$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 11.02.2021.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 20 bodova):
   (a) (10 bodova) Ispitajte tip lokalnih ekstrema funkcije $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadane s
   $$g(x, y) = e^{x+y} + x^2 + 3xy + 2y^2.$$
   (b) (10 bodova) Odredite globalne ekstreme funkcije $f(x, y) = y^3 - 3y - \frac{9}{4}\sin^2 x$ na domeni $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \cos x\}$.

Rješenje.

(a)
$$Dg(x, y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} + 2x + 3y & e^{x+y} + 3x + 4y \end{bmatrix}.$$

Izjednačujući obje koordinate s nulama i oduzimajući, dobivamo $x+y = 0$. Uvrštavajući u prvu jednadžbu, dobivamo $e^0 + y = 0$, odakle $y = -1$, pa i $x = 1$. Dakle, jedina stacionarna točka je $(1, -1)$.

$$Hg(x, y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} + 2 & e^{x+y} + 3 \\ e^{x+y} + 3 & e^{x+y} + 4 \end{bmatrix}, \quad Hg(1, -1) = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Prva minora iznosi 3, a determinanta cijele matrice iznosi $3 \cdot 5 - 4^2 = -1$. Zaključujemo da je matrica indefinitna, stoga je $(1, -1)$ sedlasta točka. Funkcija nema lokalnih ekstrema.

(b)
$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2}\sin x \cos x & 3(y^2 - 1) \end{bmatrix}.$$

Izjednačavajući s nulom i uzimajući u obzir domenu, dobivamo da je prva koordinata nula ako i samo ako je $x = 0$ ili $x = \frac{\pi}{2}$, a druga koordinata je nula ako i samo ako je $y = 1$. Jedine kombinacije koordinata koje se nalaze u domeni A su $(0, 1)$.

Na rubu $x = 0$ funkciju parametriziramo s y: $f_0(y) = y^3 - 3y$, $y \in [-1, 1]$. Kao gore izračunamo derivaciju, i nađemo jednu točku kao kandidat za točku lokalnog ekstrema: $(0, 1)$.

Na rubu $y = 0$ funkciju parametriziramo s x: $f_1(x) = -\frac{9}{4}\sin^2 x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Imamo: $f_1'(x) = -\frac{9}{2}\sin x \cos x$, pa vidimo da su stacionarne točke samo u $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{2}$, što znači da su kandidati za ekstreme $(0, 0)$ i $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Na rubu $y = \cos x$, funkciju možemo parametrizirati pomoću varijable x. Dakle, na domeni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ treba naći ekstreme funkcije $f_2(x) = \cos^3 x - \cos x - \frac{9}{4}\sin^2 x$.

$f_2'(x) = \frac{3}{2}\sin x(2\cos^2 x + 3\cos x - 2) = 0$. Uvrštavamo supstituciju $t = \cos x$ i rješavamo kvadratnu jednadžbu u drugoj zagradi. Rješenja su $t = 1/2$ i $t = -2$. Drugo odbacujemo zbog slike funkcije cos. Dakle, kandidati za točke globalnih ekstrema za f_2 su $x = 0$ (zbog faktora $\sin x$ u derivaciji) i $x = \frac{\pi}{3}$. Odgovarajući kandidati za točke globalnih ekstrema za f su $(0, 1)$ i $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$.
Uspoređujemo vrijednosti za sve dobivene kandidate za točke globalnih ekstrema:
$f(0, 1) = -2$
$f(0, 0) = 0$
$f(\frac{\pi}{2}, 0) = -\frac{9}{4}$
$f(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}) = -\frac{49}{16}$
Zaključujemo da je globalni maksimum funkcije f jednak 0 i postiže se u $(0, 0)$, a globalni minimum funkcije f jednak $-\frac{49}{16}$ i postiže se u $(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$.

$2a$	$2b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 11.02.2021.

2. (ukupno 20 bodova)
   (a) (10 bodova) Izračunajte:
   $$\int_\Omega e^{x^2}dxdy$$
   gdje je Ω trokut s vrhovima: $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$.
   (b) (10 bodova) Izračunajte volumen tijela
   $$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2 \le 3z^2\}$$

Rješenje.

(a) Navedeni trokut omeđen je pravcima $y=-x$, $y=x$ i $x=1$. Prema tome, vrijedi:
$$\int_\Omega e^{x^2}dxdy = \int_0^1\int_{-x}^{x} e^{x^2}dydx = \int_0^1 2xe^{x^2}dx = e^{x^2}\Big|_0^1 = e-1.$$

(b) Navedeni prostor sastoji se od presjeka dvostranog stošca i kuglinog vijenca. U sferičnim koordinatama:
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$
prvi uvjet postaje: $1 \le r^2 \le 4$, odnosno $1 \le r \le 2$, dok drugi uvjet postaje:
$$r^2\sin^2\theta \le 3r^2\cos^2\theta \Rightarrow \theta \in [0,\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3},\pi].$$
Jacobijan navedene supstitucije je: $J = r^2\sin\theta$. Zbog toga vrijedi:
$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta d\phi d\theta dr + \int_1^2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta d\phi d\theta dr \\ &= 2\pi\int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{3}} r^2\sin\theta d\theta dr + 2\pi\int_1^2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} r^2\sin\theta d\theta dr \\ &= 2\pi\int_1^2 r^2dr \\ &= \frac{14\pi}{3} \end{aligned}$$

$3a$	$3b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 11.02.2021.

