Sveučilište u Zagrebu

PMF - Matematički odjel

Marko Doko

Kardinalna aritmetika

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Mladen Vuković

Zagreb, listopad 2006.

teti Vesni

i

barba Ivi

Sadržaj

Uvod

Originalna motivacija za ovaj rad bila je moja želja da pišem o nedostiživim kardinalima, no kako je to područje isuviše napredno u odnosu na preddiplomski kolegij *Teorija skupova* na PMF-Matematičkom odjelu trebalo bi, kao uvod u temu, izložiti čitav sadržaj ovog rada. Stoga je ovaj diplomski rad koncipiran kao izlaganje osnovnih rezultata kardinalne aritmetike uz navođenje nekih složenijih rezultata bez dokaza i kao takav može poslužiti kao uvod u moderne teorije koje se bave kardinalnom aritmetikom.

U poglavlju 1 dat ćemo pregled oznaka, definicija i teorema koje ćemo koristiti kroz rad, ali kako se većina korištenih pojmova i rezultata pojavljuje u preddiplomskom kolegiju iz teorije skupova nećemo razvijati kompletnu teoriju nego samo navesti ključne rezultate. Od čitatelja se očekuje poznavanje Zermelo-Fraenkelove aksiomatike (ZF), aksioma izbora i njegovih ekvivalenata, te osnovnih činjenica o ordinalnim i kardinalnim brojevima.

U 2. poglavlju ćemo definirati beskonačne sume i produkte kardinalnih brojeva, te ćemo uz pomoć pojma kofinalnosti dati vezu kardinalnog eksponenciranja i beskonačnih suma i produkata. U poglavlju 3 ćemo prezentirati dva vrlo značajna teorema – Jechov i Bukovky-Hechlerov teorem, te ćemo se pozabaviti pitanjem kakve rezultate možemo dobiti ako aksiomima ZFC pridodamo još neke pretpostavke poput generalizirane hipoteze kontinuuma.

Na kraju ovog uvoda želio bih se zahvaliti mentoru, prof. Mladenu Vukoviću na velikoj pomoći pri odabiru teme i na strpljenju za vrijeme izrade ovog rada.

1

Uvodne oznake i teoremi

Ovdje ćemo napraviti kratki sažetak u kojem ćemo se podsjetiti na neke rezultate i uvesti oznake koje ćemo koristiti u daljnjem izlaganju. Nećemo do u detalje navoditi sve definicije i teoreme, nego samo one u kojima uvodimo neke nestandardne ili rijeđe korištene oznake, te one na koje ćemo se direktno pozivati u kasnijim poglavljima. Ukoliko je čitatelj zainteresiran za dokaz neke od tvrdnji iz ovog poglavlja može ga naći u [2] ili [3].

Napomenimo da je aksiomatski sustav u kojem radimo ZFC, budući da veliki broj rezultata u kardinalnoj aritmetici ovisi o aksiomu izbora. Radi jednostavnosti izlaganja promatrati ćemo neke objekte koji naizgled ne spadaju u ZFC (kao što su funkcije na pravim klasama), te ćemo kvantificirati po klasama ordinalnih i kardinalnih brojeva. Da je sve to izvedivo u ZFC čitatelj se može uvjeriti u literaturi [2].

1.1 Relacije i funkcije

U ovom odjeljku ćemo navesti dafiniciju funkcije kao specijalne vrste relacije, te ćemo uvesti neke (barem u ostalim područjima matematike) rijeđe korištene oznake.

Definicija 1.1. Neka je $R \subseteq A \times B$ binarna relacija. Definiramo:

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} R &= \{x \mid x \in A \wedge (\exists y \in B)(xRy)\} \text{ (domena relacije)}, \\ \operatorname{ran} R &= \{y \mid y \in B \wedge (\exists x \in A)(xRy)\} \text{ (slika relacije)}. \end{aligned}$$

Definicija 1.2. Relaciju $f \subseteq A \times B$ za koju vrijedi

$$(\operatorname{dom} f = A) \wedge (\forall x \in A)(\forall y \in B)(\forall y' \in B)((x,y) \in f \wedge (x,y') \in f \to y = y')$$

kažemo da je funkcija sa A u B. Pišemo $f\colon A \to B$.

Neka je $x \in A$. Tada $y \in B$ takav da je $(x,y) \in f$, označavamo $f(x)$. Skup svih funkcija sa A u B označavamo sa ${}^{B}A$.

Napomena 1.3. Iako je uobičajeno da se slika funkcije f označava $\operatorname{Im} f$, ovdje to nećemo činiti, nego ćemo za označavanje slike funkcije f također koristiti $\operatorname{ran} f$. Razlog tome je što se slika funkcije f definira kao slika relacije f, pa nema potrebe da se uvodi nova oznaka.

Definicija 1.4. Neka je $f\colon A \to B$, te neka je $a \subseteq A$. Slika skupa a po funkciji f je

$$f[a] = \{y \mid (\exists x \in a)(y = f(x)\} .$$

Za označavanje slike skupa koristimo uglate zagrade kako bi smo izbjegli konfuziju oko toga mislimo li na vrijednost funkcije ili sliku skupa.

Definicija 1.5. Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ parcijalno uređeni skupovi. Kažemo da funkcija $f\colon A \to B$ *čuva uređaj* ako je, za sve $x\ y \in A$, $f(x) \prec f(y)$ ako i samo ako je $x < y$. Bijekciju koja čuva uređaj nazivamo *sličnost* ili *uređajni izomorfizam.* Ako između A i B postoji uređajni izomorfizam, onda kažemo da su A i B *slični* ili *uređajno izomorfni*, što označavamo sa $A \simeq B$.

1.2 Ordinalni brojevi

Sada ćemo se prisjetiti definicije ordinalnih brojeva, ordinalne aritmetike, principa transfinitne indukcije i transfinitne rekurzije. Također ćemo navesti definicije operacija nad ordinalima, te ćemo vidjeti kako izgleda Cantorova normalna forma preko koje se definira tzv. prirodno zbrajanje.

Definicija 1.6. Za skup A kažemo da je *tranzitivan* ako vrijedi

$$\forall x \forall y (y \in x \land x \in A \to y \in A) .$$

Definicija 1.7. Skup α nazivamo *ordinalni broj* ili *ordinal* ako je tranzitivan i linearno uređen s obzirom na relaciju $\in$. Klasu ordinalnih brojeva označavamo sa **On**. Ordinalne brojeve označavamo malim slovima grčkog alfabeta (α, β, γ, ...).

Definicija 1.8. Neka je α ordinal. Ordinal $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ nazivamo sljedbenik od α. Ako postoji ordinal čiji je α sljedbenik, onda za α kažemo da je *ordinal sljedbenik.* Ako ordinal $\alpha \neq 0$ nije sljedbenik, onda ga zovemo *granični ordinal.* Klasu graničnih ordinala označavamo sa **Lim**.

Definicija 1.9. Kažemo da je ordinal α manji od ordinala β ($\alpha < \beta$), ako je $\alpha \in \beta$. (Relacija $\in$ je totalni uređaj) na klasi **On**.)

Za ordinalne brojeve α i β, $\alpha < \beta$ definiramo interval ordinalnih bojeva

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbf{On}} := \{\gamma \mid \gamma \in \mathbf{On} \land \alpha < \gamma < \beta\} .$$

Analogno definiramo $\langle \alpha, \beta]_{\mathbf{On}}$, $[\alpha, \beta\rangle_{\mathbf{On}}$ i $[\alpha, \beta]_{\mathbf{On}}$.

Teorem 1.10 (Princip transfinitne indukcije za On). *Neka je φ formula u* ZF. *Tada*

$$\mathsf{ZF} \vdash (\forall \alpha (((\forall \beta \in \alpha)\varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha))) \to \forall \alpha\ \varphi(\alpha) .$$

Teorem 1.11 (Princip transfinitne rekurzije za On).

(*a*) *Neka je $G\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. Tada postoji funkcija $F\colon \mathbf{On} \to V$ takva da vrijedi*

$$\forall \sigma (F(\sigma) = G(F \restriction \sigma)) .$$

(*b*) *Neka je a klasa,* $H_1 \colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *i* $H_2 \colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$*. Tada postoji funkcija* $F \colon \mathbf{On} \to \mathbf{V}$ *takva da vrijedi*

$$F(0) = a \wedge \forall \sigma (F(\sigma + 1) = H_1(\sigma) \wedge (\forall \sigma \in \mathbf{Lim})(F(\sigma) = H_2(F \restriction \sigma)) .$$

Napomena 1.12. U prethodnom teoremu $\mathbf{V}$ označava kumulativnu hijerarhiju.

Teorem 1.13 (Teorem enumeracije). *Neka je* $(A, <)$ *dobro uređen skup. Tada postoji jedinstven ordinalni broj* α *i jedinstveni uređajni izomorfizam* $f \colon \alpha \to A$*.*

Definicija 1.14. Neka je A ordinal ili klasa $\mathbf{On}$. Funkciju $F \colon A \to \mathbf{V}$ nazivamo niz. Pojmove kao što su gornja međa, infimum i supremum niza definiramo kao gornju među, infimum i supremum slike niza.

Kažemo da je F *neprekidna* funkcija (niz) ako za svaki granični ordinal $\gamma \in A$ vrijedi

$$F(\gamma) = \bigcup \{ F(\sigma) \mid \sigma < \gamma \} .$$

Ako funkcija (niz) za kodomenu ima ordinal ili klasu $\mathbf{On}$, te je neprekidna i strogo rastuća, tada kažemo da je *normalna*.

Definicija 1.15 (Operacije na ordinalima). Neka je α ordinal. Transfinitnom rekurzijom po β definiramo:

(a) (*ordinalna suma*)

$$\begin{cases} \alpha + 0 = \alpha \\ \alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1 \\ \alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma \mid \gamma < \beta\} \,, \text{ za } \beta \in \mathbf{Lim} \end{cases}$$

(b) (*ordinalni produkt*)

$$\begin{cases} \alpha \cdot 0 = 0 \\ \alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha \\ \alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \gamma \mid \gamma < \beta\} \,, \text{ za } \beta \in \mathbf{Lim} \end{cases}$$

(c) (*ordinalno eksponenciranje*)

$$\begin{cases} \alpha^0 = 1 \\ \alpha^{\beta + 1} = \alpha^\beta \cdot \alpha \\ \alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma \mid \gamma < \beta\} \,, \text{ za } \beta \in \mathbf{Lim} \end{cases}$$

Napomena 1.16. Transfinitnom indukcijom se lako pokazuje da vrijedi

(a) Funkcija $\beta \mapsto \alpha + \beta$ je neprekidna za svaki ordinal α.

(b) Funkcija $\beta \mapsto \alpha \cdot \beta$ je neprekidna za svaki ordinal $\alpha \neq 0$.

(c) Funkcija $\beta \mapsto \alpha^\beta$ je neprekidna za svaki ordinal $\alpha > 1$.

Teorem 1.17 (Cantorova normalna forma za bazu β). *Neka su $\alpha > 0$ i $\beta > 1$ ordinali. Tada postoje jedinstveni ordinali $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ i $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n$ takvi da vrijedi*

$$\alpha = \beta^{\sigma_0} \cdot \tau_0 + \cdots + \beta^{\sigma_n} \cdot \tau_n\,,\ \sigma_0 > \sigma_1 > \ldots > \sigma_n \text{ i } 1 \leqslant \tau_i < \beta \text{ za sve } i \leqslant n\,.$$

Specijalno (za $\beta = \omega$) postoje jedinstveni ordinali $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ za koje je

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} + \cdots \omega^{\alpha_n} \text{ i } \alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n\,.$$

Prikaz ordinala $\alpha > 0$ iz teorema 1.17 nazivamo *Cantorova normalna forma od α za bazu β*. Za Cantorovu normalnu formu od 0 uzimamo $\beta^0 \cdot 0$.

Zbrajanje ordinala proširuje standardno zbrajanje na ω, ali ne zadovoljava njegova osnovna svojstva kada se promatra na beskonačnim ordinalima. Koristeći prethodni teoram možemo definirati operaciju koja će proširivati standardno zbrajanje i očuvati osnovne zakonitosti aritmetike (komutativnost i asocijativnost) na konačnim ordinalima.

Neka su α i β prikazani u Cantorovoj normalnoj formi za bazu ω. Ako potencije ω^α koje se pojavljuju u samo jednoj reprezentaciji pridodamo drugoj kao sumand $\omega^\alpha \cdot 0$, tada bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi $\alpha = \sum_{i<k} \omega^{\sigma_i} \cdot n_i$ i $\beta = \sum_{i<k} \omega^{\sigma_i} \cdot m_i$, gdje su $\sigma_0 > \sigma_1 > \ldots > \sigma_n$ i $n_i\,,\ m_i \in \omega$. Definiramo *prirodnu sumu* ordinala α i β kao

$$\alpha \# \beta := \sum_{i<k} \omega^{\sigma_i} \cdot (m_i + n_i)\,.$$

Da se prirodna suma razlikuje od standardnog zbrajanja ordinala vidimo npr. za $\alpha = \omega$ i $\beta = \omega^2 + \omega$. Tada je $\alpha + \beta = \omega^2 + \omega$, dok je $\alpha \# \beta = \omega^2 + \omega \cdot 2$.

Za ordinal β kažemo da je *glavni broj za zbrajanje* ako je $\beta > 0$ i za svaki $\alpha < \beta$ vrijedi $\alpha + \beta = \beta$. Kažemo da za ordinal γ postoji *aditivni rastav* ako postoje ordinali $\alpha < \gamma$ i $\beta < \gamma$ takvi da je $\alpha + \beta = \gamma$.

Napomena 1.18. Za svaki ordinal γ jednadžba $\alpha \# \beta = \gamma$ ima konačno mnogo rješenja (α, β).

Lema 1.19.

(*a*) *Ordinal $\beta > 0$ je glavni broj za zbrajanje ako i samo ako za β ne postoji aditivni rastav.*

(*b*) *β je glavni broj za zbrajanje ako i samo ako je $\beta = \omega^\alpha$ za neki $\alpha \in$* **On**.

(*c*) *Funkcija $\alpha \mapsto \omega^\alpha$ je jedinstveni uređajni izomorfizam s klase* **On** *na klasu glavnih brojeva za zbrajanje.*

1.3 Kardinalni brojevi

Navedimo sada definicije objekata koji su od temeljnog interesa u ovom radu – kardinalnih brojeva i operacija nad njima.

Definicija 1.20. Ordinalni broj κ za koji vrijedi $(\forall \alpha \in \kappa)(\alpha \not\sim \kappa)$ nazivamo *kardinalni broj* ili *kardinal*. Klasu kardinalnih brojeva označavamo sa $\mathbf{Cn}$. Klasu beskonačnih kardinalnih brojeva označavamo $\mathbf{ICn}$. Za kardinalne brojeve κ i μ, $\kappa < \mu$ definiramo interval kardinalnih bojeva $\langle \kappa, \nu \rangle_{\mathbf{Cn}} := \langle \kappa, \nu \rangle_{\mathbf{On}} \cap \mathbf{Cn}$.

Napomena 1.21. Neka je x skup. Po Zermelovom teoremu dobrog uređaja x se može dobro urediti, pa preko teorema enumeracije dobivamo da postoji ordinal α koji je ekvipotentan s x. To znači da je skup $S = \{\alpha \mid \alpha \sim x\}$ neprazan. Pošto je svaki skup ordinala dobro uređen, tada skup S sadrži najmanji element λ. Očito je λ kardinalni broj i označavamo ga sa $\operatorname{card} x$.

Definicija 1.22. Neka je κ kardinal. Sa κ^+ označavamo najmanji kardinal veći od κ i nazivamo ga *kardinalni sljedbenik* ili samo *sljedbenik* od κ. Svaki beskonačni kardinal oblika κ^+ nazivamo *kardinal sljedbenik*. Ako je kardinal neprebrojiv i nije sljedbenik, onda ga nazivamo *granični kardinal*.

Definicija 1.23. Definiramo *alef funkciju* $\aleph \colon \mathbf{On} \to \mathbf{ICn}$ sa

$$\begin{cases} \aleph_0 = \omega \\ \aleph_{\alpha+1} = {\aleph_\alpha}^+ \\ \aleph_\gamma = \sup\{\aleph_\beta \mid \beta < \gamma\}\,, \text{ za } \gamma \in \mathbf{Lim}\,. \end{cases}$$

Propozicija 1.24.

(*a*) *Neka je κ beskonačan kardinal. Tada postoji ordinal α takav da je $\kappa = \aleph_\alpha$.*

(*b*) *Neka je $\alpha < \beta$. Tada je $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.*

(*c*) *Alef funkcija je normalna.*

Definicija 1.25 (Operacije na kardinalnim brojevima). Neka su κ i λ kardinalni brojevi. Definiramo:

$$\begin{aligned} \kappa + \lambda &:= \operatorname{card}(\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}) \quad (\textit{kardinalno zbrajanje}), \\ \kappa \cdot \lambda &:= \operatorname{card}(\kappa \times \lambda) \quad (\textit{kardinalno množenje}), \\ \kappa^\lambda &:= \operatorname{card}({}^\lambda\kappa) \quad (\textit{kardinalno eksponenciranje}). \end{aligned}$$

Napomena 1.26. Ako želimo istaknuti da neki beskonačni kardinal promatramo kao ordinal, onda ćemo umjesto $\aleph_\alpha$ pisati ω_α. Tako će nam npr. $\aleph_\alpha + \aleph_\beta$ označavati zbrajanje kardinala, dok će nam $\omega_\alpha + \omega_\beta$ označavati ordinalno zbrajanje.

