

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Prvi ispit – 19. lipnja 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru. Vrijeme rješavanja je 120 minuta.
Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje i geometrijskog pribora.

Zadatak 1 Neka je D presjek simetrale kuta $\angle BCA$ i stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC . Opisana kružnica trokuta ADC siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki Q . Neka je R točka na AQ , različita od A , takva da je $|AB| = |BR|$, dokaži da središte opisane kružnice trokuta ABR leži na opisanoj kružnici trokuta ABC . *Rješenje.* Kako je CD simetrala kuta $\angle ACB$ to je

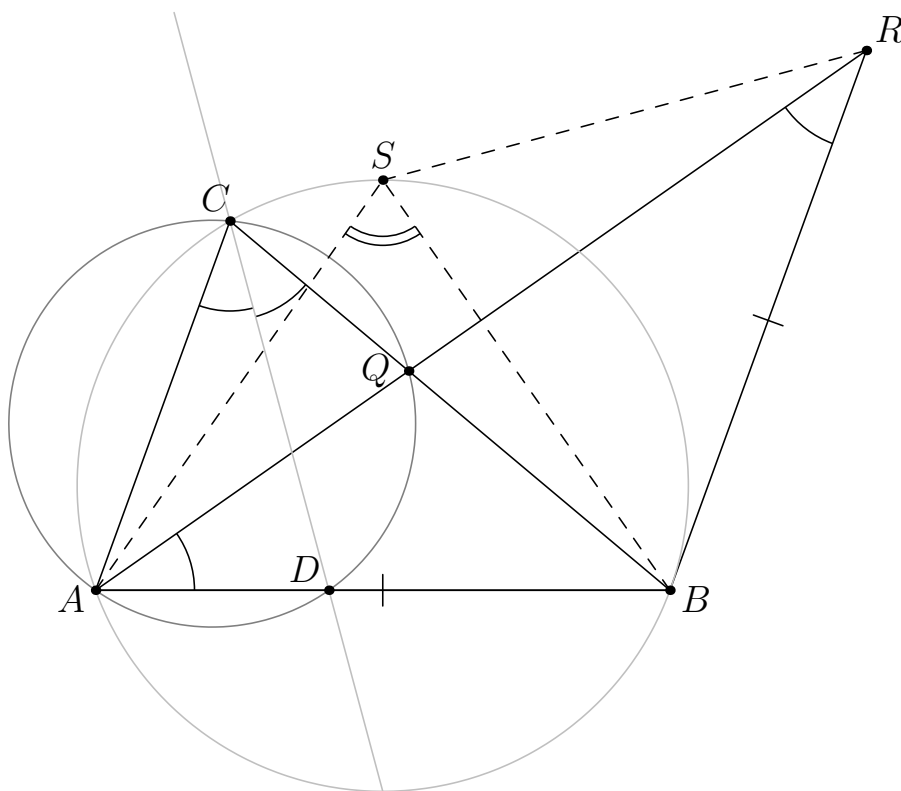
$$|\angle DCB| = |\angle ACD| = \gamma/2,$$

gdje je γ mjera kuta pri vrhu C . Budući da je četverokut $ADQC$ tetivan imamo da je

$$|\angle DAQ| = |\angle DCQ| = |\angle DCB| = \gamma/2.$$

Nadalje iz jednakosti stranica $|AB| = |BR|$ u jednakokrakom trokutu ABR dobivamo jednakost kuteva

$$|\angle ARB| = |\angle BAR| = |\angle DAQ| = \gamma/2.$$



Po teoremu o središnjem i obodnom kutu imamo da je

$$|\angle ASB| = 2 \cdot |\angle ARB| = 2 \cdot \gamma/2 = \gamma.$$

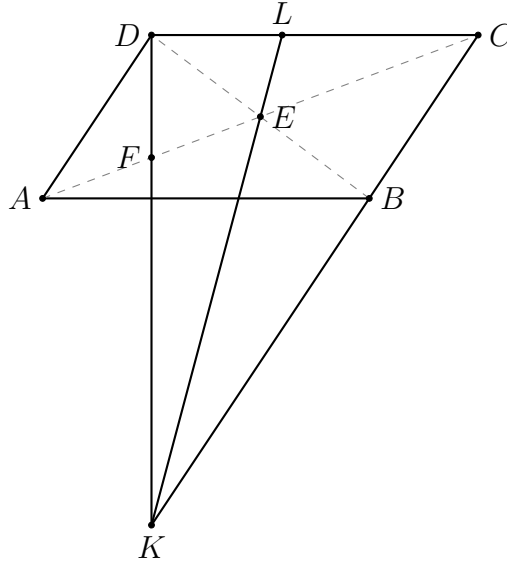
Dokazali smo da je $|\angle ASB| = |\angle ACB|$, odakle zaključujemo da je četverokut $ABSC$ tetivan, to jest da točka S leži na kružnici opisanoj trokutu ABC .

