

Diskretna matematika

Zadaci za vježbe po tjednima

Preliminarni i glavni zadaci, bez rješenja

Zadaci su preuzeti iz skripte *Diskretna matematika – vježbe* (uredili A. Beker, N. Kamčev, I. Novak; doprinos: M. Bašić, M. Božić, M. Berljafa, B. Bršćić, M. Erceg, I. Gavran, M. Hanzer, N. Kamčev, I. Krijan, M. Marohnić, T. Pejković, I. Puljiz, P. Sruk i dr.), 28. rujna 2025. Numeracija zadataka odgovara skripti.

Sadržaj

1. Uvod
2. Permutacije i kombinacije
3. Kombinacije i permutacije s ponavljanjem
4. Permutacije i kombinacije: dokazivanje identiteta
5. Sinteza I i uvod u rekurzije
6. Rekurzivne relacije
7. Sinteza II
8. Funkcije izvodnice
9. Formula uključivanja i isključivanja
10. Osnove teorije grafova i stabla
11. Stabla
12. Planarni grafovi
13. Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

1. Uvod

Ponavljanje i preliminarni zadaci

Ključne riječi: princip sume, princip produkta, princip komplementa, bijekcija, princip kvocijenta, $n!$.

Broj elemenata nekog konačnog skupa A označavat ćemo s $|A|$. Partitivni skup $\mathcal{P}(A)$ je skup koji sadrži sve podskupove skupa A . Koji se principi koriste u sljedećim primjerima?

Primjer 1.1. Iz grada A u grad B možemo doći brodom, autom ili avionom. Postoje dva morska, dva cestovna i tri zračna puta. Na koliko načina možemo doći iz grada A u grad B ?

Primjer 1.2. Da bismo iz grada A došli u grad D , moramo proći kroz gradove B i C . Iz grada A u grad B možemo doći na 2 načina, iz B u C na 5, a iz grada C u grad D na 3 načina. Na koliko načina možemo doći iz grada A u grad D ?

Zadatak 1.3. Odredite broj prirodnih djelitelja broja 600.

Zadatak 1.4. Odredite broj uređenih parova nenegativnih cijelih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju nejednadžbu $x^2 + y^2 \leq 5$.

Zadatak 1.5. Na koliko načina možemo 6 vrsta voća kojeg imamo u neograničenim količinama podijeliti između 10 djece tako da svako dijete dobije po jednu voćku?

Primjer 1.6. Koliko ima prirodnih brojeva manjih (strogo) od 10^n koji sadrže znamenku 4?

Primjer 1.7. Koliko ima brojeva sastavljenih od znamenaka broja 1113333344455678?

1. Uvod

Glavni zadaci

Primjer 1.8. Neka su definirani skupovi $X = \{1, 2, \dots, 100\}$ te

$$S = \{(a, b, c) : a, b, c \in X, a < b, a < c\}.$$

Koliko je $|S|$?

Zadatak 1.9. Koliko ima permutacija (poredaka) skupa $\{1, 2, \dots, 7\}$ takvih da nikoja dva od 1, 2, 3 nisu susjedni?

Primjer 1.10. (Prvi kolokvij 2016/2017, 1. zadatak)

- (a) Koliko ima brojeva sastavljenih od znamenaka broja 1113333344455678?
- (b) Koliko ima brojeva sastavljenih od znamenaka broja 1113333344455678 ako su znamenke 6 i 8 s različitih strana znamenke 7?

Primjer 1.11. Koliko ima parnih brojeva između 20000 i 70000 takvih da su znamenke svakog broja međusobno različite?

Zadatak 1.12.

- (a) S koliko nula završava broj $100!$?
- (b) S kojim eksponentom prost broj p ulazi u rastav broja $n!$ na proste faktore?

Primjer 1.13. Na svako polje ploče $n \times n$ upisan je broj koji je jednak broju pravokutnika koji sadrže to polje i koji su sastavljeni od polja ploče. Odredite sumu svih upisanih brojeva.

2. Permutacije i kombinacije

Preliminarni zadaci

Ključne riječi: permutacija, k -permutacija, kombinacija, $n!$, $\binom{n}{k}$.

Zadatak 2.1. Dokažite indukcijom da za konačan skup S i $|S| = n$ vrijedi $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$.

Primjer 2.2. Neka je $A = \{a, b, c, d\}$. Napišite sve 2-permutacije skupa A .

Primjer 2.3. Odredite sve 2-kombinacije skupa $\{a, b, c, d\}$.

Zadatak 2.4. (Bez korištenja formule!) Imamo neograničenu zalihu voća n različitih vrsta. Na koliko načina možemo odabrati k voćki

- (a) za $n = 2$ ili $n = 3$,
- (b) za $k = 2$ ili $k = 3$?

Primjer 2.5. Koliko se nizova slova duljine 5 može sastaviti iz hrvatske abecede, tako da su na prvom i petom mjestu različiti samoglasnici, a na ostala tri mjesta međusobno različiti suglasnici? (Hrvatska abeceda ima 30 slova, od kojih su 5 samoglasnici, a ostalo suglasnici.)

