$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 26.11.2020.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 16 bodova):

   (a) (8 bodova) Odredite Taylorov polinom oko 0 stupnja 8 funkcije

   $$f(x) = x^3 \sin(2x).$$

   (b) (8 bodova) Izračunajte s greškom manjom od 10^{-2}

   $$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$$

   Napomena: ocjena ostatka Taylorovog polinoma oko nule stupnja $2m$ za $\cos x$ je $|R_{2m}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

$2a$	$2b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 26.11.2020.

2. (ukupno 18 bodova)

   (a) (12 bodova) Ispitajte konvergenciju redova

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{(n+1)^{\frac{3}{2}}(\ln n)} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2 - 10\ln n + 20}.$$

   (b) (6 bodova) Odredite radijus konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}.$$

3a	3b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 26.11.2020.

3. (ukupno 16 bodova)

   (a) (8 bodova) Odredite $\partial_1 h_2(0,1)$, ako je $h = f \circ g$, te

   $$f(u,v) = \left(e^{e^{e^{(u/v^2)}}}, u^4 + 6uv^2 - 3v\right), \qquad g(x,y) = \left(\ln(x+y), \frac{x+y}{\sqrt{y+3}}\right).$$

   (b) (8 bodova) Odredite sve točke u kojima cilindrična spirala $c(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$ siječe paraboloid $z = \pi(x^2 + y^2)$, te za svaku točku presjeka T odredite kut pod kojim tangenta na c u T siječe tangencijalnu ravninu na paroboloid u T.

4	5	6	7	8	9	10

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 26.11.2020.

4. (5 bodova) Za koje sve brojeve $a \in \mathbb{R}$ konvergira red $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{an}$? Za sve takve a izračunajte sumu navedenog reda.

5. (5 bodova) Razvijte funkciju $f(x) = \frac{1}{x}$ u Taylorov red oko broja 2.

6. (10 bodova) Ima li funkcija f zadana formulom

$$f(x,y) = \frac{xy - x - y + 1}{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}$$

limes u točki $(1,1)$?

7. (5 bodova) Odredite i precizno skicirajte prirodnu domenu funkcije zadane formulom

$$f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}.$$

Potom odredite nivo-krivulju te funkcije koja prolazi točkom $(5,4)$. Opišite ju riječima i precizno skicirajte.

8. (10 bodova) Odredite sve moguće vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ za koje postoji neprekidna funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ koja ima neprekidne parcijalne derivacije drugog reda i za koju vrijedi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = axy + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + x$$

za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Za svaku takvu vrijednost od a nađite barem jednu funkciju f s navedenim svojstvima.

9. (5 bodova) Odredite jedinični vektor $v \in \mathbb{R}^2$ u čijem smjeru funkcija zadana formulom $f(x,y) = \frac{x}{y}$ ima najveći rast u točki $(1,1)$. Za taj v izračunajte $\partial_v f(1,1)$, tj. derivaciju od f u smjeru vektora v u točki $(1,1)$.

10. (10 bodova) Pokažite da se jednadžba

$$x^3 + x + y^2 - 2 = 0$$

može jednoznačno riješiti po varijabli x u okolini svake točke (x_0, y_0) koja ju zadovoljava. Može li se ona jednoznačno riješiti po varijabli y u okolini točke $(1,0)$?