3. (ukupno 10 bodova)

Neka je Ω područje omeđeno krivuljama $y = x^2$ i $x + y = 2$, te C njegov pozitivno orijentirani rub. Koristeći Greenov teorem, izračunajte vrijednost integrala

$$\int_C \frac{y^3}{y^2+1}dx + \frac{xy^2 - x}{(y^2+1)^2}dy.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
&\partial_x\left(\frac{xy^2-x}{(y^2+1)^2}\right) - \partial_y\left(\frac{y^3}{y^2+1}\right) \\
&\quad = \frac{1}{(y^2+1)^2}\left((y^2-1) - (3y^2(y^2+1) - 2y\cdot y^3)\right) \\
&\quad = \frac{-y^4-2y^2-1}{(y^2+1)^2} = -1
\end{aligned}$$

Po Greenovom teoremu je

$$I := \int_C \frac{y^3}{y^2+1}dx + \frac{xy^2-x}{(y^2+1)^2}dy = \int_\Omega -1dxdy.$$

Sjecište krivulja koje omeđuju Ω: $y = x^2 = 2 - x \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x+2)(x-1) = 0$. Točke presjeka su $(-2, 4)$ i $(1, 1)$.

$$\begin{aligned}
I = \int_\Omega -1dxdy = -\int_{-2}^{1}\int_{x^2}^{2-x} 1dydx = -\int_{-2}^{1} 2 - x - x^2dx \\
= -\left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=-2}^{1} = \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

4	5	6	7	8	9	10

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 11.02.2021.

4. (10 bodova) Prilikom integriranja po nutrini, vanjštini ili dijelu elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ korisno je uvesti eliptičke koordinate (r, φ), $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$ gdje je

$$\begin{cases} x = a\, r\, \cos\varphi\,, \\ y = b\, r\, \sin\varphi\,. \end{cases}$$

Koristeći eliptičke koordinate izračunajte

$$\iint_{\mathcal{E}} x^2\, dx\, dy \quad ,$$

gdje je

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \right\} \quad .$$

Zamjena varijabli

$$T(r, \varphi) = (ar\cos\varphi, br\sin\varphi)$$

ima diferencijal

$$DT(r, \varphi) = \begin{bmatrix} a\cos\varphi & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi & br\cos\varphi \end{bmatrix}$$

te joj je Jacobijan

$$J_T(r, \varphi) = \left| a\cos\varphi br\cos\varphi - (-ar\sin\varphi)b\sin\varphi \right| = abr,$$

tj. u našem slučaju $a = 2$, $b = 4$ imamo

$$J_T(r, \varphi) = 8r.$$

Skup $\mathcal{E}$ je u eliptičkim koordinatama dan jednadžbom

$$\frac{4r^2\cos^2\varphi}{4} + \frac{16r^2\sin^2\varphi}{16} \leq 1 \quad \text{tj.} \quad r \leq 1.$$

Zato je traženi integral jednak

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (2r\cos\varphi)^2\, 8r\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 32\cos^2\varphi \left(\int_0^1 r^3\, dr \right) d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} 8\cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 4(1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi = 8\pi.$$

5. (10 bodova) Neka je $K = [1,2]^2$ kvadrat a Γ njegov rub orijentiran u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu. Izračunajte

$$\int_\Gamma x^2y\,dx + 3x^2y\,dy \quad .$$

Prema Greenovom teoremu traženi integral je jednak

$$\iint_K \Big(\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\Big)\,dx\,dy = \iint_K \big(6xy - x^2\big)\,dx\,dy$$
$$= \int_1^2 \Big(\int_1^2 \big(6xy - x^2\big)\,dy\Big)\,dx = \int_1^2 \big(9x - x^2\big)\,dx = \frac{27}{2} - \frac{7}{3} = \frac{67}{6}.$$

6. (10 bodova) Trostruki integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

napišite u obliku

$$\int_?^? \int_?^? \int_?^? f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz \quad .$$

Vidimo da integriramo po trodimenzionalnom skupu

$$\mathcal{S} = \big\{(x,y,z) \in [0,1]^3 : \sqrt{x} \le y,\ \ y+z \le 1\big\}.$$