Primjer 2.6. Na zabavi je 7 mladića i 3 djevojke. Na koliko načina ljude možemo posložiti u red tako da

- (a) se djevojke nalaze na prva tri mjesta;
- (b) tri djevojke čine jedan blok;
- (c) se mladići nalaze na prvoj i posljednjoj poziciji i nema susjednih djevojaka?

Primjer 2.7. Na koliko načina možemo odabrati grupu od 5 osoba iz grupe od 4 profesora i 7 studenata

- (a) ako nema restrikcija,
- (b) tako da u grupi budu točno 2 profesora,
- (c) tako da u grupi budu barem 3 profesora,
- (d) tako da određeni profesor i student ne budu u grupi?

Primjer 2.8. Na koliko načina možemo podijeliti 240 studenata u 3 jednakobrojne skupine tako da

- (a) prva skupina ide na vježbe iz Vjerojatnosti, druga na vježbe iz Diskretne matematike, a treća na Engleski,
- (b) sve tri skupine idu na vježbe iz Diskretne matematike?

2. Permutacije i kombinacije

Glavni zadaci

Primjer 2.9. (Vjerojatnosti u pokeru) U pokeru, igrači dobivaju skup od 5 karata iz standardnog špila od 52 karte. Svaka karta ima jednu od 4 boje i jedan od 13 brojeva. Radi jednostavnosti, recimo da su brojevi $\{1, 2, 3, \dots, 13\}$. Dobiveni skup od 5 karata naziva se *rukom*.

- Koliko različitih poker ruku se može podijeliti iz standardnog špila od 52 karte?
- Koliko poker ruku je boja (flush)? (Boja je ruka u kojoj su sve karte iste boje, ali nisu nužno u nizu.)
- Koliko poker ruku su dva para? (Dva para je ruka u kojoj imamo 2 karte jednog broja, 2 karte drugog broja i 1 kartu trećeg broja.)
- Koliko poker ruku su tris? (Tris je ruka u kojoj imamo 3 karte jednog broja i 2 karte različitih ostalih brojeva.)
- Koja je otprilike vjerojatnost za dva para, a koja za tris?

Primjer 2.10. Koliko ima najkraćih puteva u cjelobrojnoj mreži od $(0, 0)$ do $(m, n) \in \mathbb{N}^2$?

- Bez dodatnih uvjeta.
- Koji prolaze točkom (p, q) , gdje je $p \in \mathbb{N}$, $p < m$ i $q \in \mathbb{N}$, $q < n$.
- Koji ne prolaze segmentom $[(p, q), (p + 1, q)]$, gdje je $p \in \mathbb{N}$, $p < m - 1$ i $q \in \mathbb{N}$, $q < n$.

Primjer 2.11. Na koliko načina možemo rasporediti n bračnih parova oko okruglog stola? Dva rasporeda smatramo jednakima ako se jedan iz drugoga može dobiti rotacijom.

- Bez dodatnih uvjeta.
- Tako da Ana i Ivan sjede jedno do drugoga ($n \geq 2$).
- Tako da muškarci i žene alterniraju.
- Tako da svaka žena sjedi do svog muža ($n \geq 2$).

Primjer 2.12. Za prirodan broj n , neka je dan skup A s $2n$ elemenata. *Sparivanje* je particija skupa A na dvočlane podskupove. Odredite koliko ima različitih sparivanja skupa A .

Zadaci za vježbu

Zadatak 2.13. Na koliko se načina može razmjestiti 8 kula na šahovsku ploču tako da se nikoje dvije kule ne napadaju?

- Bez dodatnih uvjeta.
- Tako da se kule razlikuju.

(Kula napada sva polja u istom retku i stupcu u kojem se nalazi.)

Zadatak 2.14. Neka je S skup prirodnih brojeva čije su znamenke iz skupa $\{1, 3, 5, 7\}$ takvih da se nijedna znamenka ne ponavlja.

- Odredite $|S|$.
- Odredite $\sum_{n \in S} n$.

Zadatak 2.15. n kandidata za neki posao predstavlja se pred tročlanom komisijom. Svaki od članova komisije rangira kandidate prema svom kriteriju. Pravilo je da će neki kandidat biti

prihvaćen ako ga je barem dvoje članova komisije stavilo na prvo mjesto. Izračunajte u koliko će se posto slučajeva izabrati barem jedan kandidat.

Zadatak 2.16. 10 majki vodi po jedno svoje dijete na kazališnu predstavu. Pred ulazom u kazalište stvorio se red. Na koliko je načina moguće posložiti red ako:

- (a) svaka majka mora biti točno iza svog djeteta,
- (b) svaka majka mora biti iza svog djeteta, ali ne moraju biti susjedni?

Zadatak 2.17. Koliko poker ruku su skale u boji, full house, par? (Skala u boji je ruka u kojoj je svih 5 karata iste boje i u nizu. Full house je ruka u kojoj imamo 3 karte istog broja i 2 karte drugog broja.)

3. Kombinacije i permutacije s ponavljanjem

Ponavljanje i preliminarni zadaci

Ključne riječi: multiskup, permutacija multiskupa.