Propozicija 1.27. *Neka su κ i λ kardinalni brojevi različiti od 0, od kojih je barem jedan beskonačan. Tada je*

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}\,.$$

Definicija 1.28. Neka je a skup i λ kadrinal. Sa

$$[a]^\lambda := \{x \subseteq a \mid \operatorname{card} x = \lambda\}$$

označavamo skup svih podskupova od a kardinaliteta λ.

Očito u slučaju $\lambda > \operatorname{card} a$ vrijedi $[a]^\lambda = \emptyset$. Također je trivijalan i slučaj $\operatorname{card} a < \aleph_0$.

Pogledajmo sada što se događa u slučaju kada je $\kappa = \operatorname{card} a \geqslant \aleph_0$ i $\lambda \leqslant \kappa$. Očito je $[a]^\lambda \sim [\kappa]^\lambda$. Neka je $x \subseteq \kappa$ za koji je $\operatorname{card} x = \lambda$. Sa $\overline{x}$ označimo skup svih bijekcija sa λ na x. Neka je X neki izborni skup familije $\{\overline{x} \mid x \subseteq \kappa \text{ i } \operatorname{card} x = \lambda\}$. Sa f_x označimo bijekciju sa λ na x koja se nalazi u X. Uočimo da je sa $x \mapsto f_x$ definirana injekcija sa $[\kappa]^\lambda$ u ${}^\lambda\kappa$, pa imamo $\operatorname{card}[\kappa]^\lambda \leqslant \kappa^\lambda$.

S druge strane, za svaki $f \in {}^\lambda\kappa$ vrijedi $f \subseteq \lambda \times \kappa$ i $\operatorname{card} f = \lambda$, iz čega vidimo da je $\kappa^\lambda \leqslant \operatorname{card}[\lambda \times \kappa]^\lambda$. Kako je $\kappa \geqslant \lambda$ imamo $\operatorname{card}(\lambda \times \kappa) = \kappa$, pa vidimo da je $[\lambda \times \kappa]^\lambda \sim [\kappa]^\lambda$. Ovim smo dokazali da vrijedi i $\kappa^\lambda \leqslant \operatorname{card}[\kappa]^\lambda$.

Prema tome, ako je a beskonačan skup i $\lambda \leqslant \operatorname{card} a$, onda vrijedi $\operatorname{card}[a]^\lambda = (\operatorname{card} a)^\lambda$.

1.4 Hipoteza kontinuuma

Prije nego što krenemo na ozbiljno proučavanje kardinalne aritmetike osvrnimo se još na čuvenu hipotezu kontinuuma i njenu generalizciju o kojoj će biti govora u 3. poglavlju.

Cantor je postavio hipotezu da ne postoji beskonačan skup $S \subseteq \mathbb{R}$ koji nije ekvipotentan sa $\mathbb{N}$ niti sa $\mathbb{R}$. Ova tvrdnja je poznata kao *hipoteza kontinuuma*, a u terminima alef funkcije može se izraziti sa

(CH) $$2^{\aleph_0} = \aleph_1\,.$$

Generalizacija ove tvrdnje, poznata kao *generalizirana hipoteza kontinuuma* glasi

(GCH) $$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}\,.$$

Gödel je dokazao da ako je ZF konzistentna, onda u ZFC ne možemo dokazati negaciju generalizirane hipoteze kontinuuma tj. $\mathsf{ZFC} \nvdash \neg(\mathrm{GCH})$. Cohen je 1963. dokazao da ni generalizirana hipoteza kontinuuma nije dokaziva u ZFC, odnosno $\mathsf{ZFC} \nvdash (\mathrm{GCH})$. Dakle, (GCH) je nezavisna s aksiomima ZFC.

2

Kofinalnost i eksponenciranje kardinala

U ovom poglavlju bavit ćemo se prvenstveno beskonačnim sumama i produktima, te eksponenciranjem kardinala. Dati ćemo pregled svojstava koja se mogu dokazati koristeći sistem aksioma ZFC, a da bi to mogli učiniti na zadovoljavajući način bit će nam potreban pojam kofinalnosti, kojem posvećujemo prvi odjeljak. Obzirom na njihovu kofinalnost razlikovati ćemo singularne i regularne kardinale. Također ćemo, u onoj mjeri u kojoj nam to dopušta ZFC, opisati ponašanje funkcije kontinuuma u regularnim kardinalima.

Ograničenja na vrijednosti funkcije kontinuuma u regularnim kardinalima koja ćemo ovdje dokazati ujedno su jedina dokaziva u ZFC, no tu tvrdnju nećemo dokazivati jer bi nas to odvelo daleko izvan opsega ovog rada.

2.1 Kofinalnost

Pojam kofinalnosti igra važnu ulogu u opisivanju svojstava kardinalnog eksponenciranja. U ovom odjeljku ćemo definirati kofinalnost, te dokazati osnovna svojstva.

Definicija 2.1. Neka je R binarna relacija na A i $\operatorname{dom}(R) = A$. Za $B \subseteq A$ kažemo da je *neograničen* ili *kofinalan* u A s obzirom na R ako za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ takav da vrijedi aRb. Definiramo *kofinalnost* od (A, R) sa:

$$\operatorname{cf}(A, R) := \min \{\operatorname{card} C \mid C \subseteq A \text{ i } C \text{ kofinalan u } A \text{ s obzirom na } R\} .$$

Primjer 2.2.

- Na praznom skupu postoji samo jedna relacija i vrijedi $\operatorname{cf}(\emptyset, \emptyset) = 0$.
- Kofinalnost svakog nepraznog skupa s obzirom na totalnu relaciju je očito jednaka jedan, odnosno ako ja A neprazan vrijedi $\operatorname{cf}(A, A \times A) = 1$.
- Neka je $id_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$. Tada je $\operatorname{cf}(A, id_A) = \operatorname{card} A$.
- $\operatorname{cf}(\mathbb{R}, \leqslant) = \aleph_0$.

Definirali smo $\mathrm{cf}(A, R)$ kao najmanji kardinalni broj podskupa od A koji je kofinalan u A s obzirom na R. Kako je $\mathrm{dom}(R) = A$, tada je skup A kofinalan u A, što znači da je skup čiji minimum se u definiciji traži neprazan. Također, kako se radi o skupu kardinalnih brojeva zaključujemo da taj skup ima minimum. Dakle, traženi minimum uvijek postoji, odnosno pojam kofinalnosti je dobro definiran.

Definicija 2.3. Neka je α ordinal. *Kofinalnost* od α, u oznaci $\mathrm{cf}(\alpha)$, definiramo kao najmanji ordinal μ sa svojstvom da postoji funkcija $f\colon \mu \to \alpha$ takva da je $\mathrm{ran}(f)$ kofinalno u α s obzirom na relaciju $\leqslant$ na ordinalima.

Očito je $\mathrm{cf}(\alpha) \leqslant \alpha$. Nadalje, $\mathrm{cf}(\alpha) \leqslant \mathrm{cf}(\alpha, \leqslant)$, jer za kofinalni podskup C od α, za koji je $\mathrm{cf}(\alpha, \leqslant) = \mathrm{card}\, C$, postoji bijekcija sa C na $\mathrm{card}\, C$. Slika te bijekcije je očito kofinalna u A. (Iz lema 2.6 i 2.7 slijedit će $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha, \leqslant)$).

Propozicija 2.4. *Za svaki ordinal α, $\mathrm{cf}(\alpha)$ je kardinal.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\mathrm{cf}(\alpha)$ nije kardinal. Tada je $\mathrm{card}\,\mathrm{cf}(\alpha) < \mathrm{cf}(\alpha)$. Neka je $f\colon \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ takva da je $\mathrm{ran}(f)$ kofinalno u α, te neka je $g\colon \mathrm{card}\,\mathrm{cf}(\alpha) \to \mathrm{cf}(\alpha)$ bijekcija. Očito je $\mathrm{ran}(f \circ g) = \mathrm{ran}(f)$, pa je i slika funkcije $f \circ g\colon \mathrm{card}\,\mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ kofinalna u α. Time je smo dobili funkciju s ordinala manjeg od $\mathrm{cf}(\alpha)$ čija je slika kofinalna u α, što je u suprotnosti s definicijom kofinalnosti. □

Definicija 2.5. Kažemo da je granični ordinal α *regularan* ako vrijedi $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$. U suprotnom kažemo da je α *singularan.*

Primjeri će biti dani kada u lemi 2.7 dokažemo neka jednostavna svojstva.

Kako znamo da je $\mathrm{cf}(\alpha)$ kardinal, vidimo da je svaki regularni ordinal kardinal. Za klasu regularnih kardinalnih brojeva uvodimo oznaku **Reg**, te interval regularnih kardinala, tj. $\langle \kappa, \mu \rangle_{\mathbf{Cn}} \cap \mathbf{Reg}$, označavamo sa $\langle \kappa, \mu \rangle_{\mathbf{Reg}}$.

Lema 2.6. *Neka je α ordinal. Tada vrijedi:*

(*a*) $\mathrm{cf}(0) = 0$ *i* $\mathrm{cf}(\alpha + 1) = 1$.

(*b*) *Ako je α granični, onda postoji normalna funkcija $h\colon \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ čija slika je kofinalna u α.*

Posljednji uvjet je ekvivalentan sa $\sup(\mathrm{ran}(h)) = \alpha$ *i s* $\bigcup \mathrm{ran}(h) = \alpha$.

Dokaz. Slika prazne funkcije je kofinalna u 0, a slika funkcije $\{(0, \alpha)\}$ je kofinalna u $\alpha + 1$. Ovim je (a) dokazano.

Sada dokazujemo tvrdnju (b). Neka je $\alpha \in \mathbf{Lim}$, $\gamma \in \mathbf{On}$ i $f : \gamma \to \alpha$ funkcija. Iz definicije graničnog ordinala imamo:

$$\mathrm{ran}(f) \text{ kofinalno u } \alpha \iff \sup(\mathrm{ran}(f)) = \alpha \iff \bigcup \mathrm{ran}(f) = \alpha\,.$$

Ako je $f\colon \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ funkcija za koju je $\sup(\mathrm{ran}(f)) = \alpha$, tada transfinitnom rekurzijom definiramo funkciju $g\colon \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ sa

$$\begin{cases} g(0) = f(0) \\ g(\beta) = \max\{f(\beta), \sup\{g(\sigma) + 1 \mid \sigma < \beta\}\}\ , \text{ za } \beta > 0\,. \end{cases}$$

Uočimo da je ordinal $\sup\{g(\sigma)+1 \mid \sigma < \beta\}\}$ manji od α za svaki $\beta < \mathrm{cf}(\alpha)$. U suprotnom bi za neki $\beta < \mathrm{cf}(\alpha)$ slika funkcije $\sigma \mapsto g(\sigma)+1$ bila kofinalna u α, što je u kontradikciji s definicijom od $\mathrm{cf}(\alpha)$. Funkcija g je strogo rastuća, a nama treba još i neprekidnost, stoga (transfinitnom rekurzijim) definiramo funkciju $h\colon \alpha \to \mathrm{cf}(\alpha)$ sa

$$\begin{cases} h(0) = g(0) \\ h(\gamma) = \sup\{h(\beta) \mid \beta < \gamma\}\,, & \text{za granični } \gamma < \alpha \\ h(\beta+1) = g(\beta+1) \end{cases}$$

Ovako definirana funkcija h očito je neprekidna.

Transfinitnom indukcijom dokažimo da vrijedi $h(\beta) \leqslant g(\beta)$ za sve $\beta < \mathrm{cf}(\alpha)$. Iz definicije funkcije h, očito je $h(\beta) = g(\beta)$ za $\beta = 0$ ili $\beta = \gamma+1$. Pretpostavimo sada da je $\beta \in \mathbf{Lim}$ i da za sve $\gamma < \beta$ vrijedi $h(\gamma) \leqslant g(\gamma)$. Tada imamao

$$\begin{aligned} h(\beta) &= \sup\{h(\sigma) \mid \sigma < \beta\} \leqslant \text{ (pretp. ind.)} \\ &\leqslant \sup\{g(\sigma) \mid \sigma < \beta\} \leqslant \\ &\leqslant \max\{f(\beta), sup\{g(\sigma)+1 \mid \sigma < \beta\}\} = g(\beta)\,. \end{aligned}$$

Iz upravo dokazane relacije slijedi

$$h(\beta+1) = g(\beta+1) > g(\beta) \geqslant h(\beta)\,,$$

iz čega je vidljivo da je h strogo rastuća. □

Lema 2.7.

(a) *Neka je α granični ordinal. Tada je $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$, odnosno $\mathrm{cf}(\alpha)$ je regularan kardinal. Štoviše, vrijedi $\mathrm{cf}(\alpha, \in) = \mathrm{cf}(\alpha)$.*

(b) *$\aleph_0$ je regularan. Svaki beskonačni kardinal sljedbenik κ^+ je regularan.*

(c) *Ako je α granični ordinal, onda je $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$.*

(d) *$\aleph_\omega$ je najmanji singularan kardinal.*

(e) *Klasa singularnih kardinala je prava klasa.*

Dokaz.

(a) Promotrimo strogo rastuće funkcije $f\colon \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) \to \mathrm{cf}(\alpha)$ i $g\colon \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ takve da vrijedi $\sup(\mathrm{ran}(g)) = \alpha$ i $\sup(\mathrm{ran}(f)) = \mathrm{cf}(\alpha)$. Takve funkcije postoje po lemi 2.6 (b). Tada je i $g \circ f$ strogo rastuća. Za dokaz neograničenosti slike u α promotrimo proizvoljan $\beta < \alpha$. Postoji $\gamma < \mathrm{cf}(\alpha)$ takav da je $\beta < g(\gamma)$, nadalje postoji $\sigma < \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))$ takav da je $\gamma < f(\sigma)$. Iz ovoga slijedi da je $\sup(\mathrm{ran}(g \circ f)) = \alpha$, te zaključujemo da je $\mathrm{cf}(\alpha) \leqslant \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))$.

Pošto iz definicije kofinalnosti ordinalnog broja znamo da za sve $\beta \in \mathbf{On}$ vrijedi $\mathrm{cf}(\beta) \leqslant \beta$, te je $\mathrm{cf}(\alpha)$ ordinalni broj, tada je očito $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) \leqslant \mathrm{cf}(\alpha)$.

(b) $\aleph_0$ je očito regularan, jer nijedan konačan podskup od ω ne može biti kofinalan u ω. Za dokaz druge tvrdnje uočimo da za svaku funkciju $f\colon \operatorname{cf}(\kappa^+) \to \kappa^+$ vrijedi

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(\sup(\operatorname{ran}(f))) &= \operatorname{card} \bigcup \operatorname{ran}(f) = \\ &= \operatorname{card} \bigcup \{f(\beta) \mid \beta < \operatorname{cf}(\kappa^+)\} \leqslant \\ &\leqslant \operatorname{card}(\operatorname{cf}(\kappa^+)) \cdot \kappa\end{aligned}$$

jer je $\operatorname{card} f(\beta) < \kappa^+$ za svaki $\beta < \operatorname{cf}(\kappa^+)$, odnosno $\operatorname{card} f(\beta) \leqslant \kappa$. Prema tome, ako je $\operatorname{cf}(\kappa^+) \leqslant \kappa$ imamo $\operatorname{card}(\sup(\operatorname{ran}(f))) \leqslant \kappa$, pa mora biti $\sup(\operatorname{ran}(f)) < \kappa^+$, što je u kontradikciji s definicijom kofinalnosti. Dakle, mora biti $\operatorname{cf}(\kappa^+) = \kappa^+$.

(c) Uočimo da za $\alpha \in \mathbf{Lim}$ vrijedi $\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\beta \mid \beta < \alpha\}$. Neka je $h\colon \operatorname{cf}(\alpha) \to \alpha$ takva da je $\sup(\operatorname{ran}(h)) = \alpha$. Tada funkcija $h'\colon \operatorname{cf}(\alpha) \to \aleph_\alpha$ dana sa $h'(\beta) = \aleph_{h(\beta)}$ zadovoljava $\sup(\operatorname{ran}(h')) = \aleph_\alpha$, odakle je $\operatorname{cf}(\aleph_\alpha) \leqslant \operatorname{cf}(\alpha)$.

