

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Drugi kolokvij – 19. lipnja 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru. Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje i geometrijskog pribora.

Zadatak 1 Za realan parametar λ zadani su pravci

$$p_\lambda : \frac{x}{1} = \frac{y}{\lambda} = \frac{z}{1}, \quad q_\lambda : \frac{x-1}{\lambda} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

Odredite za koje vrijednosti parametra λ se pravci p_λ i q_λ sijeku, za koje su paralelni, a za koje su mimoilazni. Za vrijednost parametra λ za koju su pravci paralelni odredite ravninu koja ih sadrži. *Rješenje.*

□

Zadatak 2 Zadani su pravac i ravnina

$$p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0}, \quad \pi: x + 2y + 2z = 6.$$

- a) Odredite ortogonalnu projekciju točke $A = (1, 1, 0)$ na ravninu π .
- b) Odredite ortogonalnu projekciju pravca p na ravninu π .
- c) Odredite kut između pravca p i ravnine π .

Rješenje.

□

Zadatak 3 Neka su F i G fokusi hiperbole $\mathcal{H}$ te neka su P i Q dvije točke na istoj grani hiperbole $\mathcal{H}$ ali na različitim stranama optičke (realne) osi FG . Ako je četverokut $FQGP$ konveksan dokažite da je i tangencijalan.

Rješenje.

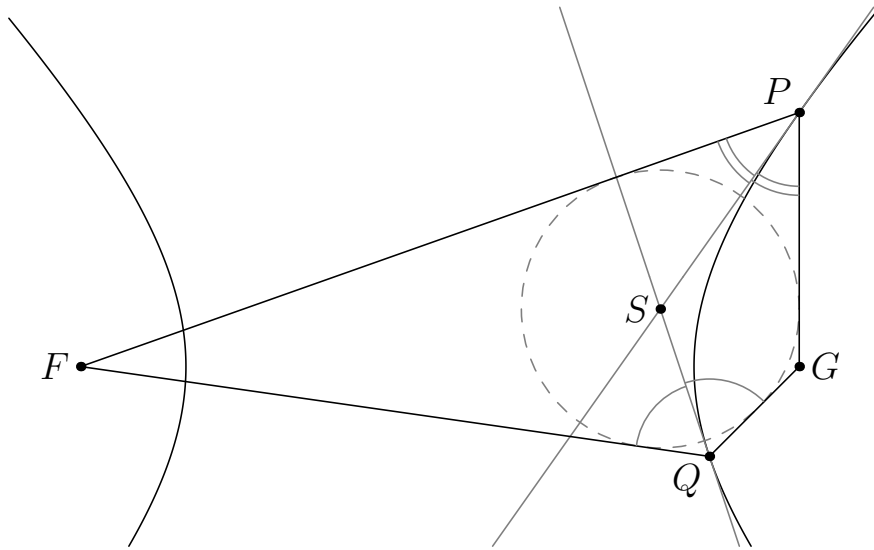
Budući da P i Q leže na istoj grani hiperbole možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $|PF| > |PG|$ i $|QF| > |QG|$ te po geometrijskoj definiciji hiperbole zadovoljavaju sljedeću jednakost:

$$|PF| - |PG| = 2a = |QF| - |QG|.$$

Iz prethodne jednakosti dobivamo

$$|PF| + |QG| = |QF| + |PG|,$$

što nam po obratu teorema o tangencijalnom četverokutu daje tangencijalnost konveksnog četverokuta $FQGP$.



Napomena: Po optičkom svojstvu hiperbole znamo da su tangente na hiperbolu $\mathcal{H}$ u točkama P i Q redom simetrale kuteva $\angle FPG$ i $\angle GQF$, stoga je središte upisane kružnice S tangencijalnog četverokuta $FQGP$ upravo presjek tangenti na hiperbolu u točkama P i Q .