Primjer 3.1. Ispišite sve 2-kombinacije s ponavljanjem skupa $S = \{a, b, c\}$.

Primjer 3.2. (*Metoda kuglica i štapića*) Na koliko načina možemo $k \in \mathbb{N}$ jednakih kuglica rasporediti u $n \in \mathbb{N}$ različitih kutija?

Primjer 3.3. U Bologni se prodaju tri vrste sendviča: sa šunkom, tunom i vegetarijanski. Na koliko načina student može naručiti 6 sendviča (nije bitan redoslijed naručivanja)?

Primjer 3.4. Neka je $M = \{a, a, b, b, c, c, c\} = \{a^2, b^2, c^3\}$. Koliko ima permutacija multiskupa M ?

Zadatak 3.5. Odredite broj ternarnih nizova (nizova nula, jedinica i dvojki) koji imaju 2 nule, 3 jedinice i 5 dvojki.

Primjer 3.6. Koliko ima peteroznamenastih brojeva kojima su znamenke elementi multiskupa $\{7^4, 2^2, 4^1, 6^1\}$?

3. Kombinacije i permutacije s ponavljanjem

Glavni zadaci

Primjer 3.7. Koliko ima uređenih četvorki $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4$ takvih da je $x_1x_2x_3x_4 = 9000$?

Primjer 3.8. Koliko ima k -podskupova skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ koji ne sadrže dva uzastopna broja?

Primjer 3.9. Koliko ima cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$$

uz uvjete: $x_1, x_4, x_5 \geq 0$; $2 \leq x_3 \leq 7$; $x_2 \geq 2$?

Primjer 3.10. Pokažite da je broj $(4n)!$ djeljiv s 2^{3n} i s 3^n .

Zadatak 3.11. Neka je dan skup $A = \{1, 2, \dots, n\}$.

- (a) Odredite koliko ima bijekcija $f: A \rightarrow A$.
- (b) Odredite koliko ima bijekcija $f: A \rightarrow A$ koje su same sebi inverz i nemaju fiksnih točaka.
- (c) Odredite koliko ima rastućih funkcija $f: A \rightarrow A$.

Zadatak 3.12. Pauk ima po jednu cipelu i jednu čarapu za svaku od svojih 8 nogu. Na koliko se načina pauk može obući ako na svaku nogu najprije mora obući čarapu, a onda cipelu? Prebrojavamo procese oblačenja, a ne konačan rezultat!

4. Permutacije i kombinacije: dokazivanje identiteta

Ponavljanje i preliminarni zadaci

Umjesto preliminarnih zadataka, očekuje se da su studenti shvatili, ili idealno, samostalno dokazali identitete s predavanja.

Broj k -permutacija n -elementnog skupa označavamo s $P(n, k)$.

Zadatak 4.1. Dokažite tvrdnje koristeći kombinatorne argumente, tj. metodom dvostrukog prebrojavanja.

(a) $P(n, k) = n P(n - 1, k - 1)$

(b) $P(n + 1, k) = P(n, k) + k P(n, k - 1)$

(c) $\binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}$

(d) $\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

(e) $\sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} = n 2^{n-1}$

4. Permutacije i kombinacije: dokazivanje identiteta

Glavni zadaci

Zadatak 4.2. Dokažite da za $n \geq 4$ vrijedi

$$\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\binom{n}{4} + 3\binom{n}{3}.$$

Zadatak 4.3. Za nenegativne cijele brojeve m i n pronađite zatvorenu formulu za sumu

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$$

i dokažite tu formulu pomoću kombinatornih argumenata.

Zadatak 4.4. Dokažite kombinatornim argumentom da za $n, r \in \mathbb{N}$ takve da je $r \leq n$ vrijedi

$$\sum_{k=r}^n \binom{n}{k} \binom{k}{r} 2^k = 2^r 3^{n-r} \binom{n}{r}.$$

Zadatak 4.5. Dokažite da za $0 \leq m < n$ vrijedi

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k} \binom{2k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m-1}.$$

Zadatak 4.6. (Prvi kolokvij 2014/2015, 7. zadatak) Dokažite da vrijedi

$$\sum_{k=0}^n k(n-k) \binom{n}{k}^2 = n^2 \binom{2n-2}{n}.$$

Daljnji zadaci

Zadatak 4.7. Dokažite kombinatornim argumentom

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}.$$

Zadatak 4.8. Dokažite kombinatornim argumentom da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 2^{k-1} = 3^{n-2} n(2n+1).$$

Zadatak 4.9. Neka je B_n broj particija skupa $\{1, \dots, n\}$. Dokažite da je broj particija skupa $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ koje imaju svojstvo da se susjedni brojevi nikada ne javljaju u istom članu particije jednak B_{n-1} .

Zadatak 4.10. Neka je $s(n, m)$ broj permutacija n -članog skupa koje se sastoje od m ciklusa. Kombinatornim argumentom dokažite

$$\sum_{k=m}^n s(k, m) \frac{n!}{k!} = s(n+1, m+1),$$

gdje je $n \geq m \geq 0$.