Obratno, neka je $g\colon \operatorname{cf}(\aleph_\alpha) \to \aleph_\alpha$ takva da je $\operatorname{ran}(g)$ kofinalno u $\aleph_\alpha$. Neka je $g'\colon \operatorname{cf}(\aleph_\alpha) \to \alpha$ definirana sa $g'(\gamma) = \min\{\sigma < \alpha \mid g(\gamma) \leqslant \aleph_\sigma\}$. Neka je $\tau < \alpha$, tada postoje $\gamma < \operatorname{cf}(\aleph_\alpha)$ takav da je $\aleph_\tau \leqslant g(\gamma)$. Dakle, $\tau \leqslant g'(\gamma)$, pa je $\operatorname{ran}(g')$ kofinalno u α, te imamo $\operatorname{cf}(\alpha) \leqslant \operatorname{cf}(\aleph_\alpha)$.

(d) Kako je $\omega \in \mathbf{Lim}$ zaključujemo da vrijedi $\operatorname{cf}(\aleph_\omega) \overset{(c)}{=} \operatorname{cf}(\omega) = \omega = \aleph_0 < \aleph_\omega$, odakle vidimo da je $\aleph_\omega$ singularan. Po (b) kardinalni brojevi $\aleph_n$ $(n \in \omega)$ su regularni, pa slijedi da je $\aleph_\omega$ najmanji singularan kardinal.

(e) Sjetimo se da je zbrajanje ordinala neprekidno u drugom argumentu (napomena 1.16). Prema tome svaki kardinal oblika $\aleph_{\alpha+\omega}$ je singularan, jer je supremum prebrojivog skupa $\{\aleph_{\alpha+n} \mid n \in \omega\}$, gdje $+$ označava sumu ordinala, te vrijedi $\alpha \leqslant \aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+\omega}$. Iz ovoga slijedi da je klasa singularnih kardinala neomeđena u **On**, odnosno to je prava klasa.

□

2.2 Beskonačne sume i produkti

U ovom odjeljku ćemo poopćiti definiciju sume i produkta kardinalnih brojeva na sumu i produkt familije kardinalnih brojeva, te ćemo opisati vezu kardinalnog eksponenciranja i beskonačnih suma i produkata.

Intuitivno, ono što želimo uraditi je definirati sumu, odnosno produkt, proizvoljno velike kolekcije skupova unutar koje se pojedini skup može „ponavljati" više puta. Za to će nam trebati pojam *familije skupova.*

Definicija 2.8. Neka je I skup, te neka je za svaki $i \in I$, a_i također skup. *Familija skupova* $(a_i : i \in I)$ je funkcija $i \mapsto a_i$.

Kada govorimo o familiji skupova intuitivno mislimo na skup vrijednosti funkcije iz definicije, s tim što „dozvoljavamo ponavljanja" elemenata. Za familiju ćemo reći da je *injektivna*, kada „nema ponavljanja", tj. kada je funkcija injektivna.

Definicija 2.9. Neka je $(\kappa_i : i \in I)$ familija kardinalnih brojeva. Definiramo sumu i produkt familije na slijedeći način:

$$\sum(\kappa_i : i \in I) := \sum_{i\in I} \kappa_i := \operatorname{card}\left(\bigcup\{\kappa_i \times \{i\} \mid i \in I\}\right),$$

$$\prod(\kappa_i : i \in I) := \prod_{i\in I} \kappa_i := \operatorname{card}\left(\left\{f \mid f \colon I \to \bigcup\{\kappa_i \mid i \in I\} \land (\forall i \in I)(f(i) \in \kappa_i)\right\}\right).$$

Produkt familije $(\kappa_i : i \in I)$ kardinalnih brojeva je definiran kao kardinalni broj Kartezijevog produkta familije skupova $(\kappa_i : i \in I)$. To dovodi do mogućnosti zabune oko značenja simbola $\prod_{i\in I} \kappa_i$, jer se može odnositi na Kartezijev produkt i na produkt kardinalnih brojeva. U većini slučajeva biti će jasno o čemu se radi, a kada postoji mogućnost zabune naglasiti ćemo što nam simbol označava.

Slijedeće dvije leme (2.10 i 2.11) lagano se dokazuju (potrebno je samo naći odgovarajuće injekcije i bijekcije), stoga ćemo dokaze ilustrirati na jednoj tvrdnji leme 2.11.

Lema 2.10. *Neka su $(\kappa_i : i \in I)$ i $(\lambda_i : i \in I)$ familije kardinalnih brojeva.*

(*a*) *Ako je za svaki $i \in I$ x_i skup kardinaliteta κ_i, onda je*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \operatorname{card}\left(\bigcup\{x_i \times \{i\} \mid i \in I\}\right) \; i \; \prod_{i\in I} \kappa_i = \operatorname{card} \prod_{i\in I} x_i .$$

(*b*)

$$\sum_{i\in\{0,1\}} \kappa_i = \kappa_0 + \kappa_1 \qquad \prod_{i\in\{0,1\}} \kappa_i = \kappa_0 \cdot \kappa_1$$
$$\sum_{i\in\emptyset} \kappa_i = 0 \qquad \prod_{i\in\emptyset} \kappa_i = 1$$

(*c*) *Ako je $\kappa_i \leqslant \lambda_i$ za sve $i \in I$, onda je*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i \leqslant \sum_{i\in I} \lambda_i \quad i \quad \prod_{i\in I} \kappa_i \leqslant \prod_{i\in I} \lambda_i .$$

(*d*)

$$\sum_{i\in I} \kappa = \kappa \cdot \operatorname{card} I \quad i \quad \prod_{i\in I} \kappa = \kappa^{\operatorname{card} I}$$

Lema 2.11. *Neka je $(\kappa_i : i \in I)$ familija kardinalnih brojeva i neka je λ kardinalni broj, te neka je $(X_i : i \in J)$ particija skupa I. Tada vrijedi slijedeće:*

(*a*) Opći zakoni komutativnosti i asocijativnosti

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \sum_{j\in I} \sum_{i\in X_j} \kappa_i \quad i \quad \prod_{i\in I} \kappa_i = \prod_{j\in I} \prod_{i\in X_j} \kappa_i .$$

(b) Zakon distributivnosti

$$\prod_{j\in J}\sum_{i\in X_j} = \sum\left(\prod_{j\in J}\kappa_{f(j)} : f\in\prod_{j\in J}X_j\right).$$

(c)

$$\lambda\cdot\sum_{i\in I}\kappa_i = \sum_{i\in I}\lambda\cdot\kappa_i\,.$$

(d)

$$\lambda^{\sum_{i\in I}\kappa_i} = \prod_{i\in I}\lambda^{\kappa_i}\,.$$

(e)

$$\left(\prod_{i\in I}\kappa_i\right)^{\lambda} = \prod_{i\in I}\kappa_i^{\lambda}\,.$$

Dokaz. Za ilustraciju dokažimo dio tvrdnje (a) tj. $\sum_{i\in I}\kappa_i = \sum_{j\in I}\sum_{i\in X_j}\kappa_i$. Treba naći bijekciju između $\bigcup\{\kappa_i\times\{i\}\mid i\in\ I\}$ i $\bigcup\{K_j\times\{j\}\mid j\in J\}$, gdje je $K_j=\bigcup\{\kappa_i\times\{i\}\mid i\in X_j\}$. Kako su skupovi X_j, $j\in J$ u parovima disjunktni očito je jedna takva bijekcija dana sa $((\alpha,i),j)\mapsto(\alpha,i)$. □

Slijedeći rezultati daju dodatni uvid u to kako izgledaju suma i produkt familije kardinalnih brojeva.

Lema 2.12. *Neka je $(\kappa_i : i\in I)$ familija kardinalnih brojeva. Tada je*

$$\sup\{\kappa_i\mid i\in I\}\leqslant\sum_{i\in I}\kappa_i\,.$$

Dokaz. Iz definicije 2.9 vidimo da za svaki $j\in I$ vrijedi $\kappa_j\leqslant\sum_{I\in I}\kappa_i$, iz čega odmah slijedi tražena relacija. □

Lema 2.13. *Neka je $(\kappa_i : i\in I)$ familija kardinalnih brojeva takva da je $I\neq\emptyset$, $\kappa_i>0$ za sve $i\in I$, te neka je barem jedan od kardinala $\operatorname{card} I$ i κ_i $(i\in I)$ beskonačan. Tada je*

$$\sum_{i\in I}\kappa_i = \max\{\operatorname{card} I,\sup\{\kappa_i\mid i\in I\}\} = \operatorname{card} I\cdot\sup\{\kappa_i\mid i\in I\}\,.$$

Specijalno, ako je familija $(\kappa_i : i\in I)$ injektivna, onda vrijedi

$$\sum_{i\in I}\kappa_i = \sup\{\kappa_i\mid i\in I\}\,.$$

Dokaz. Očito vrijedi $\max\{\operatorname{card} I,\sup\{\kappa_i\mid i\in I\}\} = \operatorname{card} I\cdot\sup\{\kappa_i\mid i\in I\}$, jer se radi o produktu dva kardinalna broja od kojih je barem jedan beskonačan. Kako je $\kappa_i>0$ za svaki $i\in I$ imamo (po 2.10 i 2.11) $\operatorname{card} I=\sum_{i\in I}1\leqslant\sum_{i\in I}\kappa_i$. Ovo uz lemu 2.12 daje $\sum_{i\in I}\kappa_i = \operatorname{card} I\cdot\sup\{\kappa_i\mid i\in I\}$.

Neka je $\kappa_i \neq \kappa_j$ za $i \neq j$ $(i, j \in I)$. Kako je $K := \{\kappa_i \mid i \in I\}$ dobro uređen skup (svaki skup ordinala je dobro uređen), tada postoji (jedinstven) ordinal α takav da $K \simeq \alpha$. Neka je $f\colon \alpha \to K$ (jedinstven) uređajni izomorfizam između α i K. Tada je $\operatorname{card} I \leqslant \alpha$ i $f(\gamma) \geqslant \gamma$ za svaki $\gamma \leqslant \alpha$. Ako je $\alpha \in \mathbf{Lim}$, onda vrijedi $\sup\{\kappa_i \mid i \in I\} = \sup(\operatorname{ran}(f)) \geqslant \alpha \geqslant \operatorname{card} I$. Ako je $\alpha = \beta + 1$ i $\alpha < \omega$, onda je $\sup\{\kappa_i \mid i \in I\} = f(\beta) \geqslant \omega > \alpha = \operatorname{card} I$. Nejednakost $f(\beta) \geqslant \omega$ dobivamo iz uvjeta da bar jedan od kardinala $\operatorname{card} I$ i κ_i $(i \in I)$ mora biti beskonačan. U slučaju $\alpha = \beta + 1$, $\alpha \geqslant \omega$ imamo $\sup(\operatorname{ran}(f)) = f(\beta) \geqslant \beta \geqslant \operatorname{card} \alpha \geqslant \operatorname{card} I$. □

Direktno iz leme 2.13 dobivamo jednakosti istaknute u slijedećem korolaru.

Korolar 2.14. *Neka su α i β ordinali.*

(*a*) *Ako je $\beta \in \mathbf{Lim}$, $(\sigma_\xi : \xi < \beta)$ strogo rastući niz ordinala i $\alpha = \sup\{\sigma_\xi : \xi < \beta\}$, onda je*

$$\sum_{\xi<\beta} \aleph_{\sigma_\xi} = \aleph_\alpha\,.$$

(*b*)

$$\sum_{\xi<\alpha+1} \aleph_\xi = \aleph_\alpha\,.$$

Definicija 2.15. Neka su κ i λ kardinalni brojevi. Označimo

$$\kappa^{<\lambda} := \sup\{\kappa^\nu \mid \nu \in \mathbf{Cn} \wedge \nu \in \lambda\}\,.$$

Neka je a skup i λ kardinalni broj. Sa

$$[a]^{<\lambda} := \{x \subseteq a \mid \operatorname{card} x < \lambda\}$$

označimo skup svih podskupova od a kardinaliteta manjeg od λ. Analogno se definiraju $[a]^{>\lambda}$, $[a]^{\leqslant\lambda}$ i $[a]^{\geqslant\lambda}$.

Slijedeća propozicija daje nam vezu između $\kappa^{<\lambda}$ i $[a]^{<\lambda}$.

Propozicija 2.16.

(*a*) *Neka su κ i λ kardinalni brojevi takvi da je $\kappa \geqslant 2$ i $\lambda \geqslant \omega$. Tada je $\kappa^{<\lambda} \geqslant \lambda$.*

(*b*) *Neka je a skup, $\operatorname{card} a = \kappa \geqslant \omega$, λ kardinal takav da je $2 \leqslant \lambda \leqslant \kappa$. Tada za svaki kardinal $\nu_0 < \lambda$ vrijedi*

$$\kappa^{<\lambda} = \operatorname{card}[a]^{<\lambda} = \sum_{\nu\in\lambda\cap\mathbf{Cn}} \kappa^\nu = \sum_{\nu_0\leqslant\nu\in\lambda\cap\mathbf{Cn}} \kappa^\nu\,.$$

Dokaz.

(a) U slučaju da je λ kardinal sljedbenik, tj. $\lambda = \mu^+$, imamo

$$\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^\nu \mid \nu \in \mathbf{Cn} \wedge \nu \in \lambda\} = \sup\{\kappa^\nu \mid \nu \in \mathbf{Cn} \wedge \nu \leqslant \mu\} = \kappa^\mu \geqslant 2^\mu > \mu\,,$$

odakle slijedi $\kappa^{<\lambda} \geqslant \mu^+ = \lambda$.

Neka je sada λ granični kardinal. Za proizvoljan $\nu \in \lambda \cap \mathbf{Cn}$ vrijedi $\kappa^\nu \geqslant 2^\nu > \nu$. Iz ovoga zaključujemo

$$\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^\nu \mid \nu \in \lambda \cap \mathbf{Cn}\} \geqslant \sup\{\nu \mid \nu \in \lambda \cap \mathbf{Cn}\} = \lambda\,.$$

(b) Sjetimo se da je $\operatorname{card}[a]^\nu = \kappa^\nu$ za $\nu \leqslant \kappa$ i $\operatorname{card}[a]^\nu = 0$ za $\nu > \kappa$. Iz ovoga slijedi

$$\operatorname{card}[a]^{<\lambda} = \sum_{\nu \in \lambda \cap \mathbf{Cn}} \kappa^\nu\,.$$

Za svaki kardinal $\nu_0 < \lambda$ (zbog $2 \leqslant \lambda \leqslant \kappa$) iz leme 2.13 slijedi

$$\sum_{\nu \in \lambda \cap \mathbf{Cn}} \kappa^\nu = \sup\{\kappa^\nu \mid \nu_0 \leqslant \nu \in \lambda \cap \mathbf{Cn}\}\,.$$

Specijalno za $\nu_0 = 0$ imamo

$$\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^\nu \mid \nu \in \lambda \cap \mathbf{Cn}\} = \operatorname{card}[a]^{<\lambda}\,.$$

□

Korolar 2.17. *Neka je a beskonačan skup i λ kardinal takav da je $\lambda \leqslant \operatorname{card}\alpha$. Tada vrijedi:*

(*a*) $\operatorname{card}[a]^\lambda = (\operatorname{card} a)^\lambda$,

(*b*) $\operatorname{card}[a]^{<\lambda} = (\operatorname{card} a)^{<\lambda}$. *Specijalno je* $\operatorname{card}[\omega]^{<\omega} = \aleph_0$,

(*c*) $\operatorname{card}[a]^{\leqslant\lambda} = (\operatorname{card} a)^\lambda$,

Dokaz. Dokažimo svojstvo (b). Skup a je beskonačan, pa je zbog toga $\operatorname{card}\alpha \geqslant \omega$. Ako je $\lambda \geqslant 2$, onda po propoziciji 2.16 vrijedi $(\operatorname{card} a)^{<\lambda} = \operatorname{card}[a]^{<\lambda}$. Preostalo nam je provjeriti još dva slučaja.

1° $\lambda = 1$. Tada je:

$$\operatorname{card}[a]^{<1} = \operatorname{card}\{x \subseteq a \mid \operatorname{card} x < 1\} = \operatorname{card}\{x \subseteq a \mid \operatorname{card} x = 0\} = \operatorname{card}\{\emptyset\} = 1$$

i

$$(\operatorname{card} a)^{<1} = \sup\{(\operatorname{card} a)^\nu \mid \nu < 1\} = (\operatorname{card} a)^0 = 1\,.$$

2° $\lambda = 0$. Tada je:

$$\operatorname{card}[a]^{<0} = \operatorname{card}\{x \subseteq a \mid \operatorname{card} x < 0\} = \operatorname{card} \emptyset = 0$$

i

$$(\operatorname{card} a)^{<0} = \sup\{(\operatorname{card} a)^{\nu} \mid \nu < 0\} = \sup \emptyset = \emptyset\,.$$

Po definiciji je $0 = \emptyset$.

Svojstvo (c) se dokazuje na sličan način. Da svojstvo (a) vrijedi znamo još od ranije (iz uvodnog poglavlja na str. 6). □

Teorem 2.18. *Neka su $(\kappa_i : i \in I)$ i $(\lambda_i : i \in I)$ familije kardinalnih brojeva.*

(a) *Ako je $\lambda_i \geqslant 2$ i $\kappa_i \leqslant \lambda_i$ za sve $i \in I$, onda je*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i \leqslant \prod_{i\in I} \lambda_i\,.$$

(b) (Königova lema) *Ako je $\kappa_i < \lambda_i$ za sve $i \in I$, onda je*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i\,.$$

Dokaz.

