt{3}, -1)$.
Kut između ta dva vektora dan je s

$$\cos\phi = \left| \frac{\langle(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 3), (\pi, \pi\sqrt{3}, -1)\rangle}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 9}\sqrt{\pi^2 + (\pi\sqrt{3})^2 + 1}} \right| = \frac{3}{\sqrt{10}\sqrt{4\pi^2 + 1}}$$

Kut između tangente i tangencijalne ravnine jednak je komplementarnom kutu prethodnom nađenom. Dakle, odgovor je

$$\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}\sqrt{4\pi^2 + 1}}\right).$$

4	5	6	7	8	9	10

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 26.11.2020.

4. (5 bodova) Za koje sve brojeve $a \in \mathbb{R}$ konvergira red $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{an}$? Za sve takve a izračunajte sumu navedenog reda.

Rješenje. Ako red zapišemo $\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^a\right)^n$, vidimo da je riječ o geometrijskom redu. On konvergira ako i samo ako mu je kvocijent po apsolutnoj vrijednosti manji od 1, tj. ako i samo ako je $2^a < 1$, što (logaritmiranjem) naprosto postaje $a < 0$. Dakle, odgovor je: za $a \in \langle -\infty, 0\rangle$.

Za svaki a kao gore, formula za sumu geometrijskog reda daje

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^a\right)^n = \frac{1}{1-2^a}.$$

5. (5 bodova) Razvijte funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$ u Taylorov red oko broja 2.

Rješenje. Koristit ćemo poznati razvoj s predavanja

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad \text{za } |t| < 1,$$

koji je naprosto formula za sumu geometrijskog reda.

Najprije supstituiramo $t = x - 2 \iff x = t + 2$ te pišemo:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{t+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-t/2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{t}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n.$$

Gornji razvoj je traženi rezultat i usput možemo primijetiti da on vrijedi za $|-t/2| < 1$, tj. za $|x-2| < 2 \iff x \in \langle 0, 4\rangle$.

Alternativno, do istog smo rezultata mogli doći računajući viših derivacija funkcije f. Imamo

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)\cdots(-n)x^{-1-n},$$

odakle je

$$f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}$$

pa je željeni Taylorov red

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n.$$

Nedostatak ovog pristupa je što ne vidimo da Taylorov red doista konvergira prema funkciji f (ali će se i ovakvo rješenje zadatka priznavati kao "legitimno").

6. (10 bodova) Ima li funkcija f zadana formulom

$$f(x,y) = \frac{xy - x - y + 1}{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}$$

limes u točki $(1,1)$?

Rješenje. Ako nam je tako lakše, možemo supstitucijom $s = x-1$, $t = y-1 \iff x = s+1$, $y = t+1$ zadani limes svesti na limes u točki $(0,0)$:

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{st}{s^2 + t^2}.$$

Posljednji limes ne postoji, jer računajući ga duž pravca $t = 0$ dobivamo

$$\lim_{s\to 0} \frac{0}{s^2} = 0,$$

dok računajući ga duž pravca $t = s$ dobivamo

$$\lim_{s\to 0} \frac{s^2}{s^2 + s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Alternativno, mogli smo limes iz zadatka odmah računati duž pravca $y = 1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - x}{x^2 - 2x + 1} = 0$$

i duž pravca $y = x$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 4x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Opet, naravno, slijedi da zadana funkcija nema limes u točki $(1,1)$.

7. (5 bodova) Odredite i precizno skicirajte prirodnu domenu funkcije zadane formulom

$$f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}.$$

Potom odredite nivo-krivulju te funkcije koja prolazi točkom $(5,4)$. Opišite ju riječima i precizno skicirajte.

Rješenje. Da bi $f(x,y)$ bilo dobro definirano jedino je važno $x \neq 0$ i $1 - \frac{y^2}{x^2} \geq 0$. Druga nejednadžba za $x \neq 0$ postaje $x^2 \geq y^2$, tj. $|x| \geq |y|$, što je pak ekvivalentno s $-|x| \leq y \leq |x|$, odnosno

$$\begin{cases} x \leq y \leq -x & \text{za } x \in \langle -\infty, 0\rangle, \\ -x \leq y \leq x & \text{za } x \in \langle 0, +\infty\rangle. \end{cases}$$

Dakle, prirodna domena od f je

$$\{(x,y) : x \in \langle -\infty, 0\rangle,\ x \leq y \leq -x\} \cup \{(x,y) : x \in \langle 0, +\infty\rangle,\ -x \leq y \leq x\}.$$

Riječ je o skupu koji je vertikalno omeđen pravcima $y = x$ i $y = -x$, uključujući rubne pravce, ali isključujući ishodište.