5. Sinteza I i uvod u rekurzije

Preliminarni zadaci

Preporučamo studentima da detaljno prorate zadatke iz prethodnih poglavlja i postavite vezana pitanja.

Zadatak 5.1. Postavite rekurzivnu relaciju za a_n , broj podskupova n -članog skupa. Radi li se o linearnoj rekurziji?

Zadatak 5.2. U nekoj populaciji se širi virus. Nultog dana broj zaraženih je $b_0 = 1$. Svakog dana svaka zaražena osoba zarazi 2 nove osobe. Koliki je broj zaraženih u n -tom danu (označen s b_n)?

5. Sinteza I i uvod u rekurzije

Glavni zadaci

Zadatak 5.3. (Prvi kolokvij 2013/2014, 4. zadatak) 10 zatvorenika odlazi na kino projekciju u pratnji 20 policajaca. Za svakog zatvorenika zadužena su točno dva određena policajca. Pred ulazom u kino napravio se red (jedan po jedan). Neposredno iza svakog zatvorenika mora doći jedan od za njega zaduženih policajaca, dok drugi mora biti negdje iza njih (ali ne nužno neposredno iza). Na koliko načina se zatvorenike i policajce može posložiti u red?

Zadatak 5.4. Neka je X skup s n elemenata.

- (a) Koliko ima surjekcija $f: X \rightarrow X$ takvih da je $f(f(x)) = f(x)$ za svaki $x \in X$?
- (b) Dokažite da je broj funkcija $f: X \rightarrow X$ takvih da je $f(f(x)) = f(x)$ za svaki $x \in X$ jednak

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^{n-k}.$$

Zadatak 5.5. (Prvi kolokvij 2015/2016, 6. zadatak) Neka je $S(n, m)$ broj particija n -članog skupa na m nepraznih dijelova (Stirlingov broj druge vrste). Za $m > n$ kombinatorno dokažite

$$m^n = \sum_{k=1}^n S(n, k) \binom{m}{k} k!.$$

Uvod u rekurzivno rješavanje zadataka

Zadatak 5.6. Na koliko maksimalno područja n pravaca dijeli ravninu?

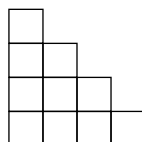
Zadatak 5.7. Neka je r_n broj dijelova na koje dijagonale konveksnog n -terokuta dijele njegovu unutrašnjost. Pretpostavimo da se nikoje 3 dijagonale ne sijeku u istoj točki. Nađite rekurziju i zatvorenu formulu za r_n .

U sljedećem zadatku ne morate naći zatvorenu formulu, već samo relevantnu rekurzivnu relaciju s početnim uvjetima.

Primjer 5.8.

- (a) Odredite rekurzivnu relaciju za a_n = broj podskupova skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ koji nemaju susjednih elemenata. Odredite prvih pet članova niza (a_n) .
- (b) Odredite rekurzivnu relaciju za broj binarnih nizova duljine n koji nemaju susjednih jedinica.

Zadatak 5.9. (Prvi kolokvij 2012/2013, 4. zadatak) Neka su k i n prirodni brojevi i neka je $k \leq n$. Neka je B_n ploča koja ima n redaka i u i -tom retku ima i polja. Npr. B_4 je



Dokažite da je Stirlingov broj druge vrste $S(n, k)$ jednak broju načina da stavimo $n - k$ topova koji se ne napadaju na ploču B_{n-1} .

6. Rekurzivne relacije

Ponavljjanje i preliminarni zadaci

U svim zadacima koji slijede vrijedi ispisati prvih nekoliko članova niza, što pomaže u pogađanju i/ili provjeri rješenja.

Zadatak 6.1. Odredite sume formalnog reda $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (dakle, bez brige o konvergenciji), za

- (a) $a_n = 1$,
- (b) $a_n = n$,
- (c) $a_n = 3n + 5$,
- (d) $a_n = 2^n$,
- (e) $a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ paran,} \\ 1, & n \text{ neparan,} \end{cases}$
- (f) $a_n = \frac{1}{n+2}$.

Zadatak 6.2. Nadite zatvorenu formulu za sljedeće nizove.

- (a) $a_{n+1} = 5a_n$, $a_0 = 2$,
- (b) $b_{n+1} = b_n + 2^n$, $b_0 = 1$,
- (c) $c_{n+1} = c_n + n \cdot 3^n$, $c_0 = 0$,
- (d) $d_n = 3d_{n-1} - d_{n-3}$, s uvjetima $d_1 = 3$, $d_2 = 9$, $d_3 = 26$.

Primjer 6.3. Riješite rekurziju:

$$a_n - 7a_{n-1} + 15a_{n-2} - 9a_{n-3} = 0; \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 3.$$

Napomena 6.3. Fibonaccijev niz definiran je s $F_1 = F_2 = 1$ te $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $\forall n \geq 3$. Zatvorena formula za Fibonaccijeve brojeve dana je s

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 6.4. Dokažite prethodnu formulu indukcijom (dakle, algebarski).

6. Rekurzivne relacije

Glavni zadaci

Homogene linearne rekurzije s konstantnim koeficijentima

Zadatak 6.5. Nađite zatvorenu formulu za niz zadan s $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, $a_0 = 5$, $a_1 = 12$.