(a) Neka je $I_\infty = \{i \in I \mid \lambda_i \geqslant \omega\}$ i $I_{fin} = \{i \in I \mid \lambda_i < \omega\}$. Kako je $\sum_{i\in I} \kappa_i = \operatorname{card} \bigcup\{\kappa_i \times \{i\} \mid i \in I\}$, svakom paru (α, j), gdje je $j \in I$ i $\alpha \in \kappa_j$, pridružimo funkciju $f_{\alpha,j} \in \prod_{i\in I}(\lambda_i + 1)$ danu sa

$$f_{\alpha,j}(i) = \begin{cases} \kappa_i\,, & \text{za } i \neq j \\ \alpha\,, & \text{za } i = j. \end{cases}$$

Pridruživanje $(\alpha, j) \mapsto f_{\alpha,j}$ je očito injektivno, pa dobivamo

$$\sum_{i\in I_\infty} \kappa_i \leqslant \operatorname{card}\left(\prod_{i\in I_\infty}(\lambda_i + 1)\right) = \prod_{i\in I_\infty} \lambda_i\,.$$

U slučaju da je I_{fin} beskonačan imamo

$$\sum_{i\in I_{fin}} \kappa_i \leqslant \aleph_0 \cdot \operatorname{card} I_{fin} = \operatorname{card} I_{fin} < 2^{\operatorname{card} I_{fin}} \overset{\text{lema2.10}}{\leqslant} \operatorname{card} \underbrace{\prod_{i\in I_{fin}} \lambda_i}_{\substack{\text{Kartezijev}\\ \text{produkt}}} = \underbrace{\prod_{i\in I_{fin}} \lambda_i}_{\substack{\text{produkt}\\ \text{familije}\\ \text{kard. br.}}}\,.$$

Ako je I_{fin} konačan, onda iz $\lambda_i \geqslant 2$ za sve $i \in I$, slijedi da je $\sum_{i\in I_{fin}} \kappa_i \leqslant \prod_{i\in I_{fin}} \lambda_i$.
(Dokaz npr. indukcijom.)
Sada imamo

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \sum_{i\in I_\infty} \kappa_i + \sum_{i\in I_{fin}} \kappa_i \leqslant \prod_{i\in I_\infty} \lambda_i + \prod_{i\in I_{fin}} \lambda_i \leqslant \prod_{i\in I} \lambda_i\,.$$

(b) Slično kao i pod (a) vidimo da vrijedi $\sum_{i\in I}\kappa_i \leqslant \prod_{i\in I}\lambda_i$. Pretpostavimo da postoji bijekcija $h\colon \bigcup\{\kappa_i\times\{i\}\mid i\in I\}\to\prod_{i\in I}\lambda_i$. Tada je Kartezijev produkt $\prod_{i\in I}\lambda_i$ unija u parovima disjunktnih skupova $A_i := h[\kappa_i\times\{i\}]$ $(i\in I)$. Neka je $B_i := \lambda_i\cap\{f(i)\mid f\in A_i\}$. Kako je $\operatorname{card}B_i \leqslant \operatorname{card}A_i = \kappa_i < \lambda_i$ slijedi da je B_i pravi podskup od λ_i za svaki $i\in I$. Stoga po aksiomu izbora postoji funkcija $g\in\prod_{i\in I}\lambda_i$ takva da je $g(i)\in\lambda_i\setminus B_i$ za svaki $i\in I$. Dobili smo $g\notin\bigcup\{A_i\mid i\in I\}$, dok je po pretpostavci $g\in\prod_{i\in I}\lambda_i=\bigcup\{A_i\mid i\in I\}$, što je kontradikcija. Dakle, mora biti

$$\sum_{i\in I}\kappa_i < \prod_{i\in I}\lambda_i\,.$$

□

Korolar 2.19. *Neka je β beskonačan ordinal i $(\kappa_\xi : \xi<\beta)$ niz kardinalnih brojeva različitih od* 0.

(a) Ako $(\kappa_\xi:\xi<\beta)$ strogo raste i $\beta\in\mathbf{Lim}$, onda je

$$\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi<\prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi \quad i \quad \sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi<\left(\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi\right)^{\operatorname{card}\beta}.$$

(b) Ako je $\kappa_\xi\geqslant 2$ za svaki $\xi<\beta$, onda je

$$\left(\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi\right)^{\operatorname{card}\beta}=\left(\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi\right)^{\operatorname{card}\beta}.$$

Dokaz.

(a) Prva nejednakost slijedi iz Königove leme (teorem 2.18) kada je primijenimo na familije $(\kappa_\xi:\xi<\beta)$ i $(\kappa_{\xi+1}:\xi<\beta)$ i uzmemo u obzir da faktor $\kappa_0>0$ neće umanjiti produkt $\prod_{1\leqslant\xi<\beta}\kappa_\xi$.

Kako je $\kappa_\xi\leqslant\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi$ za svaki $\xi<\beta$ imamo $\prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi\leqslant(\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi)^{\operatorname{card}\beta}$. Sada druga nejednakost slijedi iz upravo dokazane prve nejednakosti.

(b) Po teoremu 2.18 (a) vidimo da vrijedi $\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi\leqslant\prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi$, te analogno kao pod (a) vrijedi $\left(\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi\right)^{\operatorname{card}\beta}$. Iz te dvije nejednakosti slijedi

$$\left(\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi\right)^{\operatorname{card}\beta}\leqslant\left(\prod_{\xi<\beta}\kappa_\xi\right)^{\operatorname{card}\beta}\leqslant\left(\sum_{\xi<\beta}\kappa_\xi\right)^{\operatorname{card}\beta\cdot\operatorname{card}\beta},$$

a kako je $\operatorname{card}\beta\cdot\operatorname{card}\beta=\operatorname{card}\beta$ tvrdnja je dokazana.

□

Teorem 2.20. *Neka je κ kardinal i α ordinal.*

(*a*) *Ako je $\kappa \geqslant 2$ onda je $\aleph_\alpha < \mathrm{cf}(\kappa^{\aleph_\alpha})$.*

(*b*) *Ako je κ beskonačan, onda je $\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.*

Dokaz.

(a) Neka je $f\colon \aleph_\alpha \to \kappa^{\aleph_\alpha}$ proizvoljna. Tada imamo

$$\mathrm{card}(\sup(\mathrm{ran}(f))) \leqslant \sum_{\beta<\aleph_\alpha} \mathrm{card}\, f(\beta) \overset{\mathrm{Tm}\ 2.18}{<} \prod_{\beta<\aleph_\alpha} \kappa^{\aleph_\alpha} = \left(\kappa^{\aleph_\alpha}\right)^{\aleph_\alpha} = \kappa^{\aleph_\alpha\cdot\aleph_\alpha} = \kappa^{\aleph_\alpha}\,.$$

Iz ovoga vidimo da ne postoji funkcija sa $\aleph_\alpha$ u $\kappa^{\aleph_\alpha}$ čija bi slika bila kofinalna u $\kappa^{\aleph_\alpha}$, dakle $\mathrm{cf}(\kappa^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha$.

(b) Neka je $f\colon\ \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ funkcija čija slika je kofinalna u κ. Tada vrijedi

$$\kappa \leqslant \sum_{\beta\leqslant\mathrm{cf}(\kappa)} \mathrm{card}\, f(\beta) \overset{\mathrm{Tm}\ 2.18}{<} \prod_{\beta\leqslant\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}\,.$$

□

Korolar 2.21.

(*a*) *Za svaki $\alpha \in$ **On** vrijedi $\mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha$. Specijalno $2^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} \neq \aleph_\alpha$.*

(*b*) *Ako je $\alpha \in$ **Lim** i $\aleph_\beta \geqslant \mathrm{cf}(\alpha)$, onda je $\aleph_\alpha \neq \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$ za sve $\gamma \in$ **On**. Specijalno vrijedi $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.*

Dokaz.

(a) Po teoremu 2.20 (a) vrijedi $\mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha$.

(b) Po lemi 2.7 je $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \mathrm{cf}(\alpha)$, pa koristeći teorem 2.20 dobivamo

$$\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} = \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\alpha)} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\,.$$

Pretpostavimo da za neki ordinal γ vrijedi $\aleph_\alpha = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$. Tada je $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta\cdot\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$, što je u kontradikciji s već dokazanim $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.

□

Iz ovog korolara vidimo da je u ZFC dokazivo $\aleph_0 < \mathrm{cf}(2^{\aleph_0})$. Dakle, funkcija kontinuuma ($\kappa \mapsto 2^\kappa$) zadovoljava slijedeća dva svojstva:

1) Ako $\kappa < \mu$, onda $2^\kappa \leqslant 2^\mu$ (*monotonost*) i

2) $\kappa < \mathrm{cf}(2^\kappa)$.

Može se dokazati da ako je $F\colon \mathbf{Reg} \to \mathbf{ICn}$ rastuća funkcija koja zadovoljava $\kappa < \mathrm{cf}(\kappa)$ za sve $\kappa \in \mathbf{Reg}$, onda je rečenica $(\forall \kappa \in \mathbf{Reg})(2^\kappa = F(\kappa))$ konzistentna sa ZFC. To znači da su gornja dva uvjeta jedini uvjeti koje aksiomi teorije ZFC postavljaju na ponašanje funkcije kontinuuma na regularnim kardinalima.

Slijedećom lemom ćemo karakterizirati svojstvo regularnosti za beskonačne kardinale.

Lema 2.22. *Neka je κ beskonačan kardinalni broj. Tada su slijedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) *κ je regularan,*

(ii) *Za svaki niz skupova $(S_\alpha : \alpha < \gamma)$, takav da je $\gamma < \kappa$ i $\mathrm{card}\, S_\alpha < \kappa$ za svaki $\alpha < \gamma$, vrijedi $\mathrm{card} \bigcup \{S_\alpha \mid \alpha < \kappa\} < \kappa$,*

(iii) *Za svaki niz kardinalnih brojeva $(\kappa_\alpha : \alpha < \gamma)$, takav da je $\gamma < \kappa$ i $\kappa_\alpha < \kappa$ za svaki $\alpha < \gamma$, vrijedi $\sum_{\alpha<\gamma} \kappa_\alpha < \kappa$.*

Dokaz. $\boxed{\text{(ii)}\Rightarrow\text{(i)}}$ Pretpostavimo da je κ singularan, te neka je $f\colon \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ funkcija sa svojstvom $\bigcup \mathrm{ran}(f) = \kappa$. Očito je $(f(\alpha) : \alpha < \mathrm{cf}(\kappa))$ niz skupova koji zadovoljava uvjete iz (ii) i u uniji daje κ, što je kontradikcija.

$\boxed{\text{(i)}\Rightarrow\text{(iii)}}$ Neka je $\gamma < \kappa$ i $(\kappa_\alpha : \alpha < \gamma)$ niz kardinala manjih od κ. Po lemi 2.10 i lemi 2.13 imamo $\sum_{\alpha<\gamma} \kappa_\alpha \leqslant \mathrm{card}\, \gamma \cdot \sup\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$. Zbog regularnosti od κ i pretpostavke $\gamma < \kappa$ vrijedi $\sup\{\kappa_\alpha \mid \alpha < \gamma\} < \kappa$, pa vidimo da vrijedi $\sum_{\alpha<\gamma} \kappa_\alpha < \kappa$.

$\boxed{\text{(iii)}\Rightarrow\text{(ii)}}$ Iz definicije 2.9 sliijedi $\mathrm{card}(\bigcup\{S_\alpha \mid \alpha < \gamma\}) \leqslant \sum_{\alpha<\gamma} \mathrm{card}\, S_\alpha$, iz čega odmah slijedi tražena implikacija. □

Ova lema nam govori da je kardinal κ regularan ako i samo ako ga ne možemo prikazati kao kardinalni broj unije manje od κ skupova kardinaliteta manjeg od κ, odnosno ako i samo ako κ nije moguće prikazati kao sumu manje od κ kardinala koji su svi manji od κ.

Lema 2.23. *Neka je $\kappa \in \mathbf{ICn}$. Tada je κ suma od $\mathrm{cf}(\kappa)$ kardinala manjih od κ. Ako je κ granični kardinal, onda postoji strogo rastući niz $(\lambda_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\kappa))$ kardinalnih brojeva manjih od κ takav da vrijedi*

$$\kappa = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_\xi = \sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\}\,.$$

Ako je κ singularan, onda možemo postići $\mathrm{cf}(\kappa) < \lambda < \kappa$ za sve $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$. Ako vrijedi i $\mathrm{cf}(\kappa) > \aleph_0$, onda postoji normalan niz singularnih kardinala s gornjim svojstvima.

Dokaz. Ako je κ regularan kardinal, onda vrijedi

$$\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} 1 = \sum_{\xi<\kappa} 1 = \kappa \cdot 1 = \kappa\,.$$

Neka je κ granični kardinal. Po lemi 2.6 postoji normalna funkcija $f\colon \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ takva da je $\sup(\mathrm{ran}(f)) = \kappa$.

Tvrdnja: Skup $c := \{\mathrm{card}\, f(\beta) \mid \beta < \mathrm{cf}(\kappa)\}$ je kofinalan u κ.

Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi. Tada je $(\sup(c))^+ < \kappa$, pa postoji $\sigma \in \mathrm{cf}(\kappa)$ takav da je $(\sup(c))^+ \leqslant f(\sigma)$, pa vrijedi i $(\sup(c))^+ \leqslant \mathrm{card}(f(\sigma)) \in c$, što je kontradikcija s definicijom supremuma. Ovim je tvrdnja dokazana.

Iz definicije kofinalnosti i upravo dokazane tvrdnje slijedi da je $\mathrm{card}\, c = \mathrm{cf}(\kappa)$. Neka je $(\lambda_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\kappa))$ niz (svih) elemenata od c u rastućem poretku. Sada je očito

$$\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_\xi = \sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \sup c = \kappa\,.$$

Neka je κ singularan. Tada nam vrijedi analogan argument kao i gore uzmemo li

$$c := \{\mathrm{card}\, f(\beta) \mid \beta < \mathrm{cf}(\kappa) \text{ i } \mathrm{card}\, f(\beta) > \mathrm{cf}(\kappa)\}\,.$$

Ako još vrijedi i $\mathrm{cf}(\kappa) > \aleph_0$, onda možemo izabrati singularne λ_ξ na slijedeći način:

- neka je λ_0 supremum nekog strogo rastućeg niza u c duljine ω,
- neka je $\lambda_{\xi+1}$ supremum nekog strogo rastućeg niza u c duljine ω s početnim članom $\max\{\lambda_\xi, \mathrm{card}\, f(\xi)\}$,
- Za granični ordinal $\gamma < \mathrm{cf}(\kappa)$, neka je $\lambda_\gamma = \sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \gamma\}$.

Zbog $\mathrm{cf}(\kappa) > \aleph_0$ kardinali λ_0 i $\lambda_{\xi+1}$ su singularni, dok za granični kardinal $\gamma < \mathrm{cf}(\kappa)$ imamo $\mathrm{cf}(\lambda_\gamma) \leqslant \gamma < \mathrm{cf}(\kappa) < \lambda_0 < \lambda_\gamma$, odakle vidimo da je i λ_γ singularan. Iz konstrukcije slijedi da je niz $(\lambda_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\kappa))$ normalan i da je $\sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \kappa$. $\square$

Sada smo spremni iskazati teoreme koji će nam dati neke osnovne relacije (formule) kardinalne aritmetike.

Teorem 2.24. *Neka su α, β i γ ordinali. Tada vrijedi*

(a) *ako je $\alpha \leqslant \beta$, onda je $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$,*

(b) Hausdorffova formula*: $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$,*

(c) Tarskijeva formula*: Ako je $\mathrm{card}\,\gamma \leqslant \aleph_\beta$, tada je $\aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+\gamma}^{\mathrm{card}\,\gamma} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.*

Dokaz. (a) $2^{\aleph_\beta} \leqslant {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} \leqslant (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

(b) Neka je $\beta \leqslant \alpha$, tada je $\aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha$. Po lemi 2.7 $\aleph_{\alpha+1}$ je regularan, pa je svaka funkcija s $\aleph_\beta$ u $\aleph_{\alpha+1}$ ujedno i funkcija s $\aleph_\beta$ u neki $\gamma < \aleph_{\alpha+1}$, jer bi u suprotnom bilo $\mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+1}) \leqslant \aleph_\beta < \aleph_{\alpha+1}$. Sada imamo

$$\begin{aligned}\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} &= \mathrm{card}\left({}^{\aleph_\beta}\aleph_{\alpha+1}\right) = \mathrm{card}\left(\bigcup\left\{{}^{\aleph_\beta}\gamma \mid \gamma < \aleph_{\alpha+1}\right\}\right) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{\gamma<\aleph_{\alpha+1}} (\mathrm{card}\,\gamma)^{\aleph_\beta} \leqslant \sum_{\gamma<\aleph_{\alpha+1}} \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \\ &= \aleph_{\alpha+1} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_{\alpha+1} \cdot \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}^{1+\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}\,.\end{aligned}$$

Ako je $\beta > \alpha$, onda je $\aleph_{\alpha+1} \leqslant \aleph_\beta$, pa po (a) imamo $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$, a kako je $2^{\aleph_\beta} > \aleph_\beta \geqslant \aleph_{\alpha+1}$, vrijedi i $2^{\aleph}_\beta = \aleph_{\alpha+1} \cdot 2^{\aleph_\beta}$, čime smo dobili $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.