Obzirom da je

$$f(5,4) = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5},$$

tražena nivo-krivulja je naprosto

$$\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}=\frac{3}{5},$$

tj.

$$1-\frac{y^2}{x^2}=\frac{9}{25},$$

tj.

$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{16}{25},$$

tj.

$$\frac{|y|}{|x|}=\frac{4}{5},$$

tj.

$$\Big\{(x,y): x\neq 0,\ y=\pm\frac{4}{5}x\Big\}.$$

Riječ je o uniji pravaca $y=\frac{4}{5}x$ i $y=-\frac{4}{5}x$ bez ishodišta $(0,0)$.

8. (10 bodova) Odredite sve moguće vrijednosti parametra $a\in\mathbb{R}$ za koje postoji neprekidna funkcija $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ koja ima neprekidne parcijalne derivacije drugog reda i za koju vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=axy+y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2+x$$

za sve $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Za svaku takvu vrijednost od a nađite barem jednu funkciju f s navedenim svojstvima.

Rješenje. Prema (Schwartzovom) teoremu o jednakosti mješovitih parcijalnih derivacija mora biti

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

pa ovdje imamo

$$\frac{\partial}{\partial y}(axy+y)=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+x),$$

tj.

$$ax+1=2x+1.$$

Posljednja jednakost treba vrijediti za sve $x\in\mathbb{R}$ pa izjednačavanjem koeficijenata polinoma s obiju strana dobivamo $a=2$.

Dakle, $a=2$ je jedini kandidat za rezultat i još moramo naći pripadnu funkciju f, čime ćemo se ujedno uvjeriti da $a=2$ doista jest jedna moguća vrijednost. Na osnovu prve jednakosti iz zadatka za $a=2$ možemo pokušati uzeti

$$f(x,y)=x^2y+xy$$

i deriviranjem (izračunajte parcijalne derivacije prvog i drugog reda) lako vidimo da je ta funkcija zadovoljavajuća.

9. (5 bodova) Odredite jedinični vektor $v\in\mathbb{R}^2$ u čijem smjeru funkcija zadana formulom $f(x,y)=\frac{x}{y}$ ima najveći rast u točki $(1,1)$. Za taj v izračunajte $\partial_v f(1,1)$, tj. derivaciju od f u smjeru vektora v u točki $(1,1)$.

Rješenje. S predavanja znamo da takav v ima smjer gradijenta $\nabla f(1,1)$ ukoliko taj gradijent nije nul-vektor.

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \Big(\frac{1}{y}, \frac{-x}{y^2}\Big)$$

Dakle,

$$\nabla f(1,1) = (1,-1)$$

pa je traženi jedinični vektor

$$v = \frac{(1,-1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\Big).$$

Nadalje znamo

$$\partial_v f(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot v = 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + (-1)\cdot\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \sqrt{2}.$$

10. (10 bodova) Pokažite da se jednadžba

$$x^3 + x + y^2 - 2 = 0$$

može jednoznačno riješiti po varijabli x u okolini svake točke (x_0, y_0) koja ju zadovoljava. Može li se ona jednoznačno riješiti po varijabli y u okolini točke $(1,0)$?

Rješenje. Definiramo li

$$f(x,y) = x^3 + x + y^2 - 2$$

jednadžba postaje $f(x,y) = 0$. Funkcija f očigledno (kao polinom dviju varijabli) ima neprekidne parcijalne derivacije. Da bismo jednadžbu mogli jednoznačno riješiti po varijabli x u okolini točke (x_0, y_0) s predavanja znamo da je dovoljno imati $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 1 \geq 0 + 1 > 0.$$

Dakle, za svaku točku (x_0, y_0) je $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) > 0$ pa smo pokazali što je trebalo.

Da se jednadžba ne može riješiti po varijabli y u okolini točke $(1,0)$ možemo naslutiti već iz:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0.$$

Ipak, to još nije dovoljan argument. Primijetimo da su

$$y = \sqrt{2 - x^3 - x}, \quad y = -\sqrt{2 - x^3 - x}$$

dvije "grane" krivulje iz zadatka. Za $x \in \langle 1, +\infty\rangle$ vrijedi $2 - x^3 - x < 0$ pa uopće nemamo odgovarajući y takav da bi bilo $f(x,y) = 0$. Štoviše, za $x \in \langle -\infty, 1\rangle$ vrijedi $2 - x^3 - x > 0$ pa imamo čak dva broja y takva da vrijedi $f(x,y) = 0$. Dakle, jednadžbu nije moguće jednoznačno riješiti po varijabli y u okolini točke $(1,0)$.