Zadatak 6.6. Odredite rekurzivnu relaciju za broj ternarnih nizova duljine n , a_n , koji ne sadrže podniz 012.

Zadatak 6.7. Riješite rekurziju

$$a_n + a_{n-2} = 0; \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 1.$$

Zadatak 6.8. Neka je a_n broj načina na koji možemo ploču $2 \times n$ popločati pločicama dimenzija 1×1 i 1×2 (rotiranje pločica je dozvoljeno). Odredite linearnu rekurzivnu relaciju za niz (a_n) i početne uvjete.

Nehomogene linearne rekurzije s konstantnim koeficijentima

Primjer 6.9. Riješite rekurziju $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 10 \cdot 3^{n-2}$, $a_0 = 3$, $a_1 = 10$.

Primjer 6.10. Riješite rekurziju

$$a_{n+1} - 5a_n = 4n^2 + 2n + 6; \quad a_1 = 1.$$

Primjer 6.11. Riješite rekurziju

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + n \cdot 3^n, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 3.$$

Primjer 6.12. Riješite sustav rekurzija

$$\begin{aligned} a_n &= -2a_{n-1} + 4b_{n-1}, \\ b_n &= -5a_{n-1} + 7b_{n-1}; \end{aligned} \quad a_1 = 4, \quad b_1 = 1.$$

Daljnji zadaci

Zadatak 6.13. Kao na predavanjima, neka je J_n broj popločavanja ploče $1 \times n$ pločicama dimenzija 1×1 i 1×2 . Dokažite tvrdnje koristeći kombinatorne argumente, tj. metodom dvostrukog prebrojavanja.

1. $J_{m+n} = J_m J_n + J_{m-1} J_{n-1}$
2. $3J_n = J_{n+2} + J_{n-2}$
3. $\sum_{i=0}^p \binom{p}{i} J_{n-i} = J_{n+p}$
4. $J_n^2 = J_{2n-1} + J_{n-2}^2$

Zadatak 6.14. Riješite rekurziju

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^n; \quad a_0 = 3, \quad a_1 = 8.$$

7. Sinteza II

Preliminarni zadaci

Za ovaj sat vježbi preporuča se studentima da donesu zadatke s prijašnjih ispita i dosadašnjih vježbi/predavanja s kojima su imali poteškoća. U protivnom se rješavaju odabrani zadaci s prethodnih kolokvija.

Zadatak 7.1. Nađite zatvorenu formulu za niz $d_n = 3d_{n-1} - d_{n-2}$, s uvjetima $d_1 = 3$, $d_2 = 9$.

Zadatak 7.2. Prirodoslovno-matematički fakultet ima 7 odsjeka s po $n \geq 5$ studenata u svakom odsjeku.

- (a) Tim nazivamo *inkluzivnim* ako sadrži članove s barem dvaju odsjeka. Odredite broj četveročlanih inkluzivnih timova.
- (b) Tim nazivamo *superinkluzivnim* ako sadrži članove s barem triju odsjeka. Odredite broj peteročlanih superinkluzivnih timova.

7. Sinteza II

Glavni zadaci

Motivacija za funkcije izvodnice

Primjer 7.3. Na koliko načina možemo „usitniti“ novčanicu od 20 kn ako na raspolaganju imamo kovanice od 1, 2 i 5 kn?

8. Funkcije izvodnice

Ponavljanje i preliminarni zadaci

Ključne riječi: funkcija izvodnica, eksponencijalna funkcija izvodnica, formalni red, suma, produkt, derivacija i integral formalnih redova, geometrijski red, eksponencijalna funkcija.

Zadatak 8.1. Odredite funkciju izvodnicu za $f_k =$ broj k -kombinacija multiskupa $\{a^2, b, c^2, d\}$. Odredite koliko ima 4-kombinacija (f_4).

8. Funkcije izvodnice

Glavni zadaci

Zadatak 8.2. Odredite funkciju izvodnicu za broj kombinacija multiskupa $\{a^{10}, b^7, c^{12}\}$ te odredite koliko ima 15-kombinacija.

Zadatak 8.3. Na koliko se načina 24 jednaka bombona može raspodijeliti među 4 djece tako da svako dijete dobije barem 3, ali ne više od 8 bombona?

Zadatak 8.4. Broj particija $p_1(n)$ broja n u različite sumande jednak je broju particija $p_2(n)$ broja n u neparne sumande. Dokažite!

Primjer 8.5. Neka je $S = \{a_1^{n_1}, a_2^{n_2}, \dots, a_k^{n_k}\}$ multiskup. Odredite eksponencijalnu funkciju izvodnicu za permutacije multiskupa.

Primjer 8.6. Koliko ima riječi duljine 4 sastavljenih od slova B, A, N, A, N i A?

Zadatak 8.7. Koliko ima ternarnih nizova duljine n takvih da imamo paran broj nula, neparan broj jedinica i proizvoljno dvojki?

Zadatak 8.8. *Deranžman* je permutacija bez fiksnih točaka. Odredite eksponencijalnu funkciju izvodnicu za deranžmane!