Za dane $z \in [0,1]$ i $x \in [0,1]$ granice integracije po varijabli y određene su sa

$$\sqrt{x} \le y \le 1 - z.$$

Skup takvih y je neprazan samo kada je

$$\sqrt{x} \le 1 - z \quad \iff \quad x \le (1-z)^2.$$

Dakle,

$$\iiint_{\mathcal{S}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{(1-z)^2} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz.$$

7. (10 bodova) Nađite (najkraću) udaljenost od točke $T(1,2,0)$ do konusa

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad .$$

Rješenje pomoću uvjetnih ekstrema. Minimiziramo kvadrat udaljenosti od proizvoljne točke (x,y,z) na konusu do točke T:

$$f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2$$

uz uvjet (koji je naprosto jednadžba konusa):

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Iz geometrijskih razloga je jasno da postoji globalni minimum. Računamo

$$\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)$$

i usput primijetimo da je $\nabla g(x,y,z) \neq (0,0,0)$ u svakoj točki konusa, osim baš u ishodištu $(0,0,0)$, no iz geometrijskih razloga je jasno da ishodište ionako nije točka na konusu najbliža točki T. Kako je

$$\nabla f(x,y,z) = (2(x-1), 2(y-2), 2z),$$

prema teoremu s predavanja za točku lokalnog ekstrema (x,y,z) postoji Lagrangeov multiplikator λ takav da je

$$(2(x-1), 2(y-2), 2z) = \lambda(2x, 2y, -2z),$$

tj.

$$x-1 = \lambda x, \quad y-2 = \lambda y, \quad z = -\lambda z.$$

Iz treće jednadžbe slijedi $z=0$ ili $\lambda=-1$. Primijetimo da bi $z=0$ zajedno s jednadžbom konusa dalo $x=y=0$, a već smo bili rekli kako ishodište nije rješenje. Dakle, $\lambda=-1$, što uvršteno u prve dvije jednadžbe daje $x=1/2$, $y=1$. Uvrštavanjem u jednadžbu konusa dobivamo $z = \pm\sqrt{(1/2)^2+1^2} = \pm\sqrt{5}/2$. Dakle, točke minimuma su

$$(x,y,z) = \Big(\frac{1}{2}, 1, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\Big)$$

i tražena udaljenost je

$$\sqrt{\Big(\frac{1}{2}-1\Big)^2 + (1-2)^2 + \Big(\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\Big)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Alternativno, mogli smo definirati Lagrangeovu funkciju

$$L(x,y,z,\lambda) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 - \lambda(x^2+y^2-z^2).$$

Ostatak rješenja bi, naravno, bio isti.

Rješenje bez uvjetnih ekstrema. Opet minimiziramo kvadrat udaljenosti od proizvoljne točke (x,y,z) na konusu do točke T:

$$d^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2,$$

ali ovaj put iz jednadžbe konusa izrazimo z^2 pomoću x, y i uvrstimo u gornju formulu:

$$d^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + x^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 5.$$

Sada minimiziramo funkciju

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 2x - 4y + 5$$

po cijelom $\mathbb{R}^2$ (bez uvjeta). Računamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 4.$$

U točki ekstrema mora vrijediti $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, što nam daje sustav od dvije jednadžbe:

$$4x - 2 = 0, \quad 4y - 4 = 0,$$

čije rješenje je $x=1/2$, $y=1$. To je točka traženog minimuma, jer je jedini kandidat, a iz geometrijskih razloga znamo da se postiže globalni minimum. Tražena udaljenost je

$$\sqrt{f\Big(\frac{1}{2}, 1\Big)} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

8. (10 bodova) Neka je jednadžbom $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2$ dana ploha Γ te neka f ima neprekidne parcijalne derivacije prvog reda na otvorenom skupu $\mathcal{O}$. Pokažite da, ako je $T(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ ona točka s Γ koja je najbliža točki $S(a, b, c) \notin \Gamma$, onda je dužina $\overline{TS}$ okomita na plohu Γ u točki T.

Točku (x_0, y_0, z_0) možemo interpretirati kao točku minimuma funkcije

$$F(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$$

uz uvjet

$$G(x, y, z) = z - f(x, y) = 0.$$

Vidimo

$$\nabla F(x, y, z) = \big(2(x - a), 2(y - b), 2(z - c)\big)$$

i

$$\nabla G(x, y, z) = \Big(- \frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\Big).$$

Primijetimo da je

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = 2(x_0, y_0, z_0) - 2(a, b, c) = 2\overrightarrow{ST}$$

te da je

$$\nabla G(x_0, y_0, z_0) = \Big(- \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1\Big) = \vec{n}(x_0, y_0, z_0)$$

vektor normale na plohu Γ u točki (x_0, y_0, z_0). S druge strane, iz nužnog uvjeta za uvjetne lokalne ekstreme znamo da su vektori $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ i $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$ kolinearni, što znači da je $\overrightarrow{ST}$ kolinearan s vektorom normale $\vec{n}(x_0, y_0, z_0)$, tj. da je okomit na plohu Γ.