(c) Dokazujemo transfinitnom indukcijom po γ.

$\boxed{\gamma = 0}$ ${\aleph_\alpha}^{\operatorname{card}\gamma} \cdot {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = {\aleph_\alpha}^{\operatorname{card}\gamma \cdot \aleph_\beta} = {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta}$.

Neka je $\gamma > 0$ takav da za svaki $\delta < \gamma$ vrijedi tvrdnja.

$\boxed{\gamma = \delta + 1}$

$$\begin{aligned}\aleph_{\alpha+\delta+1}^{\aleph_\beta} &\overset{\text{(b)}}{=} \aleph_{\alpha+\delta}^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\delta+1} \overset{\text{(pr. ind.)}}{=} \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\delta}^{\operatorname{card}\delta} \cdot \aleph_{\alpha+\delta+1} = \\ &= \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\delta}^{\operatorname{card}(\delta+1)} \cdot \aleph_{\alpha+\delta+1} \overset{\text{(b)}}{=} \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\delta+1}^{\operatorname{card}(\delta+1)}.\end{aligned}$$

$\boxed{\gamma \in \mathbf{Lim}}$

$$\aleph_{\alpha+\gamma} = \sup\{\aleph_{\alpha+\delta} \mid \delta < \gamma\} \leqslant \sum_{\delta<\gamma} \aleph_{\alpha+\delta} \leqslant \prod_{\delta<\gamma} \aleph_{\alpha+\delta}\,.$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned}\aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} &\leqslant \left(\prod_{\delta<\gamma} \aleph_{\alpha+\delta}\right)^{\aleph_\beta} = \prod_{\delta<\gamma} \aleph_{\alpha+\delta}^{\aleph_\beta} \overset{\text{(pr. ind.)}}{=} \prod_{\delta<\gamma} \left(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\delta}^{\operatorname{card}\delta}\right) \leqslant \\ &\leqslant \left(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\right)^{\operatorname{card}\gamma} \cdot \prod_{\delta<\gamma} \aleph_{\alpha+\delta}^{\operatorname{card}\delta} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta \cdot \operatorname{card}\gamma} \cdot \left(\aleph_{\alpha+\gamma}^{\operatorname{card}\gamma}\right)^{\operatorname{card}\gamma} = \\ &= \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\gamma}^{\operatorname{card}\gamma} \leqslant \aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+\gamma}^{\operatorname{card}\gamma} = \aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta}\end{aligned}$$

□

Korolar 2.25. *Neka je $n \in \omega$ i neka su α i β ordinali. Tada vrijedi*

(a) Generalizirana Hausdorffova formula: $\aleph_{\alpha+n}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\operatorname{card}\beta} \cdot \aleph_{\alpha+n}$

(b) Bernsteinova formula: $\aleph_n^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_n$

(c) *Ako je $\alpha \leqslant \aleph_\beta$, onda je $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_\alpha^{\operatorname{card}\alpha}$.*

Dokaz. (a) Slijedi iz Tarskijeve formule, jer je $\aleph_{\alpha+n}^n = \aleph_{\alpha+n}$ za svaki $n \in \omega$.

(b) Po generaliziranoj Hausdorffovoj formuli imamo $\aleph_n^{\aleph_\beta} = \aleph_0^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_n$, a po teoremu 2.24 (a) vrijedi $\aleph_0^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

(c) Po Tarskijevoj formuli je $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_0^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_\alpha^{\operatorname{card}\alpha}$, te ponovno iskoristimo $\aleph_0^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

□

Primjer 2.26. Navedimo sada, kao primjer, neke rezultate o potencijama kardinala.

1) Iz Bernsteinove formule slijedi $\aleph_1^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \cdot \aleph_1$, a kako je $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_1$, vidimo da vrijedi $\aleph_1^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

2) Po korolaru 2.25 (c) imamo $\aleph_\omega^{\aleph_1} = 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_\omega^{\aleph_0}$.

3) Ako je $2^{\aleph_1} = \aleph_2$, onda iz prethodnog primjera slijedi $\aleph_\omega^{\aleph_1} = \aleph_\omega^{\aleph_0}$. Po teoremu 2.20 vrijedi $\aleph_1 < \mathrm{cf}(\aleph_\omega^{\aleph_1})$, a kako je $\aleph_{\omega_1}$ granični kardinal, te $\aleph_1$ kardinal sljedbenik vrijedi i $\mathrm{cf}(\aleph_{\omega_1}) = \mathrm{cf}(\aleph_1) = \aleph_1$, iz čega smo dobili $\mathrm{cf}(\aleph_{\omega_1}) < \mathrm{cf}(\aleph_\omega^{\aleph_1})$. Dakle mora biti i $\aleph_\omega^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$. Ovo specijalno vrijedi ako pretpostavimo (GCH).

4) Ako je $\omega \leqslant \alpha < \omega_1$, onda je $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_0}$.
Za $\beta \geqslant 1$ tvrdnju dobivamo iz korolara 2.25 (b), dok za $\beta = 0$ iz $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_0}$ slijedi $2^{\aleph_0} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha^{\aleph_0}$.

5) Za svaki beskonačni kardinal κ vrijedi $(\kappa^+)^\kappa = 2^\kappa$.
Za svaki beskonačni kardinal κ postoji ordinal α takav da je $\kappa = \aleph_\alpha$. Sada imamo

$$\begin{aligned}\left(\kappa^+\right)^\kappa &= \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\alpha} = \ \text{(Hausdorffova formula)}\\ &= \aleph_{\alpha+1} \cdot \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} = \ \text{(tm. 2.24 (a))}\\ &= \aleph_{\alpha+1} \cdot 2^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} = 2^\kappa\,.\end{aligned}$$

Lema 2.27 (Četiri zlatna pravila kardinalne aritmetike).

(*a*) (Tarski) *Ako je kardinal* $\nu \geqslant \aleph_0$ *i* $(\kappa_\xi : \xi < \nu)$ *rastući niz beskonačnih kardinala, onda je*

$$\prod_{\xi<\nu} \kappa_\xi = (\sup\{\kappa_\xi \mid \xi < \nu\})^\nu\,.$$

(*b*) *Ako su* λ *i* κ *kardinalni brojevi za koje vrijedi* $\kappa > \aleph_0$ *i* $\lambda \geqslant \mathrm{cf}(\kappa)$, *onda je*

$$\kappa^\lambda = \left(\sup\{\nu^\lambda \mid \nu \in \kappa \cap \mathbf{Cn}\}\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)}\,.$$

(*c*) (Tarski) *Ako su* λ *i* κ *kardinalni brojevi za koje vrijedi* $\kappa > \aleph_0$ *i* $0 < \lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, *onda*

$$\kappa^\lambda = \kappa \cdot \sup\{\nu^\lambda \mid \nu \in \kappa \cap \mathbf{Cn}\} = \kappa \cdot \sum_{\nu\in\kappa\cap\mathbf{Cn}} \nu^\lambda\,.$$

(*d*) *Ako je* κ *beskonačan kardinal, tada vrijedi*

$$2^\kappa = \left(\kappa^{<\kappa}\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)}\,.$$

Dokaz.

(a) ν možemo prikazati kao uniju u parovima disjunktnih skupova B_α, $\alpha < \nu$ kardinaliteta $\mathrm{card}\, B_\alpha = \nu$. (Jer je $\mathrm{card}(\nu \times \nu) = \nu$.) Dakle, $\nu = \bigcup\{B_\alpha \mid \alpha < \nu\}$. Kako je $\mathrm{card}\, B_\alpha = \nu$ ne postoji kardinalni broj $\gamma < \nu$ takav da je $B_\alpha \subseteq \gamma$, pa zaključujemo da vrijedi

$$\mu := \sup\{\kappa_\xi \mid \xi < \nu\} = \sup\{\kappa_\xi \mid \xi \in B_\alpha\} \text{ za svaki } \alpha < \nu\,.$$

Iz leme 2.12 imamo $\mu \leqslant \prod_{\xi\in B_\alpha} \kappa_\xi$, za svaki $\alpha < \mu$. Sada koristeći opći zakon distributivnosti i asocijativnosti (lema 2.11) dobivamo

$$\mu^\nu = \prod_{\alpha<\nu} \mu \leqslant \prod_{\alpha<\nu} \prod_{\xi\in B_\alpha} \kappa_\xi = \prod_{\xi<\nu} \kappa_\xi \leqslant \prod_{\xi<\nu} \mu \leqslant \mu^\nu\,.$$

(b) Po lemi 2.23 postoji niz kardinala $(\kappa_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\kappa))$ takav da je $2 < \kappa_\xi < \kappa$ za sve $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$ i $\kappa = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi$. Označimo $\mu := \sup\{\nu^\lambda \mid \nu \in \kappa \cap \mathbf{Cn}\}$. Po korolaru 2.19 vrijedi $\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi = \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi$. Sada imamo

$$\kappa^\lambda = \left(\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi\right)^\lambda = \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi^\lambda \leqslant \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \mu = \mu^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant (\kappa^\lambda)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^\lambda$$

Posljednja jednakost vrijedi zbog uvjeta $\mathrm{cf}(\kappa) \leqslant \lambda$.

(c) Neka je $f \in {}^\lambda\kappa$. Kako je $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$ postoji ordinal $\alpha < \kappa$ takav da je $f \in {}^\lambda\alpha$. Uočimo da za svaki $\nu \in \kappa \cap \mathbf{Cn}$ i za svaki $\alpha \in [\nu, \nu^+\rangle_{\mathbf{On}}$ vrijedi $(\mathrm{card}\,\alpha)^\lambda = \nu^\lambda$. Sada imamo

$$\kappa^\lambda \leqslant \mathrm{card}\left(\bigcup\{{}^\lambda\alpha \mid \alpha < \kappa\}\right) \leqslant \sum_{\alpha<\kappa}(\mathrm{card}\,\alpha)^\lambda \leqslant \sum_{\nu\in\kappa\cap\mathbf{Cn}} \nu^+ \cdot \nu \leqslant \kappa \cdot \sum_{\nu\in\kappa\cap\mathbf{Cn}} \nu^\lambda \leqslant$$
$$\leqslant \kappa \cdot \sup\{\nu^\lambda \mid \nu \in \kappa \cap \mathbf{Cn}\} \leqslant \kappa^\lambda .$$

(d) Ako je $\kappa = \gamma^+$, onda po lemi 2.7 vrijedi $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$, što nam daje

$$(2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^{\gamma\cdot\kappa} = 2^\kappa .$$

Ako je κ granični kardinal, onda po lemi 2.23 postoji strogo rastući niz $(\kappa_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\kappa))$ takav da je $\kappa_\xi < \kappa$ za sve $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$ i vrijedi $\kappa = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi$. Sada imamo

$$2^\kappa = (2^\kappa)^{\mathrm{cf}(\kappa)} \geqslant (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} 2^{<\kappa} \geqslant \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} 2^{\kappa_\xi} = 2^{\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa_\xi} = 2^\kappa .$$

□

Korolar 2.28. *Neka je κ beskonačan kardinal i $(\kappa_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\kappa))$ niz kardinalnih brojeva takvih da je $2 < \kappa_\xi < \kappa$ za sve $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$ i vrijedi $\kappa = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi$. Tada vrijedi*

(a) $\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$,

(b) ako je $\lambda \geqslant \mathrm{cf}(\kappa)$ kardinal, onda je $\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi^\lambda = \kappa^\lambda$.

Dokaz.

(a) Ako je κ regularan, onda

$$\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^\kappa \overset{\text{lema2.27(a)}}{=} \prod_{\xi<\kappa} \kappa_\xi \leqslant \kappa^\kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} .$$

Ako je κ singularan, onda (zbog $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$) imamo

$$\kappa = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi = \mathrm{cf}(\kappa) \cdot \sup\{\kappa_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \sup\{\kappa_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} .$$

Dakle, u $(\kappa_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\kappa))$ postoji (strogo) rastući podniz $(\lambda_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\kappa))$ za koji vrijedi $\sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} = \kappa$. Sada iz prvog zlatnog pravila slijedi

$$\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_\xi \leqslant \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi \leqslant \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} .$$

(b) $\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi^\lambda = \left(\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi\right)^\lambda = \left(\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}\right)^\lambda = \kappa^\lambda$. Posljednja jednakost vrijedi radi uvjeta $\lambda \geqslant \mathrm{cf}(\kappa)$.

□

Lema 2.29. *Neka je β glavni broj za zbrajanje i $(\kappa_\xi : \xi < \beta)$ niz beskonačnih ordinala. Tada vrijedi*

$$\left(\prod_{\xi<\beta} \kappa_\xi\right)^{\mathrm{card}\,\beta} = \prod_{\xi<\beta} \kappa_\xi \,.$$

Dokaz. Iz lema 2.10 i 2.11 i znamo da vrijedi

$$\left(\prod_{\xi<\beta} \kappa_\xi\right)^{\mathrm{card}\,\beta} = \prod_{\xi<\beta} \kappa_\xi^{\mathrm{card}\,\beta} = \prod_{\xi<\beta}\left(\prod_{\eta<\beta} \kappa_\xi\right) .$$

Po lemi 1.19 za β ne postoji aditivni rastav, iz čega slijedi da je $\xi \# \eta < \beta$ za sve $\xi < \beta$ i sve $\eta < \beta$. Također vrijedi $\xi \leqslant \xi\#\eta$ i $\eta \leqslant \xi\#\eta$, pa imamo

$$\{\xi \mid \xi < \beta\} = \{\xi \mid (\exists \zeta < \beta)(\exists \nu)(\xi\#\eta = \zeta)\} \,.$$

Prema tome je

$$\prod_{\xi<\beta}\left(\prod_{\eta<\beta} \kappa_\xi\right) = \prod_{\zeta<\beta}\left(\prod_{\xi\#\eta=\zeta} \kappa_\xi\right) .$$

Kako za određeni ζ jednadžba $\xi\#\eta = \zeta$ ima konačno mnogo rješenja (v. nap. 1.18), među kojima je i $\zeta\#0 = \zeta$, te iz činjenice da su svi κ_ξ beskonačni slijedi

$$\prod_{\xi\#\eta=\zeta} \kappa_\xi = \kappa_\zeta \,.$$

Povežemo li sve dobivene jednakosti dokazali smo

$$\left(\prod_{\xi<\beta} \kappa_\xi\right)^{\mathrm{card}\,\beta} = \prod_{\zeta<\beta} \kappa_\zeta \,.$$

□

Teorem 2.30. *Neka je β glavni broj za zbrajanje i $(\alpha_\xi : \xi < \beta)$ strogo rastući niz ordinala sa supremumom α. Tada je*

$$\prod_{\xi<\beta} \aleph_{\alpha_\xi} = \aleph_\alpha^{\mathrm{card}\,\beta} \,.$$

Dokaz. Kako je β granični po korolaru 2.14 je

$$\sum_{\xi<\beta} \aleph_{\alpha_\xi} = \aleph_\alpha \,.$$

Po korolaru 2.19 je

$$\left(\sum_{\xi<\beta} \aleph_{\alpha_\xi}\right)^{\operatorname{card}\beta} = \left(\prod_{\xi<\beta} \aleph_{\alpha_\xi}\right)^{\operatorname{card}\beta},$$

dok iz leme 2.29 imamo

$$\left(\prod_{\xi<\beta} \aleph_{\alpha_\xi}\right)^{\operatorname{card}\beta} = \prod_{\xi<\beta} \aleph_{\alpha_\xi}.$$

Iz ove tri jednakosti slijedi tvrdnja teorema. $\square$

Teorem 2.31. *Za svaki ordinal $\beta > 0$ vrijedi*

$$\prod_{\xi\leqslant\beta} \aleph_\xi = \aleph_\beta^{\operatorname{card}\beta}.$$

Ako je $\beta \in \mathbf{Lim}$, onda vrijedi i

$$\prod_{\xi<\beta} \aleph_{\alpha_\xi} = \aleph_\beta^{\operatorname{card}\beta}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da postoji granični ordinal α takav da je $\prod_{\xi<\beta} \aleph_{\alpha_\xi} \neq \aleph_\beta^{\operatorname{card}\beta}$, te neka je β najmanji takav. Iz teorema 2.30 slijedi da β nije glavni broj za zbrajanje. Promotrimo Cantorovu normalnu formu za β u bazi ω,

$$\beta = \sum_{i<n} \omega^{\beta_i}, \text{ gdje je } n \in \omega \text{ i } \beta_0 \geqslant \beta_1 \geqslant \ldots \geqslant \beta_{n-1}.$$

Uočimo da mora biti $n > 1$, jer bi u suprotnom bilo $\beta = \omega^{\beta_0}$ što je po lemi 1.19 glavni broj za zbrajanje, a pretpostavili smo da β nije glavni broj za zbrajanje. Nadalje, kako je β granični ordinal vrijedi i $\beta_{n-1} > 0$, jer bi inače β bio kardinal sljedbenik. Dakle, dokazali smo da je β oblika $\beta = \sigma + \gamma$, gdje je $\gamma = \omega^{\beta_{n-1}}$. Iz normalne forme vidimo da je $\gamma \leqslant \sigma < \beta$, pa je $\operatorname{card}\beta = \operatorname{card}(\sigma+\gamma) = \operatorname{card}(\sigma)$, jer se radi o sumi dva beskonačna ordinala.