Daljnji zadaci

Zadatak 8.9. Petero dječaka dijeli n jednakih slatkiša na način da drugi dječak uzme najviše 5 slatkiša, četvrti dječak uzme koliko prvi, drugi i treći zajedno, a peti dječak uzme jedan više od drugog. Napišite funkciju izvodnicu za (a_n) , gdje je a_n broj načina na koji dječaci mogu rasporediti slatkiše. Nadalje, koristeći dobivenu funkciju izvodnicu, izračunajte a_{24} i a_{23} .

9. Formula uključivanja i isključivanja

Ponavljanje i preliminarni zadaci

Zadatak 9.1. Neka je $S = \{1, 2, \dots, 10^6\}$. Koliko je brojeva iz S koji nisu djeljivi ni s dva, ni s tri, niti s četiri?

Zadatak 9.2. Odredite broj deranžmana n -članog skupa.

9. Formula uključivanja i isključivanja

Glavni zadaci

Zadatak 9.3. Koliko brojeva dijeli barem jedan od brojeva 10^{60} , 20^{50} , 30^{40} ?

Zadatak 9.4. Pustinjom putuje karavana od devet deva. Nakon odmora u oazi potrebno je promijeniti redoslijed deva tako da nijedna deva ne hoda iza one deve iza koje je hodala prije dolaska u oazu. Na koliko je načina to moguće napraviti?

Zadatak 9.5. Na početku nove sezone RK Zagreb potpisuje ugovore s pojačanjima. Na potpisivanje je došlo n rukometaša, svaki u pratnji agenta i liječnika. Na koliko načina možemo tu grupu od $3n$ ljudi rasporediti u tročlane grupe sastavljene od jednog rukometaša, jednog agenta i jednog liječnika, ali tako da nijedan rukometaš nije u grupi s oba svoja pratitelja?

Definicija 9.3. *Eulerova funkcija* broja n , $\varphi(n)$, broj je prirodnih brojeva manjih ili jednakih n koji s brojem n nemaju zajedničkih djelitelja (većih od 1).

Zadatak 9.6. Pronađite izraz za Eulerovu funkciju.

Zadatak 9.7. Koliko je najkraćih puteva u cjelobrojnoj rešetki od ishodišta do točke $(7, 5)$ koji ne prolaze segmentima $[(2, 2), (3, 2)]$ i $[(4, 2), (4, 3)]$?

Zadatak 9.8. Koristeći formulu uključivanja i isključivanja odredite koliko ima cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$$

uz uvjete: $x_1, x_4, x_5 \geq 0$; $2 \leq x_3 \leq 7$; $2 \leq x_2 \leq 8$.

10. Osnove teorije grafova i stabla

Ponavljanje i preliminarni zadaci

Ključne riječi: graf, izomorfizam grafova, stupanj vrha, šetnja, put, stablo, povezanost, komponenta povezanosti, razapinjući podgraf, razapinjuće stablo, bipartitan graf.

Zadatak 10.1. Je li moguće da u grupi od sedam osoba svaka osoba ima točno tri poznanika?

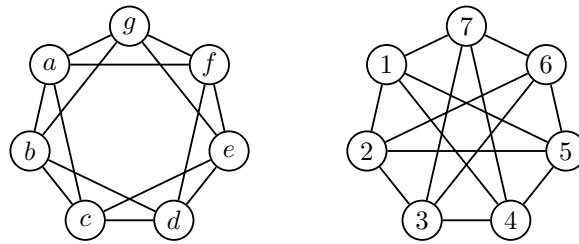
Zadatak 10.2. Ispišite sve klase izomorfizama grafova koji imaju 4 vrha.

Zadatak 10.3. Odredite broj označenih multigrafova koji imaju n vrhova i m bridova.

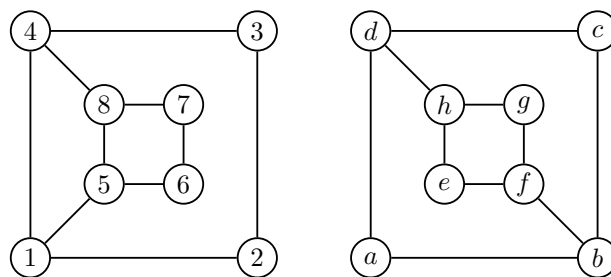
10. Osnove teorije grafova i stabla

Glavni zadaci

Zadatak 10.4. Jesu li sljedeći grafovi izomorfni?



Zadatak 10.5. Odredite jesu li sljedeći grafovi izomorfni.



Zadatak 10.6. Koliko ima međusobno neizomorfnih grafova s 5 vrhova čiji su nizovi stupnjeva (a) $(1, 1, 1, 2, 2)$; (b) $(1, 1, 2, 2, 2)$? Koliko ima takvih povezanih grafova?

Zadatak 10.7. Dokažite da svaki graf s barem dva vrha sadrži dva vrha jednakog stupnja.

Zadatak 10.8. Dokažite da je jednostavan graf s n vrhova i strogo više od $\binom{n-1}{2}$ bridova povezan.