Zadatak 2 Neka je $ABCD$ paralelogram i E sjecište dijagonala paralelograma, a točka F polovište dužine $\overline{AE}$. Definirajmo točku K kao presjek pravaca DF i BC , a točku L kao presjek pravaca EK i CD .

a) Izrazite vektore $\overrightarrow{AK}$ i $\overrightarrow{AL}$ pomoću vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$.

b) Odredite omjer $|DL| : |LC|$.

Rješenje. Označimo $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Tada je $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$, pa vrijedi $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$ i $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v})$.



Budući da je $K \in BC$, postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{AK} = \vec{u} + \alpha\vec{v}$. S druge strane, $K \in DF$, pa za neki $\beta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \beta\overrightarrow{DF} = \vec{v} + \beta\left(\frac{1}{4}\vec{u} - \frac{3}{4}\vec{v}\right) = \frac{\beta}{4}\vec{u} + \left(1 - \frac{3\beta}{4}\right)\vec{v}.$$

Usporedbom koeficijenata u jednakosti $\vec{u} + \alpha\vec{v} = \frac{\beta}{4}\vec{u} + \left(1 - \frac{3\beta}{4}\right)\vec{v}$ dobivamo $\beta = 4$ i $\alpha = -2$. Dakle,

$$\overrightarrow{AK} = \vec{u} - 2\vec{v}.$$

Sada računamo $\overrightarrow{AL}$. Budući da je $L \in CD$, postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\overrightarrow{AL} = \vec{v} + \lambda\vec{u}$. Također je $L \in EK$, pa za neki $\mu \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AK} + \mu\overrightarrow{KE}.$$

Kako je $\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{u} - 2\vec{v}) = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{5}{2}\vec{v}$, dobivamo

$$\vec{v} + \lambda\vec{u} = \vec{u} - 2\vec{v} + \mu\left(-\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{5}{2}\vec{v}\right) = \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)\vec{u} + \left(-2 + \frac{5\mu}{2}\right)\vec{v}.$$

Usporedbom koeficijenata slijedi $1 = -2 + \frac{5\mu}{2}$, pa je $\mu = \frac{6}{5}$. Zato je $\lambda = 1 - \frac{\mu}{2} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

Prema tome,

$$\overrightarrow{AL} = \frac{2}{5}\vec{u} + \vec{v}$$

i zato je $\overrightarrow{DL} = \frac{2}{5}\vec{u} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DC}$. Slijedi $|DL| = \frac{2}{5}|DC|$ i $|LC| = \frac{3}{5}|DC|$, pa je

$$\boxed{|DL| : |LC| = 2 : 3}.$$

Zadatak 3 Zadani su pravac i ravnina

$$p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0}, \quad \pi: x + 2y + 2z = 6.$$

- Odredite ortogonalnu projekciju točke $A = (1, 1, 0)$ na ravninu π .
- Odredite ortogonalnu projekciju pravca p na ravninu π .
- Odredite kut između pravca p i ravnine π .

Zadatak 4 Neka su F i G fokusi hiperbole $\mathcal{H}$ te neka su P i Q dvije točke na istoj grani hiperbole $\mathcal{H}$ ali na različitim stranama optičke (realne) osi FG takve da je četverokut $FQGP$ konveksan.

- Dokažite da je četverokut $FQGP$ tangencijalan;
- Odredite središte upisane kružnice tangencijalnog četverokuta $FQGP$ u slučaju da je $\mathcal{H}$ hiperbola dana sa jednadžbom

$$x^2 - y^2 = 2,$$

i koordinate točaka na hiperboli su $P = (2, \sqrt{2})$ i $Q = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.

Rješenje.

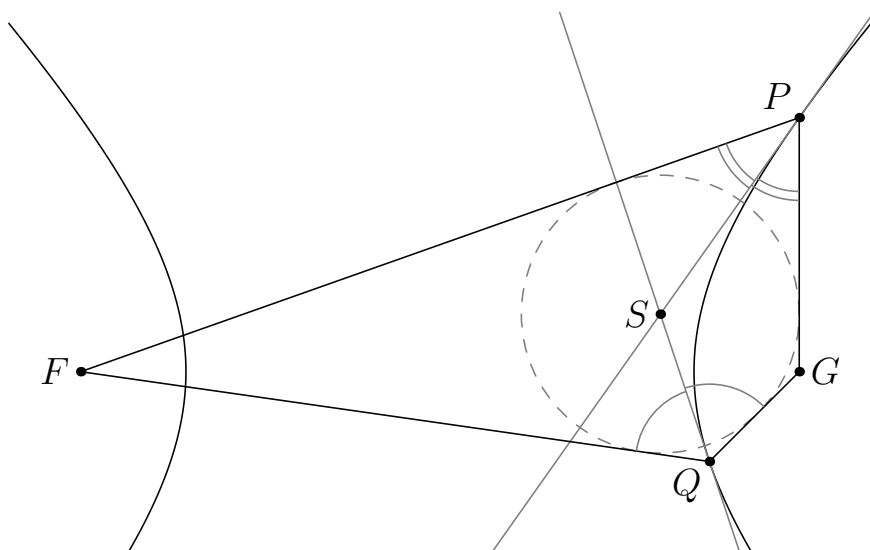
- Budući da P i Q leže na istoj grani hiperbole možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $|PF| > |PG|$ i $|QF| > |QG|$ te po geometrijskoj definiciji hiperbole zadovoljavaju sljedeću jednakost:

$$|PF| - |PG| = 2a = |QF| - |QG|.$$

Iz prethodne jednakosti dobivamo

$$|PF| + |QG| = |QF| + |PG|,$$

što nam po obratu teorema o tangencijalnom četverokutu uvjet daje tangencijalnost konveksnog četverokuta $FQGP$.