Sada po izboru ordinala β (minimalnost) dobivamo

$$\prod_{\xi<\sigma} \aleph_\xi = \aleph_\sigma^{\operatorname{card}\sigma} = \aleph_\sigma^{\operatorname{card}\beta},$$

a kako je po lemi 1.19 $\gamma = \omega^{\beta_{n-1}}$ glavni broj za zbrajanje, iz teorema 2.30 slijedi

$$\prod_{\xi<\gamma} \aleph_{\sigma+\xi} = \aleph_\beta^{\operatorname{card}\gamma}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \prod_{\xi<\beta} \aleph_\xi &= \prod_{\xi<\sigma} \aleph_\xi \cdot \prod_{\xi<\gamma} \aleph_{\sigma+\xi} = \\ &= \aleph_\sigma^{\operatorname{card}\beta} \cdot \aleph_\beta^{\operatorname{card}\gamma} = \aleph_\sigma^{\operatorname{card}\beta} \cdot \aleph_{\sigma+\gamma}^{\operatorname{card}\gamma} = \text{ (Tarskijeva formula)} \\ &= \aleph_{\sigma+\gamma}^{\operatorname{card}\beta} = \aleph_\beta^{\operatorname{card}\beta}, \end{aligned}$$

što je kontradikcija s odabirom ordinala β, pa zaključujemo da za svaki granični ordinal β vrijedi $\prod_{\xi<\beta} \aleph_\xi = \aleph_\beta^{\operatorname{card}\beta}$.

Preostalu jednakost dokazujemo transfinitnom indukcijom po β. Za $\beta = 1$ tvrdnja trivijalno vrijedi. Neka je $\beta > 1$ takav da za sve $\gamma < \beta$ vrijedi $\prod_{\xi \leqslant \gamma} \aleph_\xi = \aleph_\gamma^{\operatorname{card}\gamma}$.
Ako je $\beta \in \mathbf{Lim}$, onda, koristeći prethodno dokazanu jednakost, imamo

$$\prod_{\xi \leqslant \beta} \aleph_\xi = \aleph_\beta \cdot \prod_{\xi < \beta} \aleph_\xi = \aleph_\beta \cdot \aleph_\beta^{\operatorname{card}\beta} = \aleph_\beta^{\operatorname{card}\beta}.$$

Ako je $\beta = \gamma + 1$, onda

$$\begin{aligned}
\prod_{\xi \leqslant \gamma+1} \aleph_\xi &= \aleph_{\gamma+1} \cdot \prod_{\xi \leqslant \gamma} \aleph_\xi = \ \text{(pretp. ind.)} \\
&= \aleph_\gamma^{\operatorname{card}\gamma} \cdot \aleph_{\gamma+1} = \ \text{(Hausdorffova formula)} \\
&= \aleph_{\gamma+1}^{\operatorname{card}\gamma} = \aleph_{\gamma+1}^{\operatorname{card}(\gamma+1)}.
\end{aligned}$$

□

Tarski je postavio hipotezu da teorem 2.30 vrijedi ne samo za glavne brojeve za zbrajanje, nego i za sve granične ordinale. Iz slijedeće propozicije, koristeći Gödelov rezultat da je ZFC + (GCH) konzistentna ako je ZF konzistentna, slijedi da je Tarskijeva hipoteza konzistentna sa ZFC (ako je ZF konzistentna).

Propozicija 2.32. *Neka je β granični ordinal i $(\alpha_\xi : \xi < \beta)$ strogo rastući niz ordinala sa supremumom α. Ako vrijedi generalizirana hipoteza kontinuuma, onda je*

$$\aleph_{\alpha+1} = \prod_{\xi < \beta} \aleph_{\alpha_\xi} = \aleph_\alpha^{\operatorname{card}\beta}.$$

Dokaz. Uočimo da vrijedi

$$\aleph_\alpha \overset{\text{kor. } 2.14}{=} \sum_{\xi < \beta} \aleph_{\alpha_\xi} \overset{\text{kor. } 2.19}{<} \prod_{\xi < \beta} \aleph_{\alpha_\xi} \leqslant \prod_{\xi < \operatorname{card}\beta} \aleph_{\alpha_\xi},$$

pa koristeći prvo zlatno pravilo zaključujemo da je

$$\prod_{\xi < \beta} \aleph_{\alpha_\xi} \leqslant \aleph_\alpha^{\operatorname{card}\beta}.$$

Kako je niz $(\alpha_\xi : \xi < \beta)$ strogo rastući, vrijedi $\alpha_\xi \geqslant \xi$ za sve $\xi < \beta$, pa je i $\alpha = \sup\{\alpha_\xi \mid \xi < \beta\} \geqslant \beta$, odakle imamo

$$\aleph_\alpha^{\operatorname{card}\beta} \leqslant \aleph_\alpha^{\operatorname{card}\alpha} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\alpha} \overset{\text{tm. } 2.24}{=} 2^{\aleph_\alpha} \overset{\text{(GCH)}}{=} \aleph_{\alpha+1}.$$

Dakle,

$$\aleph_\alpha < \prod_{\xi < \beta} \aleph_{\alpha_\xi} \leqslant \aleph_\alpha^{\operatorname{card}\beta} \leqslant \aleph_{\alpha+1},$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Ipak, uz pretpostavku konzistentnosti na ZF, može se dokazati da postoji model za ZFC u kojem Tarskijeva pretpostavka ne vrijedi. Naravno, u tom modelu ne vrijedi ni (GCH).

Za kraj dokažimo još Tarskijevu formulu rekurzije, koja nam daje još jednu vezu potenciranja i beskonačnih suma, uz određene uvjete na kofinalnost eksponenta.

Lema 2.33 (Tarskijeva formula rekurzije). *Neka je β granični ordinal, α supremum strogo rastućeg niza ordinala $(\alpha_\xi : \xi < \beta)$ i neka je $\aleph_\gamma < \mathrm{cf}(\beta)$. Tada je*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\gamma} = \sum_{\xi<\beta} \aleph_\xi^{\aleph_\gamma} = \sup\{\aleph_{\alpha_\xi}^{\aleph_\gamma} \mid \xi < \beta\}\,.$$

Dokaz. Niz $(\alpha_\xi : \xi < \beta)$ je rastući i kofinalan u α, pa je očito da sadrži podniz duljine $\mathrm{cf}(\beta)$ koji je također kofinalan u α. Stoga je $\mathrm{cf}(\alpha) \leqslant \mathrm{cf}(\beta)$. S druge strane niz $(\beta_\zeta : \zeta < \alpha)$, gdje je

$$\beta_\zeta = \begin{cases} \xi & \text{ako je } \zeta \in \{\alpha_\sigma \mid \sigma < \beta\} \text{ i } \zeta = \alpha_\xi, \\ \sup\{\beta_\delta \mid \delta < \zeta\} & \text{inače,} \end{cases}$$

je rastući i kofinalan u β (jer je $(\alpha_\xi : \xi < \beta)$ strogo rastući), pa je i $\mathrm{cf}(\beta) \leqslant \mathrm{cf}(\alpha)$. Dakle, $\mathrm{cf}(\beta) = \mathrm{cf}(\alpha)$, a kako je α granični ordinal, iz pretpostavke teorema dobivamo $\aleph_\gamma < \mathrm{cf}(\beta) = \mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$. Prema tome za svaki $f \in {}^{\aleph_\gamma}\aleph_\alpha$ postoji $\xi < \alpha$ za koji je $f \in {}^{\aleph_\gamma}\aleph_\xi$, pa vrijedi

$${}^{\aleph_\gamma}\aleph_\alpha = \bigcup\{{}^{\aleph_\gamma}\aleph_\xi \mid \xi < \alpha\} = \bigcup\{{}^{\aleph_\gamma}\aleph_{\alpha_\xi} \mid \xi < \beta\}\,.$$

Sada je jasno da vrijedi

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\gamma} \leqslant \sum_{\xi<\beta} \aleph_{\alpha_\xi}^{\aleph_\gamma} = \mathrm{card}\,\beta \cdot \sup\{\aleph_{\alpha_\xi}^{\aleph_\gamma} \mid \xi < \beta\}\,.$$

Uočimo da je $\mathrm{card}\,\beta \leqslant \sup\{\aleph_{\alpha_\xi}^{\aleph_\gamma} \mid \xi < \beta\}$, jer je $\xi \leqslant \alpha_\xi \leqslant \aleph_{\alpha_\xi} \leqslant \aleph_{\alpha_\xi}^{\aleph_\gamma}$, pa je i $\beta = \sup\{\xi \mid \xi < \beta\} \leqslant \sup\{\aleph_{\alpha_\xi}^{\aleph_\gamma} \mid \xi < \beta\}$. Dakle, vrijedi

$$\mathrm{card}\,\beta \cdot \sup\{\aleph_{\alpha_\xi}^{\aleph_\gamma} \mid \xi < \beta\} = \sup\{\aleph_{\alpha_\xi}^{\aleph_\gamma} \mid \xi < \beta\} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\gamma}\,,$$

čime je teorem dokazan. $\square$

3

Jaki granični kardinali i hipoteza singularnih kardinala

U ovom poglavlju ćemo preciznije navesti koje su sve vrijednosti moguće kao rezultati potenciranja dvaju beskonačnih kardinala. U prvom odjeljku nećemo izlaziti iz okvira teorije ZFC, dok ćemo u drugom odjeljku uz aksiome ZFC kod nekih rezultata za pretpostavku uzimati generaliziranu hipotezu kontinuuma ili tzv. hipotezu singularnih kardinala čiju ćemo formulaciju uvesti na početku drugog odjeljka.

3.1 Jechov teorem

U ovom odjeljku pobliže ćemo opisati vrijednosti potenciranja beskonačnih kardinala preko vrijednosti potencija za manje baze ili eksponente, za što će nam trebati još neki pojmovi koje uvodimo u slijedećoj definiciji.

Definicija 3.1. Neka je κ beskonačan kardinal i λ neprebrojiv kardinal. Kažemo da je λ *κ-jak* ako za svaki kardinal $\rho < \lambda$ vrijedi $\rho^\kappa < \lambda$. Za λ kažemo da je *jaki granični kardinal* ako je λ ν-jak za svaki kardinal $\nu < \lambda$.

Kažemo da je κ *(jako) nedostiživ kardinal* ako je κ regularan neprebrojiv jaki granični kardinal. Za κ kažemo da je *slabo nedostiživ kardinal* ako je regularn neprebrojiv granični kardinal.

Uočimo da ako je λ κ-jak, onda očito vrijedi $\kappa < \lambda$. Također jaki granični kardinali mogu se karakterizirati naoko slabijim svojstvom.

Propozicija 3.2. *λ je jaki granični kardinal ako i samo ako za svaki kardinal $\nu < \lambda$ vrijedi $2^\nu < \lambda$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $2^\nu < \lambda$ za sve kardinale $\nu < \lambda$ i da λ nije jaki granični kardinal. λ je očito granični kardinal, jer je $2^\kappa \geqslant \kappa^+$ za svaki kardinal κ. Po pretpostavci postoje ρ i κ manji od λ takvi da je $\rho^\kappa \geqslant \lambda$. Ako je $\rho \leqslant \kappa$, onda po teoremu 2.24 vrijedi $\lambda \leqslant \rho^\kappa = 2^\kappa$, pa mora biti $\rho > \kappa$. No, sada je $\lambda \leqslant \rho^\kappa \leqslant \rho^\rho = 2^\rho$. Ovo je očito kontradikcija s pretpostavkom da je $2^\nu < \lambda$ za sve $\nu < \lambda$.

Obrat trivijalno vrijedi. $\square$

Dokažimo još neka svojstva jakih graničnih kardinala.

Propozicija 3.3. *Jaki granični kardinali čine pravu klasu.*

Dokaz. Neka je μ beskonačni kardinalni broj. Definiramo strogo rastući niz kardinala $(\kappa_n : n < \omega)$ sa

$$\kappa_0 = \mu\,,$$
$$\kappa_{n+1} = 2^{\kappa_n}\,,$$

te označimo $\kappa := \sup\{\kappa_n \mid n < \omega\}$. Ako su $\rho, \nu \in \kappa \cap \mathbf{Cn}$, onda postoji $n \in \omega$ takava da je $\max\{\rho, \nu\} \leqslant \kappa_n$, pa imamo

$$\rho^\nu \leqslant \kappa_n^{\kappa_n} = 2^{\kappa_n} = \kappa_{n+1} < \kappa\,,$$

odakle vidimo da je κ jaki granični kardinal, dok je iz konstrukcije očito $\kappa > \mu$. □

Uočimo da je kardinal κ konstruiran u prethodnom dokazu singularan.

Lema 3.4. *Supremum skupa jakih graničnih kardinala je jaki granični kardinal.*

Dokaz. Neka je $\{\kappa_i \mid i \in I\}$ skup jakih graničnih kardinala i $\kappa := \sup\{\kappa_i \mid i \in I\}$. Ako je $\kappa \in \{\kappa_i \mid i \in I\}$ nema se što dokazivati. U suprotnom, neka su $\rho, \nu \in \kappa \cap \mathbf{Cn}$. Zbog $\kappa \notin \{\kappa_i \mid i \in I\}$ postoji $i \in I$ takav da su $\rho, \nu \in \kappa_i$, pa je $\rho^\nu < \kappa_i < \kappa$. □

Slično se dokazuje da je za svaki beskonačni kardinal λ klasa λ-jakih kardinala prava klasa, te da je supremum skupa λ-jakih kardinala također λ-jak kardinal.

Napomena 3.5 *(o nedostiživim kardinalima).* Već od ranije znamo da su svi singularni kardinali granični. Jedini regularni granični kardinal s kojim smo se susreli je $\aleph_0$, stoga se prirodno nameće pitanje postoji li neprebrojiv regularan granični (drugim riječima slabo nedostiživi) kardinal.

Neka je $\aleph_\alpha$ slabo nedostiživ kardinal. Kako je $\aleph_\alpha$ granični imamo $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \alpha$, a zbog regularnosti od $\aleph_\alpha$ je $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha$. Dakle za slabo nedostiživ kardinal $\aleph_\alpha$ mora vrijediti $\aleph_\alpha = \alpha$. Iako se na prvi pogled čini da je ovo vrlo jako svojstvo, pokazuje se da singularnih kardinala s tim svojstvom ima prava klasa. Neka je λ kardinal. Tada je supremum niza $(\kappa_n : n \in \omega)$ danog sa

$$\begin{cases} \kappa_0 = \lambda \\ \kappa_{n+1} = \aleph_{\kappa_n} \end{cases}$$

singularni kardinal $\aleph_\beta > \lambda$ sa svojstvom $\aleph_\beta = \beta$.

Moguće je dokazati da je postojanje slabih i jakih nedostiživih kardinala nezavisno sa ZFC, no ono što je još zanimljivije je, da za jake nedostižive kardinale vrijedi puno jače svojstvo – postojanje jako nedostoživih kardinala implicira konzistentnost teorije ZFC. Preciznije, ako je κ jako nedostiživ kardinal, onda je κ-ti nivo kumulativne hijerarhije $\mathbf{V}_\kappa$ model za ZFC.

Nakon ove digresije, vratimo se na promatranje potenciranja kardinala.

Lema 3.6. *Neka je κ jaki granični kardinal. Tada vrijedi $2^{<\kappa} = \kappa$ i $2^{\kappa} = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.*

Dokaz. Uočimo:

$$\kappa \overset{\text{prop.2.16}}{\leqslant} 2^{<\kappa} = \sup\{2^{\nu} \mid \nu \in \kappa \cap \mathbf{Cn}\} \leqslant \kappa\,.$$

Posljednja nejednakost vrijedi radi toga što je κ jaki granični kardinal. Ovim smo dokazali prvu jednakost. Drugu jednakost dobivamo iz 4. zlatnog pravila:

$$2^{\kappa} = \left(2^{<\kappa}\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}\,.$$

□

U teoremu 2.24 dokazali smo da za $\aleph_\alpha \leqslant \aleph_\beta$ vrijedi $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$. Pogledajmo što možemo reći u slučaju $\aleph_\alpha > \aleph_\beta$.