□

Zadatak 4 Neka je elipsa $\mathcal{E}$ dana sa jednadžbom

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1,$$

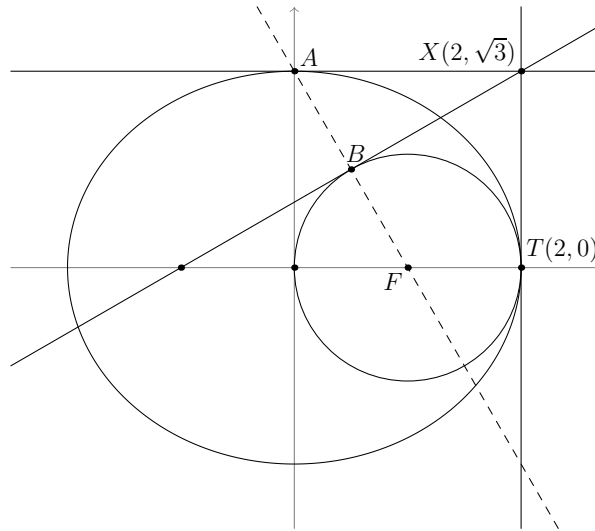
te neka je $\mathcal{C}$ kružnica sa središtem u *desnom* fokusu F koja dira elipsu iznutra u točki $T = (2, 0)$. Neka je točka $X = (2, \sqrt{3})$ na zajedničkoj tangenti elipse i kružnice u točki T . Druga tangenta iz točke X na elipsu $\mathcal{E}$ dira elipsu u točki A a druga tangenta iz X na kružnicu $\mathcal{C}$ dira kružnicu u točki B . Dokažite da su točke A , B i F kolinearne.

Rješenje.

Iz zapisa elipse $\mathcal{E}$ možemo iščitati da je $a = 2$ i $b = \sqrt{3}$. Kako je linearni ekscentricitet dan sa $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ to je $e = 1$, odakle zaključujemo da su koordinate desnog fokusa $F = (1, 0)$. Nadalje kako kružnica $\mathcal{C}$ dira elipsu $\mathcal{E}$ u točki $T = (2, 0)$ to je radijus kružnice $\mathcal{C}$ upravo $r = 1$. Dakle jednadžba kružnice je

$$\mathcal{C} \dots (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Uočimo da je tangenta na elipsu u točki $(0, \sqrt{3})$ upravo pravac $y = \sqrt{3}$ na kojoj leži i točka $X = (2, \sqrt{3})$, odakle zaključujemo da je $A = (0, \sqrt{3})$.



Odredimo sada koordinate točke B . Neka je $y = kx + l$ jednadžba druge tangente (nije pravac $\{x = 2\}$) koja prolazi kroz točku X , tada vrijedi

$$\sqrt{3} = 2k + l \implies l = \sqrt{3} - 2k. \quad (1)$$

Iz uvjeta dodira pravca i kružnice dobivamo jednakost

$$k^2 + 1 = (k + l)^2, \quad (2)$$

pritom smo iskoristili formulu uvjeta dodira za $r = 1, p = 1$ i $q = 0$. uvrštavanjem. Rješavanjem sustava danog s jednadžbama (1) i (2) dobivamo $k = l = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Neka je $B = (x_0, y_0)$ diralište pravca $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$ sa kružnicom $\mathcal{C}$. Tada koordinate točke B zadovoljavaju jednadžbu kružnice i pravca, rješavanjem tog sustava dobivamo da je $B = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Konačno, uočimo da je $B = \frac{1}{2}(A + F)$ odakle slijedi da je B polovište dužine $\overline{AF}$, a posebno imamo da su A, B i F kolinearne.

□

Alternativno rješenje:

Kao i u prethodnom rješenju zaključujemo da je $A = (0, \sqrt{3})$, ako sa O označimo ishodište tada primjenom pitagorinog teorema na pravokutne trokute $\triangle AOF$ i $\triangle FTX$ dobivamo sljedeću jednakost

$$|AF| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 = |FX|.$$

Budući da je i $|AX| = 2$ imamo da je trokut $\triangle AFX$ jednakostraničan.

Neka je B' nožište okomice iz točke X na stranicu $\overline{AF}$. Kako je $\triangle AFX$ jednakostraničan to je B' ujedno i polovište stranice $|AF|$, odakle slijedi

$$|B'F| = \frac{1}{2}|AF| = 1.$$

Dakle B' leži na kružnici $\mathcal{C}$, radijusa 1, sa središtem u fokusu F .

Budući da je pravac XB' , po definiciji točke B' , okomit na radijus FB' imamo da je pravac XB' i tangenta na kružnicu $\mathcal{C}$ to jest da je $B \equiv B'$.

□

Zadatak 5

- a) Odredite neku racionalnu parametrizaciju konike

$$C : x^2 + x = y^2 + 2y.$$

- b) Odredite sve parove prirodnih brojeva (a, b) za koje postoji polinom $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ stupnja 2 takav da je

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} = \{(t^a, t^b) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$