- b) Uočimo da su, po optičkom svojstvu hiperbole, tangente na hiperbolu $\mathcal{H}$ u točkama P i Q redom simetrale kuteva $\angle FPG$ i $\angle GQF$, stoga je središte upisane kružnice S tangencijalnog četverokuta $FQGP$ upravo presjek tangenti na hiperbolu u točkama P i Q .

Hiperbola $\mathcal{H}$ je dana sa jednadžbom $x^2 - y^2 = 2$ te je stoga jednadžba tangente t_P na hiperbolu $\mathcal{H}$ u točki $P = (2, \sqrt{2})$ dana sa

$$2x - \sqrt{2}y = 2,$$

sasvim analogno je jednadžba tangente t_Q na hiperbolu $\mathcal{H}$ u točki $P = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ dana sa

$$\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = 2.$$

Kako je $\{S\} = t_P \cap t_Q$ rješavanjem sustava jednadžbi danim s jednadžbama tangenti t_P i t_Q dobivamo da su koordinate središta upisane kružnice tangencijalnog četverokuta $FQGP$

$$S = \left(\frac{\sqrt{2} + 4}{\sqrt{2} + 3}, \frac{2}{3\sqrt{2} + 2} \right).$$

□

Zadatak 5

- a) Odredite neku racionalnu parametrizaciju konike

$$C : x^2 + x = y^2 + 2y.$$

- b) Odredite sve parove prirodnih brojeva (a, b) za koje postoji polinom $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ stupnja 2 takav da je

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} = \{(t^a, t^b) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Rješenje. (a) Koristimo standardnu metodu s vježbi, gdje prvo izaberemo neku točku, i onda povlačenjem pravaca kroz nju dolazimo do parametrizacije.

Točka P_0	Pravac kroz P_0	Racionalna parametrizacija $(x(t), y(t))$
$P_1(0, 0)$	$y = tx$	$x = \frac{2t - 1}{1 - t^2}, \quad y = \frac{2t^2 - t}{1 - t^2}$
$P_2(-1, 0)$	$y = t(x + 1)$	$x = \frac{t^2 + 2t}{1 - t^2}, \quad y = \frac{2t^2 + t}{1 - t^2}$
$P_3(0, -2)$	$y + 2 = tx$	$x = \frac{-2t - 1}{1 - t^2}, \quad y = \frac{-t - 2}{1 - t^2}$
$P_4(-1, -2)$	$y + 2 = t(x + 1)$	$x = \frac{t^2 - 2t}{1 - t^2}, \quad y = \frac{t - 2}{1 - t^2}$

Table 1: Racionalne parametrizacije konike $x^2 + x = y^2 + 2y$ kroz cjelobrojne točke

- (b) Pretpostavimo da je par (a, b) rješenje. Iz uvjeta zadatka slijedi

$$f(t^a, t^b) = 0 \text{ za } t \in \mathbb{R}.$$

Ako je

$$f(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \eta,$$

onda dobivamo

$$\alpha t^{2a} + \beta t^{a+b} + \gamma t^{2b} + \delta t^a + \epsilon t^b + \eta = 0 \text{ za } t \in \mathbb{R},$$

pa je taj polinom $f(t^a, t^b)$ u jednoj varijabli nulpolinom (jer ima beskonačno nultočka). Kako je f stupnja dva, neki od α, β, γ nije nula. Stupnjevi pojedinačnih monoma su $2a, a+b, 2b, a, b, 0$. Ako nikoja dva od njih nisu isti, onda je stupanj od $f(t^a, t^b)$ jednak maksimumu od tih brojeva i ne dobivamo nulpolinom. Zaključujemo da neki od tih članova trebaju biti jednaki, pa je $a = b$, $a = 2b$ ili $b = 2a$.

Ako je $a = 2b$, tada je $f(t^{2b}, t^b) = 0$ za svaki t , pa polinom $f(t^2, t)$ također ima beskonačno nultočka, pa je i $f(t^2, t) = 0$. Međutim, za paran b je $\{(t^{2b}, t^b) \mid t \in \mathbb{R}\} \neq \{(t^2, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, pa takvi parovi nisu rješenja. Analogno zaključujemo za parove za koje je $b = 2a$ i a paran, te za parove (a, a) gdje je a paran.

Preostaju parovi $(a, 2a)$, (a, a) i $(2a, a)$ za neparan a . Polinomi $f(x, y) = x^2 - y$, $f(x, y) = x - y^2$ i $f(x, y) = (x - y)^2$ redom imaju tražene skupove nultočka za te parove.