Graf $G = (V, E)$ nazivamo *bipartitnim* ako se skup V može particionirati u dva skupa A, B tako da svaki brid iz E spaja vrh iz A s vrhom iz B . (Drugim riječima, ako vrhove možemo obojiti u dvije boje tako da nijedan brid nije jednobojan.)

Zadatak 10.9. Dokažite da je graf bipartitan ako i samo ako nema neparan ciklus.

Zadatak 10.10. Dokažite da stablo koje ima vrh stupnja d ima barem d listova.

Daljnji zadaci

Zadatak 10.11. Za graf $G = (V, E)$ i vrh $v \in V$, s $G - v$ označavamo podgraf grafa G induciran skupom vrhova $V \setminus \{v\}$. Ako je G povezan graf s barem dva vrha, dokažite da postoje različiti vrhovi x i y iz V takvi da su grafovi $G - x$ i $G - y$ povezani.

Zadatak 10.12. (Ispit 2023.) Koliko ima jednostavnih grafova sa skupom vrhova $\{1, 2, \dots, n\}$ koji nemaju izoliranih vrhova? Koliko najmanje bridova može imati takav graf?

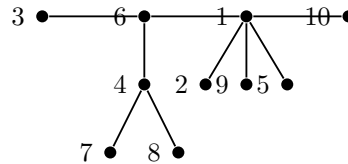
11. Stabla

Ponavljanje i preliminarni zadaci

Ključne riječi: stablo, šuma, list, Prüferov kod, težinski graf, minimalno razapinjuće stablo.

Zadatak 11.1.

- (a) Odredite Prüferov kod za sljedeće označeno stablo T .



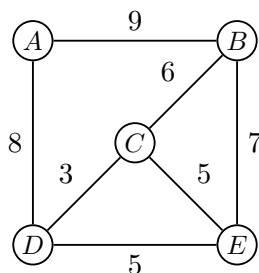
- (b) Koliko ima označenih stabala izomorfnih stablu T ? (Ne morate izračunati konačan broj.)
 (c) Koje označeno stablo ima Prüferov kod $(5, 1, 1, 7, 7, 5)$?

Zadatak 11.2. Odredite broj razapinjućih stabala grafa $K_{2,m}$.

11. Stabla

Glavni zadaci

Zadatak 11.3. Nađite minimalno razapinjuće stablo za težinski graf sa slike.



Zadatak 11.4. Riješite Zadatak 11.3 Primovim algoritmom polazeći od vrha A .

Zadatak 11.5. Neka su $n \geq 2$ te $d_1, \dots, d_n$ cijeli brojevi. Dokažite da postoji stablo s nizom stupnjeva $(d_1, \dots, d_n)$ ako i samo ako je $d_i \geq 1$ za svaki $1 \leq i \leq n$ te $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$.

Zadatak 11.6. Neka je T stablo te neka su $T_1, \dots, T_k$ podstabla od T . Pretpostavimo da svaka dva podstabla T_i, T_j imaju zajednički vrh. Dokažite da postoji vrh koji je zajednički svim podstablama $T_1, \dots, T_k$.

Napomena. Podstablo je podgraf koji je sam po sebi stablo.

Zadatak 11.7. (2. kolokvij 2022.) Zadan je graf $G = (V, E)$ sa skupom vrhova $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Za svake $a, b \in V$, $a \neq b$, vrhovi a i b spojeni su bridom težine

$$\omega(\{a, b\}) = ((ab + 4) \pmod{6}) + 1,$$

gdje je $s \pmod{6}$ označen ostatak pri dijeljenju broja r sa 6. Kruskalovim algoritmom odredite te skicirajte jedno razapinjuće stablo od G minimalne težine. Koliko ima takvih stabala? Ako postoji minimalno razapinjuće stablo u kojem je vrh 1 stupnja 3, odredite Prüferov kod tog stabla.

12. Planarni grafovi

Ponavljanje i preliminarni zadaci

Ključne riječi: ulaganje, planarnost, Eulerova formula, subdivizija.

Zadatak 12.1. Dokažite da jednostavan, povezan, planaran graf s n vrhova ima najviše $3n - 6$ bridova.

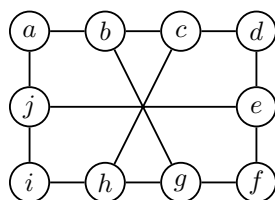
Zadatak 12.2. Dokažite da jednostavan, povezan, planaran i bipartitan graf s n vrhova ima najviše $2n - 4$ bridova.

Primjer 12.3. Nađite subdiviziju od $K_{3,3}$ u Petersenovom grafu.

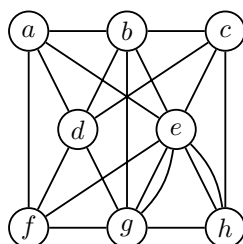
12. Planarni grafovi

Glavni zadaci

Zadatak 12.4. Odredite je li graf na slici planaran.



Zadatak 12.5. Odredite je li graf na slici planaran.