Lema 3.7. *Neka su α, β i γ ordinali za koje vrijedi $\beta < \alpha$ i $\aleph_\alpha \leqslant \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$. Tada je $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$.*

Dokaz.

$$\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leqslant \left(\aleph_\gamma^{\aleph_\beta}\right)^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}\,.$$

□

Lema 3.8. *Neka su α i β ordinali i neka je $\beta < \alpha$. Ako je $\aleph_\alpha$ $\aleph_\beta$-jak, onda je*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha & \textit{ako je } \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) > \aleph_\beta, \\ \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} & \textit{inače.} \end{cases}$$

Dokaz. Ako je $\alpha = \delta + 1$, onda je $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha > \aleph_\beta$. Iz Hausdorffove formule slijedi

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\delta+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\delta+1} \cdot \underbrace{\aleph_\delta^{\aleph_\beta}}_{<\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha\,.$$

Neka je sada α granični kardinal. Tada je $\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\gamma \mid \gamma < \alpha\} \leqslant \sup\{\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \mid \gamma < \alpha\}$, dok zbog uvjeta da je $\aleph_\alpha$ $\aleph_\beta$-jak vrijedi $\sup\{\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \mid \gamma < \alpha\} \leqslant \aleph_\alpha$. Dobili smo

$$(*) \qquad \aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \mid \gamma < \alpha\}\,.$$

Ako je $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) > \aleph_\beta$, onda je po 3. zlatnom pravilu

$$\begin{aligned} \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} &= \aleph_\alpha \cdot \sup\{\nu^{\aleph_\beta} \mid \nu \in \aleph_\alpha \cap \mathbf{Cn}\} = \\ &= \aleph_\alpha \cdot \sup\{\alpha_\gamma^{\aleph_\beta} \mid \gamma < \alpha\} = (*) \\ &= \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha\,. \end{aligned}$$

Ako je $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leqslant \aleph_\beta$, onda iz pretpostavke $\aleph_\beta < \aleph_\alpha$ slijedi da je $\aleph_\alpha$ singularan, pa je prema tome i granični. Sada možemo primjeniti 2. zlatno pravilo:

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \left(\sup\{\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \mid \gamma < \alpha\}\right)^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} \overset{(*)}{=} \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)}\,.$$

□

Lema 3.9. *Neka su α i β ordinali takvi da je $\beta < \alpha$ i $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} > 2^{\aleph_\beta}$, te neka $\aleph_\alpha$ nije $\aleph_\beta$-jak. Neka je γ najmanji ordinal za koji vrijedi $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \geqslant \aleph_\alpha$. Tada je $\aleph_\gamma$ $\aleph_\beta$-jak singularan kardinal za koji vrijedi*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\mathrm{cf}(\aleph_\gamma)} \quad i \quad \mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \leqslant \aleph_\beta < \aleph_\gamma\,.$$

Dokaz. Neka je γ najmanji ordinal za koji je $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \geqslant \aleph_\alpha$. Uočimo da je $\gamma < \alpha$, jer $\aleph_\alpha$ nije $\aleph_\beta$-jak. Po lemi 3.7 imamo $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.

Dokažimo sada da je $\aleph_\gamma$ $\aleph_\beta$-jak. Za početak uočimo da je $\beta < \gamma$. U suprotnom bi (po teoremu 2.24) bilo $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$, što je kontradikcija s pretpostavkom leme. Nadalje, pretpostavimo da za neki $\sigma < \gamma$ vrijedi $\aleph_\sigma^{\aleph_\beta} \geqslant \aleph_\gamma$. Tada iz leme 3.7 slijedi $\aleph_\sigma^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$, dok po izboru ordinala γ (minimalnost) imamo $\aleph_\sigma^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha \leqslant \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$, što je kontradikcija. Ovim smo dokazali da je $\aleph_\gamma$ $\aleph_\beta$-jak.

Ako je $\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) > \aleph_\beta$, onda iz leme 3.8 slijedi $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma < \aleph_\alpha$, što je kontradikcija. Dakle, mora biti $\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \leqslant \aleph_\beta < \aleph_\gamma$, odakle vidimo da je $\aleph_\gamma$ singularan, te po lemi 3.8 dobivamo

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\mathrm{cf}(\aleph_\gamma)}\,.$$

□

Sumiramo li dosadašnje rezultate o potenciranju kardinala, dobiti ćemo Jechov teorem:

Teorem 3.10 (Jech). *Neka su α i β ordinali. Ako $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \notin \{2^{\aleph_\beta}, \aleph_\alpha\}$, onda postoji ordinal $\gamma \leqslant \alpha$ takav da je $\aleph_\gamma$ $\aleph_\beta$-jak, te vrijedi* $\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \leqslant \aleph_\beta < \aleph_\gamma$ *i* $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\mathrm{cf}(\aleph_\gamma)}$.

Dokaz. Neka je $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \neq 2^{\aleph_\beta}$. Tada je po teoremu 2.24 $\aleph_\beta < \aleph_\alpha$. Ako je $\aleph_\alpha$ $\aleph_\beta$-jak, onda po lemi 3.8 u slučaju $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leqslant \aleph_\beta$ imamo $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)}$, dok u suprotnom vrijedi $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$. Preostali slučaj pokriven je lemom 3.9 □

Drugim riječima za potenciranje beskonačnih kardinala vrijedi:

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} 2^{\aleph_\beta} & \text{ili} \\ \aleph_\alpha & \text{ili} \\ \aleph_\gamma^{\mathrm{cf}(\aleph_\gamma)} & \text{za neki } \gamma \leqslant \alpha \text{ takav da je } \mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \leqslant \aleph_\beta < \aleph_\gamma. \end{cases}$$

3.2 Hipoteza singularnih kardinala

Sada ćemo vidjeti što možemo reći o potenciranju beskonačnih kardinala kada aksiome ZFC pojačamo s još nekim pretpostavkama, odnosno generaliziranom hipotezom kontinuuma ili nešto slabijim zahtjevom – *hipotezom singularnih kardinala* koja glasi

$$\text{(SCH)} \qquad (\forall \kappa \in \mathbf{ICn})(2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa \rightarrow \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+)\,.$$

Za motivaciju, prisjetimo se propozicije 2.32, te pogledajmo slijedeći korolar.

Korolar 3.11. *Neka vrijedi* (GCH). *Tada za kardinale* $\kappa \geqslant 2$ *i* $\lambda \geqslant \aleph_0$ *vrijedi*

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa & \textit{ako } \lambda < \mathrm{cf}(\kappa)\,, \\ \kappa^+ & \textit{ako } \mathrm{cf}(\kappa) \leqslant \lambda < \kappa\,, \\ \lambda^+ & \textit{ako } \kappa \leqslant \lambda\,. \end{cases}$$

Dokaz. Ako je $\kappa \leqslant \lambda$, onda je po teoremu 2.24 $\kappa^\lambda = 2^\lambda \overset{(\mathrm{GCH})}{=} \lambda^+$.

Ako je $\mathrm{cf}(\kappa) > \lambda$ po 3. zlatnom pravilu imamo

$$\kappa \leqslant \kappa^\lambda = \kappa \cdot \sup\{\nu^\lambda \mid \nu \in \kappa \cap \mathbf{Cn}\}\,.$$

Neka je ν kardinal manji od κ. Tada za $\nu \leqslant \lambda$ vrijedi $\nu^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+$, a za $\nu > \lambda$ je $\nu^\lambda \leqslant \nu^\nu = 2^\nu = \nu^+$. Dakle

$$\sup\{\nu^\lambda \mid \nu \in \kappa \cap \mathbf{Cn}\} \leqslant \max\{\nu^+, \lambda^+\} \leqslant \kappa\,,$$

pa je

$$\kappa \cdot \sup\{\nu^\lambda \mid \nu \in \kappa \cap \mathbf{Cn}\} = \kappa\,,$$

odakle slijedi $\kappa^\lambda = \kappa$.

Preostao nam je još slučaj $\mathrm{cf}(\kappa) \leqslant \lambda < \kappa$. Tada je po teoremu 2.20

$$\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant \kappa^\lambda \leqslant \kappa^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+\,.$$

□

Za nastavak razmatranja bit će nam potrebni još neki pojmovi koje uvodimo u slijedećoj definiciji.

Definicija 3.12. Funkciju $(\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} : \kappa \in \mathbf{ICn})$ nazivamo *gimel funkcija*, te umjesto $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ pišemo i $\gimel(\kappa)$. Za $\kappa \in \mathbf{ICn} \cup \{2\}$ funkciju $(\kappa^\nu : \nu \in \mathbf{ICn})$ nazivamo *funkcija kontinuuma za* κ. (Kao što je i uobičajeno funkciju kontinuuma za 2 i dalje ćemo kratko zvati fukcija kontinuuma.) Kažemo da funkcija kontinuuma za κ *postaje konstantna ispod* λ, ako postoji kardinal $\rho < \lambda$ takav da za svaki $\rho' \in [\rho, \lambda\rangle_{\mathbf{Cn}}$ vrijedi $\kappa^{\rho'} = \kappa^\rho$. Ako je kardinal $\rho_0 < \lambda$ takav da za svaki $\rho \in [\rho_0, \lambda\rangle_{\mathbf{Cn}}$ vrijedi $\kappa^\rho = \kappa^{\rho_0}$, onda kažemo da *funkcija kontinuuma za* κ *postaje konstantna ispod* λ *nakon* ρ_0.

Već smo spomenuli da je hipoteza singularnih kardinala slabija od generalizirane hipoteze kontinuuma. Uvjerimo se da to uistinu vrijedi.

Propozicija 3.13. *Ako vrijedi generalizirana hipoteza kontinuuma, onda vrijedi i hipoteza singularnih kardinala tj.* $\mathsf{ZFC} \vdash (\mathrm{GCH}) \to (\mathrm{SCH})$, *odnosno* $\mathsf{ZFC} + (\mathrm{GCH}) \vdash (\mathrm{SCH})$.

Dokaz. Neka je $\kappa \in \mathbf{ICn}$. Tada je

$$\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant \kappa^\kappa = 2^\kappa \overset{(\mathrm{GCH})}{=} \kappa^+\,.$$

Dakle, za sve beskonačne kardinale vrijedi $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+$, pa specijalno vrijedi i (SCH). □

Napomena 3.14 *(o hipotezi singularnih kardinala).* Iz propozicije 3.13 slijedi da je (SCH) konzistentna sa ZFC, jer je posljedica generalizirane hipoteze kontinuuma koja je konzistentna sa ZFC. Može se dokazati da je negacija hipoteze singularnih kardinala također konzistentna sa ZFC, odnosno da je (SCH) nezavisna s aksiomima ZFC.

Ekvivalentna formulacija hipoteze singularnih kardinala glasi:

Ako je κ singularan jaki granični kardinal, onda je $2^\kappa = \kappa^+$.

Iz ovog oblika je jasan naziv „hipoteza singularnih kardinala". Još jedna zanimljivost je da ako (SCH) vrijedi za sve singularne kardinale kofinalnosti $\aleph_0$, onda vrijedi za sve singularne kardinale. Drugim riječima, ako u nekom modelu za ZFC ne vrijedi (SCH), onda u tom modelu postoji singularni kardinal κ kontraprimjer za (SCH) za koji je $\mathrm{cf}(\kappa) = \aleph_0$.

Lema 3.15. *Neka su $\kappa \in \mathbf{ICn} \cup \{2\}$ i $\lambda > \aleph_0$ kardinali. Tada nastupa jedan od slijedeća dva slučaja:*

(*1*) *Funkcija kontinuuma za κ postaje konstantna ispod λ i $\mathrm{cf}(\kappa^{<\lambda}) \geqslant \lambda$, te za neki kardinal $\rho < \lambda$ vrijedi $\kappa^{<\lambda} = \kappa^\rho$.*

(*2*) *Postoji strogo rastući niz $(\lambda_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\lambda))$ kofinalan u λ takav da je niz $(\kappa^{\lambda_\xi} : \xi < \mathrm{cf}(\lambda))$ strogo rastući i kofinalan u $\kappa^{<\lambda}$. Tada vrijedi i $\mathrm{cf}(\kappa^{<\lambda}) = \mathrm{cf}(\lambda)$.*

Dokaz. Ako je $\lambda = \rho^+$, onda je očito da funkcija kontinuuma za κ postaje konstantna ispod λ nakon ρ. Neka funkcija kontinuuma postaje konstantna ispod λ nakon ρ. Onda je $\kappa^{<\lambda} = \kappa^\rho$. Ako je $\lambda = \aleph_0$, onda je $\kappa \geqslant \aleph_0$ (jer je fukkcija $\omega \ni n \mapsto 2^n$ strogo rastuća), pa imamo $\kappa^{<\lambda} = \kappa$, te je $\mathrm{cf}(\kappa^{<\lambda)} = \mathrm{cf}(\kappa) \geqslant \aleph_0 = \lambda$. Ako je $\lambda > \aleph_0$, onda neka je ρ_0 takav da funkcija kontinuuma za κ postaje konstantna ispod ρ_0. Po teoremu 2.20 dobivamo $\mathrm{cf}(\kappa^{<\lambda}) = \mathrm{cf}(\kappa^{\rho_0}) > \rho_0$ za svaki beskonačni kardinal $\rho \in [\rho_0, \lambda\rangle_{\mathbf{Cn}}$. Prema tome je $\mathrm{cf}(\kappa^{<\lambda}) \geqslant \lambda$.

Ako funkcija kontinuuma za κ ne postaje konstantna ispod λ, onda je λ granični kardinal i za svaki kardinal $\rho < \lambda$ postoji kardinal $\nu \in \langle \rho, \lambda\rangle_{\mathbf{Cn}}$ takav da je $\kappa^\rho < \kappa^\nu$. Neka je $(\lambda'_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\lambda))$ niz kofinalan u λ. Definiramo niz $(\lambda_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\lambda))$ na slijedeći način:

$$\begin{cases} \lambda_0 = \lambda'_0\,, \\ \lambda_{\xi+1} = \min\{\lambda'_\zeta \mid \xi < \zeta < \mathrm{cf}(\lambda) \text{ i } \kappa^{\lambda_\xi} < \kappa^{\lambda'_\xi}\}\,, \\ \lambda_\eta = \min\{\lambda'_\zeta \mid \sup\{\lambda_\xi \mid \xi < \eta\} < \zeta < \mathrm{cf}(\lambda) \text{ i } \sup\{\kappa^{\lambda_\xi} \mid \xi < \eta\} \leqslant \kappa^{\lambda'_\zeta}\} \quad \text{za } \lambda \in \mathbf{Lim}\,. \end{cases}$$

Transfinitnom indukcijom lagano je dokazati da su nizovi $(\lambda_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\lambda))$ i $(\kappa^{\lambda_\xi} : \xi < \mathrm{cf}(\lambda))$ strogo rastući. Iz konstrukcije je također vidljivo da je $(\lambda_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\lambda))$ kofinalan u λ i da je $(\kappa^{\lambda_\xi} : \xi < \mathrm{cf}(\lambda))$ kofinalan u $\kappa^{<\lambda}$, odakle slijedi $\mathrm{cf}(\kappa^{<\lambda}) \leqslant \mathrm{cf}(\lambda)$. Kada bi bilo $\mathrm{cf}(\kappa^{<\lambda}) < \mathrm{cf}(\lambda)$, onda bi postojao podniz duljine manje od $\mathrm{cf}(\lambda)$ strogo rastućeg niza $(\kappa^{\lambda_\xi} : \xi < \mathrm{cf}(\lambda))$, no tada bi mogli konstruirati i podniz jednake duljine od $(\lambda_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\lambda))$ kji bi bio kofinalan u λ, što je u suprotnosti s definicijom kofinalnosti. □

Lema 3.16. *Neka su $\kappa \geqslant 2$, $\lambda \geqslant \aleph_0$ i $\nu > 0$ kardinalni brojevi. Tada je*

$$\left(\kappa^{<\lambda}\right)^{\nu} = \begin{cases} \kappa^{<\lambda} & \textit{ako } 0 < \nu < \mathrm{cf}(\lambda)\,, \\ \kappa^{\lambda} & \textit{ako } \mathrm{cf}(\lambda) \leqslant \nu < \lambda\,, \\ \kappa^{\nu} & \textit{ako } \lambda \leqslant \nu\,. \end{cases}$$

Dokaz. Promatrat ćemo dva slučaja.

1° Funkcija kontinuuma za κ postaje konstantna ispod λ nakon ρ_0 (za neki $\rho_0 < \lambda$).

Ako je $0 < \nu < \mathrm{cf}(\lambda)$, onda neka je $\rho_1 = \max\{\rho_0, \nu\}$. Tada je

$$\left(\kappa^{<\lambda}\right)^{\nu} = \left(\kappa^{\rho_1}\right)^{\nu} = \kappa^{\rho_1} = \kappa^{<\lambda}\,.$$

Ako je $\lambda \leqslant \nu$ imamo $(\kappa^{<\lambda})^{\nu} = (\kappa^{\rho_0})^{\nu} = \kappa^{\nu}$.