Zadatak 12.6. (2. kolokvij 2015.) Neka je G graf dobiven iz potpunog grafa K_6 brisanjem dva brida. Dokažite da G nije planaran. Nadalje, što možete reći u slučaju da smo obrisali tri brida; je li takav graf uvijek planaran, uvijek neplanaran ili nijedno od toga?

Definicija 12.3. Tijelo nazivamo *Arhimedovim* ako je svaki vrh istog stupnja i istog tipa (tj. tijelo je jednako iz perspektive svih vrhova) te ako su strane tijela dvije vrste pravilnih mnogokuta (stupanj vrha je broj bridova koji iz njega izlaze).

Zadatak 12.7. Odredite sva Arhimedova tijela čije su strane pravilni peterokuti i šesterokuti.

Daljnji zadaci

Zadatak 12.8. (2. kolokvij 2017.) Dokažite da svaki planaran graf ima barem jedan vrh kojemu je stupanj najviše 5.

Zadatak 12.9. (2. kolokvij 2018.) Koliko najviše bridova možemo dodati stablu s n vrhova tako da novi graf i dalje ostane jednostavan planaran graf?

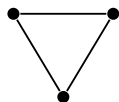
13. Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

Ponavljanje i preliminarni zadaci

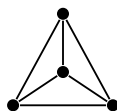
Ključne riječi: Eulerova šetnja, Eulerova tura, Hamiltonov ciklus.

U sljedećim zadacima provjerite postojе li: (1) Eulerova tura, (2) Eulerova šetnja, (3) Hamiltonov ciklus.

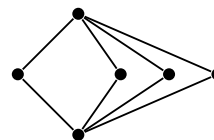
Zadatak 13.1.



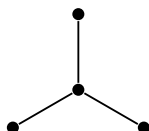
Zadatak 13.2.



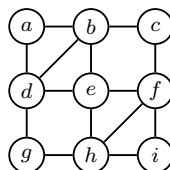
Zadatak 13.3.



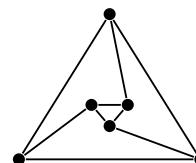
Zadatak 13.4.



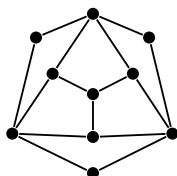
Zadatak 13.5.



Zadatak 13.6.



Zadatak 13.7.



13. Eulerovi i Hamiltonovi grafovi

Glavni zadaci

Zadatak 13.8. Dokažite da je graf s n vrhova i barem $\binom{n-1}{2} + 2$ brida Hamiltonov.

Zadatak 13.9. Miš gricka put kroz $3 \times 3 \times 3$ kocku sira grickajući svih 27 kockica $1 \times 1 \times 1$. Ako miš počne grickati u kutu i uvijek se pomiče za po jednu susjednu kockicu, može li na kraju doći u sredinu? (Susjedne su kockice one koje dijele jednu stranu.)

Zadatak 13.10. Na teniskom turniru sudjeluje n igrača. Svaka dva igrača međusobno igraju točno jedan meč, u kojemu jedan od njih pobjeđuje (u tenisu nema neriješenih ishoda). Dokažite da je moguće poredati svih n igrača u niz tako da je svaki igrač osim zadnjeg pobijedio onoga koji se nalazi neposredno nakon njega u nizu.

Zadatak 13.11. U jednom gradu postoji nekoliko trgova i ulica, pri čemu svaka ulica izravno povezuje neka dva trga. Dosad se svakom ulicom promet odvijao u oba smjera, no gradonačelnik je odlučio tome stati na kraj tako što će svaku ulicu proglasiti jednosmjernom (time će se promet njome moći odvijati samo u jednom od dva moguća smjera). Dokažite da on to može napraviti tako da se, za svaki trg, broj ulica kojima je moguće ući na taj trg i broj onih kojima je moguće izaći s njega razlikuju za najviše 1.

Zadatak 13.12. Dokažite da se za svaki neparan $n \geq 3$ bridovi potpunog grafa K_n mogu prekriti s $\frac{n-1}{2}$ Hamiltonovih ciklusa bez zajedničkih bridova.

Zadatak 13.13. (2. kolokvij 2021.)

- (a) Neka je G povezan graf s n vrhova. Koji je najmanji $k \in \mathbb{N}$ takav da dodavanjem k bridova u G uvijek možemo dobiti Eulerov graf (koji može biti i multigraf)? Nađite primjer grafa G kojemu je potrebno dodati točno k bridova.
- (b) Graf $G = (V, E)$ je Hamiltonov graf i $|V| \geq 4$. Uklonimo li brid $e \in E$, dobivamo graf $G - e$. Dokažite da dodavanjem najviše dvaju novih bridova $f, h \notin E$ grafu $G - e$ možemo dobiti Hamiltonov graf (možemo dodati 0, 1 ili 2 nova brida). Navedite primjer Hamiltonova grafa G kojemu je nužno potrebno dodati barem dva nova brida grafu $G - e$ da bismo dobili Hamiltonov graf.

Daljnji zadaci

Zadatak 13.14. (2. kolokvij 2017.) Koliko najmanje bridova mora imati jednostavan graf sa 7 vrhova tako da sigurno možemo zaključiti da je Hamiltonov?