Preostali slučaj je nešto složeniji. Kao prvo primijetimo da je λ singularan. Po lemi 2.23 postoji rastući niz kardinala $(\lambda_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\lambda))$ za koji vrijedi $\lambda_0 \geqslant \max\{\rho_0, \mathrm{cf}(\lambda)\}$ i $\lambda = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \lambda_\xi$. Sada je $\kappa^{\rho_0} = \kappa^{\lambda_\xi}$ za svaki $\xi < \mathrm{cf}(\lambda)$. Uočimo još da za $\mathrm{cf}(\lambda) \leqslant \rho_0$ vrijedi $\kappa^{\rho_0} = (\kappa^{\rho_0})^{\mathrm{cf}(\lambda)}$, dok je u suprotnom ($\mathrm{cf}(\lambda) > \rho_0$) $\kappa^{\rho_0} = \kappa^{\mathrm{cf}(\lambda)}$, pa je također $\kappa^{\rho_0} = (\kappa^{\rho_0})^{\mathrm{cf}(\lambda)}$. Sada imamo

$$\kappa^{<\lambda} = \kappa^{\rho_0} = \left(\kappa^{\rho_0}\right)^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa^{\rho_0} = \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa^{\lambda_\xi} = \kappa^{\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \lambda_\xi} = \kappa^{\lambda}\,,$$

odakle je

$$\left(\kappa^{<\lambda}\right)^{\nu} = \left(\kappa^{\lambda}\right)^{\nu} = \kappa^{\lambda}\,.$$

2° Funkcija kontinuuma za κ ne postaje konstantna ispod λ.

Po lemi 3.15 postoji strogo rastući niz $(\lambda_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\lambda))$ takav da je niz $(\kappa^{\lambda_\xi} : \xi < \mathrm{cf}(\lambda))$ strogo rastući i kofinalan u $\kappa^{<\lambda}$. Uočimo da je $\mathrm{cf}(\kappa^{<\lambda}) \leqslant \kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^{\lambda_\xi} \mid \xi < \mathrm{cf}(\lambda)\}$, a kako je niz $(\kappa^{\lambda_\xi} : \xi < \mathrm{cf}(\lambda))$ injektivan iz leme 2.13 slijedi $\kappa^{<\lambda} = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa^{\lambda_\xi}$.

Ako je $\nu \leqslant \mathrm{cf}(\lambda) = \mathrm{cf}(\kappa^{<\lambda})$ bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $\nu \leqslant \lambda_0$. Tada po 3. zlatnom pravilu imamo

$$\left(\kappa^{<\lambda}\right)^{\nu} = \kappa^{<\lambda} \cdot \sup\{\mu^{\nu} \mid \mu \in \kappa^{<\lambda} \cap \mathbf{Cn}\}\,.$$

Kako za svaki kardinal $\mu \in \kappa^{<\lambda}$ postoji ordinal $\xi < \mathrm{cf}(\lambda)$ takav da je $\mu \leqslant \kappa^{\lambda_\xi}$, pa je i $\mu^{\nu} \leqslant (\kappa^{\lambda_\xi})^{\nu} = \kappa^{\lambda_\xi}$, odakle imamo

$$\sup\{\mu^{\nu} \mid \mu \in \kappa^{<\lambda} \cap \mathbf{Cn}\} = \sup\{\kappa^{\lambda_\xi} \mid \mu \in \kappa^{<\lambda} \cap \mathbf{Cn}\} = \kappa^{<\lambda}\,.$$

Dakle, $(\kappa^{<\lambda})^{\nu} \leqslant \kappa^{<\lambda}$, pa mora biti $(\kappa^{<\lambda})^{\nu} = \kappa^{<\lambda}$.

U oba preostala slučaja je $\nu \geqslant \mathrm{cf}(\lambda)$, a prema tome imamo

$$\left(\kappa^{<\lambda}\right)^{\nu} = \left(\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa^{\lambda_\xi}\right)^{\nu} \overset{\text{kor.2.19}}{=} \left(\prod_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa^{\lambda_\xi}\right)^{\nu} = \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \kappa^{\lambda_\xi \cdot \nu} = \kappa^{\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \lambda_\xi \cdot \nu}\,.$$

Pogledajmo sada koje su moguće vrijednosti za $\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \lambda_\xi \cdot \nu$. Ako je $\mathrm{cf}(\lambda) \leqslant \nu < \lambda$, onda zbog singularnosti kardinala λ i leme 2.23 bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\lambda_0 \geqslant \nu$, pa je $\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \lambda_\xi \cdot \nu = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \lambda_\xi = \lambda$. Ako je $\lambda \leqslant \nu$, onda je $\sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \lambda_\xi \cdot \nu = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\lambda)} \nu = \mathrm{cf}(\lambda) \cdot \nu = \nu$.

□

Lema 3.17. *Neka su $\kappa \geqslant 2$ i $\lambda \geqslant \aleph_0$ kardinali. Ako vrijedi* (GCH), *onda je*

$$\kappa^{<\lambda} = \begin{cases} \kappa & \textit{ako } \lambda \leqslant \mathrm{cf}(\kappa)\,, \\ \kappa^+ & \textit{ako } \mathrm{cf}(\kappa) < \lambda \leqslant \kappa^+\,, \\ \lambda & \textit{ako } \kappa^+ < \lambda\,. \end{cases}$$

Dokaz. Ako je κ konačan, onda je $\kappa < \lambda$ (i $\kappa^+ < \lambda$), pa po teoremu 2.24 imamo

$$\begin{aligned} \kappa^{<\lambda} &= \sup\{\kappa^\rho \mid \rho \in \lambda \cap \mathbf{Cn}\} = \\ &= \sup\{2^\rho \mid \rho \in \lambda \cap \mathbf{Cn}\} = \text{(GCH)} \\ &= \sup\{\rho^+ \mid \rho \in \lambda \cap \mathbf{Cn}\} = \\ &= \lambda\,. \end{aligned}$$

Neka je $\kappa \geqslant \aleph_0$. Sada možemo iskoristiti korolar 3.11. Ako $\lambda \leqslant \mathrm{cf}(\kappa)$, onda

$$\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^\rho \mid \rho \in \lambda \cap \mathbf{Cn}\} = \sup\{\kappa\} = \kappa\,.$$

Ako je $\mathrm{cf}(\kappa) < \lambda \leqslant \kappa^+$, onda

$$\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^\rho \mid \rho \in \lambda \cap \mathbf{Cn}\} = \sup\{\kappa^+\} = \kappa^+\,.$$

Ako je $\kappa^+ < \lambda$, onda

$$\begin{aligned} \kappa^{<\lambda} &= \sup\{\kappa^\rho \mid \rho \in \lambda \cap \mathbf{Cn}\} = \\ &= \sup\{\kappa^\rho \mid \rho \in [\kappa^+, \lambda\rangle_{\mathbf{Cn}}\} = \\ &= \sup\{\rho^+ \mid \rho \in [\kappa^+, \lambda\rangle_{\mathbf{Cn}}\} = \\ &= \lambda\,. \end{aligned}$$

□

Teorem 3.18 (Bukovsky, Hechler). *Neka je λ singularan kardinal. Ako funkcija kontinuuma za κ postaje konstantna ispod λ nakon ρ_0, onda vrijedi $\kappa^\lambda = \kappa^{<\lambda} = \kappa^{\rho_0}$.*

Dokaz. Neka je $\rho_1 = \max\{\mathrm{cf}(\lambda), \rho_0\}$. Tada je $\kappa^{<\lambda} = \kappa^{\rho_0} = \kappa^{\rho_1}$, dok po lemi 3.16 imamo

$$\kappa^\lambda = \left(\kappa^{<\lambda}\right)^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \left(\kappa^{\rho_1}\right)^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \kappa^{\rho_1} = \kappa^{\rho_0}\,.$$

□

Bukovsky - Hechlerov teorem nam govori da, za razliku od regularnih, funkcija kontinuuma u singularnim argumentima može ovisiti o vrijednostima u manjim argumentima.

Slijedeća dva teorema govore nam kako izgleda potenciranje kardinala u aksiomatskom sustavu ZFC + (SCH).

Teorem 3.19. *Neka je κ singularan kardinal i neka vrijedi* (SCH). *Tada je*

$$2^\kappa = \begin{cases} 2^{<\kappa} & \textit{ako funkcija kontinuuma postaje konstantna ispod } \kappa, \\ (2^{<\kappa})^+ & \textit{inače.} \end{cases}$$

Dokaz. Ako funkcija kontinuuma postaje konstantna ispod κ, onda po Bukovsky - Hechlerovom teoremu vrijedi $2^\kappa = 2^{<\kappa}$.

Neka funkcija kontinuuma ne postaje konstantna ispod κ. Po lemi 3.15 $\mathrm{cf}(2^{<\kappa}) = \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$, pa po pretpostavci da funkcija kontinuumane postaje konstantna ispod κ imamo $2^{\mathrm{cf}(2^{<\kappa})} = 2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < 2^{<\kappa}$. Koristeći 4. zlatno pravilo dobivamo

$$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(2^{<\kappa})} \overset{\text{(SCH)}}{=} (2^{<\kappa})^+ \;.$$

□

Teorem 3.20. *Neka su κ i λ beskonačni kardinali. Ako vrijedi* (SCH)*, onda je*

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa & \textit{ako } 2^\lambda < \kappa \textit{ i } \lambda < \mathrm{cf}(\kappa)\,, \\ \kappa^+ & \textit{ako } 2^\lambda < \kappa \textit{ i } \lambda \geqslant \mathrm{cf}(\kappa)\,, \\ 2^\lambda & \textit{ako } \kappa \leqslant 2^\lambda\,. \end{cases}$$

Dokaz. Slučaj $\kappa \leqslant 2^\lambda$ je jednostavan jer (kako je λ beskonačan) vrijedi

$$2^\lambda \leqslant \kappa^\lambda \leqslant \left(2^\lambda\right)^\lambda \leqslant 2^\lambda\,.$$

U nastavku dokaza neka je $2^\lambda < \kappa$. Tada je i $\lambda < \kappa$, jer bi u suprotnom bilo $\kappa^\lambda = 2^\lambda < \kappa$. Ostatak dokaza provodimo transfinitnom indukcijom po κ (uz fiksni λ).

$\boxed{\kappa = \aleph_0}$ $\aleph_0^\lambda = \aleph_0$, (jer je λ konačan), te vrijedi $\lambda < \aleph_0 = \mathrm{cf}(\aleph_0) = \aleph_0$.

Neka je $\kappa > \aleph_0$ takav da za sve $\nu \in [\aleph_0, \kappa\rangle_{\mathbf{Cn}}$ za koje vrijedi $2^\lambda < \nu$ vrijedi i

$$\nu^\lambda = \begin{cases} \nu & \text{ako } \lambda < \mathrm{cf}(\nu)\,, \\ \nu^+ & \text{ako } \lambda \geqslant \mathrm{cf}(\nu)\,. \end{cases}$$

$\boxed{\kappa = \nu^+}$ Tada je $2^\lambda \leqslant \nu$. Ako je $2^\lambda < \nu$, onda je po pretpostavci indukcije $\nu^\lambda \in \{\nu, \nu^+\}$. Ako je $2^\lambda = \nu$ onda je $\nu^\lambda = (2^\lambda)^\lambda = 2^\lambda = \kappa$. Dakle, u svakom slučaju vrijedi $\nu^\lambda \leqslant \kappa = \nu^+$. Iskoristimo Hausdorffovu formulu i imamo

$$\kappa^\lambda = \left(\nu^+\right)^\lambda = \nu^\lambda \cdot \nu^+ = \nu^+ = \kappa\,.$$

Sjetimo se da za kardinal sljedbenik vrijedi $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$, stoga je relacija $\kappa^\lambda = \kappa$ upravo ono što smo trebali dokazati.

$\boxed{\kappa \in \mathbf{Lim}}$ Za $\nu < \kappa$ po pretpostavci indukcije imamo $\nu^\lambda \in \{\nu, \nu^+, 2^\lambda\}$, posebno $\nu^\lambda < \kappa$, odnosno κ je λ-jak. Po lemi 3.8 imamo slijedeća dva slučaja:

- ako je $\mathrm{cf}(\kappa) > \lambda$, onda je $\kappa^\lambda = \kappa$,
- ako je $\mathrm{cf}(\kappa) \leqslant \lambda$, onda je $\kappa^\lambda = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$, a kako je $2^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant 2^\lambda < \kappa$ uz pomoć (SCH) dobivamo $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+$.

$\square$

Dakle, ako vrijedi (SCH), onda funkcija kontinuuma u argumentu κ ovisi (na relativno jednostavan način) o vrijednostima funkcije kontinuuma u argumentima manjim od κ. Također ako su nam poznate vrijednosti funkcije kontinuuma, onda znamo i vrijednosti funkcije kontinuuma za κ.

U slijedećoj propoziciji kojom završavamo izlaganje pogledat ćemo što možemo reći o vezi funkcije kontinuuma i gimel funkcije osim trivijalne ocjene

$$\gimel(\kappa) = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant \kappa^\kappa = 2^\kappa .$$

Propozicija 3.21. *Neka je κ beskonačan kardinal. Tada vrijedi:*

(*a*) *Ako je κ regularan, onda je $2^\kappa = \gimel(\kappa)$.*

(*b*) *Ako je κ singularan i funkcija kontinuuma postaje konstantna ispod κ, onda je $2^\kappa = 2^{<\kappa}$.*

(*c*) *Ako je κ singularan i funkcija kontinuuma ne postaje konstantna ispod κ, onda je $2^\kappa = \gimel(2^{<\kappa})$.*

Dokaz. (a) $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$, pa je $2^\kappa = 2^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leqslant \kappa^\kappa = 2^\kappa$.

(b) Slijedi iz Bukovsky - Hechlerovog teorema.

(c) Po lemi 3.15 $\mathrm{cf}(\kappa) = \mathrm{cf}(2^{<\kappa})$, pa iz 4. zlatnog pravila dobivamo

$$\gimel\left(2^{<\kappa}\right) = \left(2^{<\kappa}\right)^{\mathrm{cf}(2^{<\kappa})} = \left(2^{<\kappa}\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^\kappa .$$

$\square$

Zaključak

Nakon završetka izlaganja u ovom radu postavlja se pitanje – dokle smo u stvari došli? Pokazali smo koliko važnu ulogu kofinalnost ima prilikom određivanja vrijednosti potenciranja kardinala, te smo dokazali Jechov teorem koji nam opisuje moguće vrijednosti prilikom potenciranja kardinala. Naveli smo koja točno ograničenja ZFC postavlja na funkciju kontinuuma u regularnim argumentima, te smo dokazali Bukovky-Hechlerov teorem iz kojeg vidimo da na funkciju kontinuuma u singularnim kardinalima ipak postoje još neka ograničenja. Također smo pokazali važnost hipoteze singularnih kardinala uz koju se mogu dobiti prilično jaki rezultati bez potrebe da se pretpostavlja jača tvrdnja – generalizirana hipoteza kontinuuma.

Nadam se da ovaj rad može poslužiti kao dobar uvod u kardinalnu aritmetiku i motivacija za dalje promatranje modernijih područja kao što su Shelahova pcf-teorija[1] ili teorija velikih kardinala.

Cilj pcf-teorije je opisivanje potencija singularnih kardinala. Jedan od najpoznatijih rezultata pcf-teorije je činjenica da je broj prebrojivih podskupova od $\aleph_\omega$ potrebnih da se prekriju svi prebrojivi podskupovi od $\aleph_\omega$ ograničen s $\aleph_{\omega_4}$. U samoj izgradnji pcf-teorije značajnu ulogu imaju i ultraprodukti pomoću kojih se definiraju skupovi mogućih kofinalnosti.

Predmet proučavanja teorije velikih kardinala su u prvom redu nedostiživi kardinali. Jedan od problema koji se postavlja je pitanje postoji li kardinal na kojem se može definirati netrivijalna mjera. Pokazuje se da ako takav kardinal postoji on mora biti nedostiživ.

Više o pcf-teoriji može se naći u [3], dok se dodatna literatura i informacije vezane za teoriju velikih kardinala mogu naći u [4].

[1] pcf je skraćenica za *possible cofinalities* tj. moguće kofinalnosti.

Bibliografija

[1] Keith J. Devlin: *Fundamentals of Contemporary Set Theory*, Springer, New York 1979.

[2] F. R. Drake, D. Singh: *Intermediate Set Theory*, John Wiley & Sons, Chichester 1996.

[3] M. Holz, K. Steffens, E. Weitz: *Introduction to Cardinal Arithmetic*, Birkhäuser, Basel 1999.

[4] Karel Hrbacek, Thomas Jech: *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker, New York, 1999.

[5] Menachem Kojman: *PCF Theory*, `http://at.yorku.ca/t/a/i/c/44.htm`, Topology Atlas Invited Contributions vol. 6 issue 1 (2001.) str. 74-77.

[6] Pavle Papić: *Uvod u teoriju skupova*, HMD, Zagreb 2000.

[7] Mladen Vuković: *Matematička logika 1*, PMF - Matematički odjel, Zagreb 2004.