ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Rješenja prvog ispita - 20. lipnja 2025.

Zadatak 1. U trokutu ABC, neka je D točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je AD simetrala kuta $\angle BAC$. Pravac kroz vrh C koji je paralelan sa AD siječe pravac AB u točki E.

(a) Dokažite da je $\triangle ACE$ jednakokračan trokut.

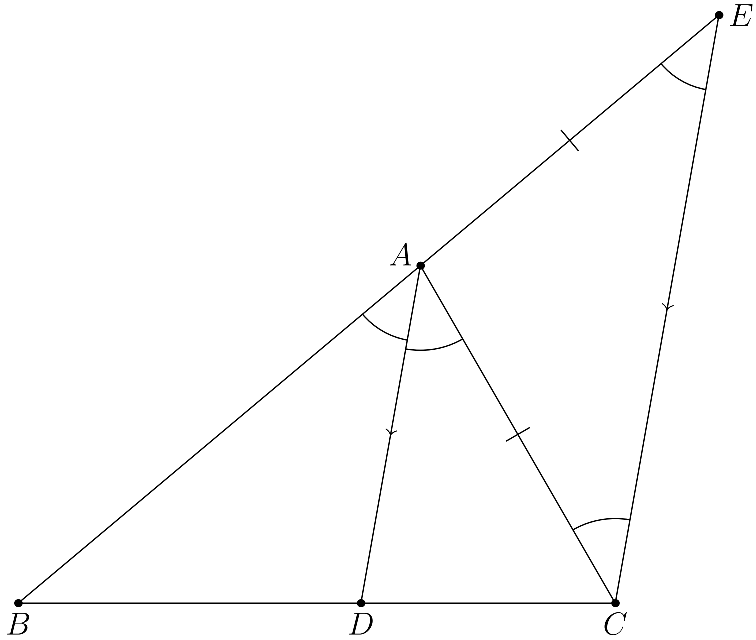
(b) Koristeći $AD \parallel CE$ i prikladne slične trokute, dokažite *Teorem o simetrali kuta* koji tvrdi:

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|CA|}.$$

(c) Neka je I središte upisane kružnice u $\triangle ABC$. Dokažite

$$\frac{|AI|}{|ID|} = \frac{|CA| + |AB|}{|BC|}.$$

Rješenje. (a) Po definiciji pravci AD i CE su paralelni. Iskoristimo prvo da je AE njihova presječnica, pa dobijemo $\angle CEA = \angle DAB = \alpha/2$.



Slično AC je također presječnica i imamo $\angle ACE = \angle CAD = \alpha/2$, gdje je $\alpha := \angle CAB$. To znači da u $\triangle ACE$ imamo $\angle ACE = \angle CEA$, dakle trokut je jednakokračan i vrijedi $|AE| = |AC|$.

(b) Uočimo da su $\triangle BDA \sim \triangle BCE$, to vidimo npr. iz KK poučka o sličnosti (zbog $AB||CE$ vrijedi $\angle BDA = \angle BCE, \angle DAB = \angle CEB$). Tada je

$$\frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|BE|}{|BA|} \implies \frac{|BD| + |DC|}{|BD|} = \frac{|BA| + |AE|}{|BA|} \tag{1}$$

$$\implies 1 + \frac{|DC|}{|BD|} = 1 + \frac{|CA|}{|BA|} \tag{2}$$

$$\implies \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|CA|}. \tag{3}$$

U (2) smo koristili $|AE| = |CA|$ što nam je poznato iz (a) dijela.

(c) Uočimo da je u $\triangle BDA$, točka I sjecište simetrale kuta $\angle ABD$ i stranice $\overline{DA}$. To znači da možemo primijeniti *Teorem o simetrali kuta* u trokutu $\triangle BDA$ što nam daje

$$\frac{|AI|}{|ID|} = \frac{|AB|}{|BD|}. \tag{4}$$

Znamo da vrijedi $|BD|/|DC| = |AB|/|CA|$, ideja je iskoristiti taj omjer da izrazimo $|BD|$ preko duljina stranica od $\triangle ABC$. Imamo

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|CA|} \implies \frac{|DC|}{|BD|} = \frac{|CA|}{|AB|} \implies \frac{|DC|}{|BD|} + 1 = \frac{|CA|}{|AB|} + 1$$

$$\implies \frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|CA| + |AB|}{|AB|} \implies |BD| = \frac{|BC||AB|}{|CA| + |AB|}. \tag{5}$$

Kad taj izraz za $|BD|$ uvrstimo u (4), dobijemo

$$\frac{|AI|}{|ID|} = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AB|}{\frac{|BC||AB|}{|CA|+|AB|}} = \frac{|CA| + |AB|}{|BC|},$$

a to je upravo ono što je trebalo dokazati.

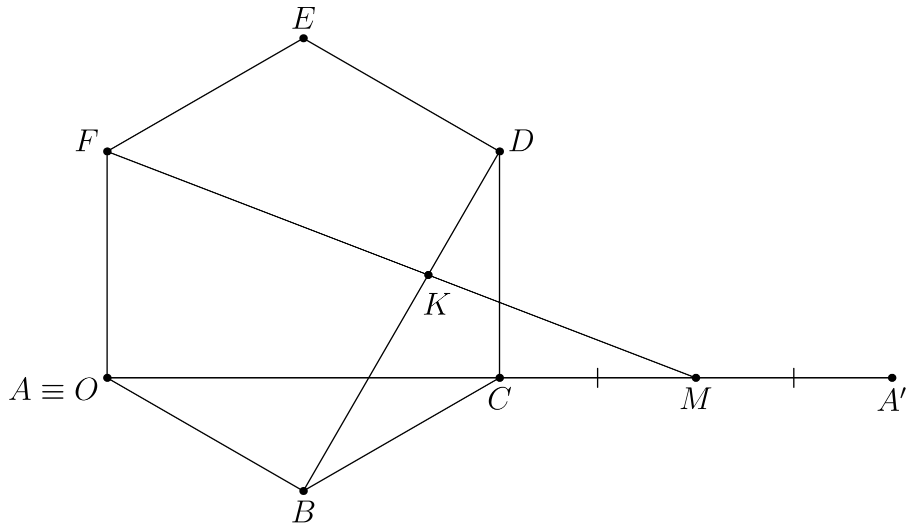
$\square$

Zadatak 2. Dan je pravilni šesterokut $ABCDEF$. Neka je A' točka centralnosimetrična točki A u odnosu na vrh C, a M polovište dužine $\overline{CA'}$. Ako je K sjecište pravaca FM i BD, odredite omjer $|BK| : |KD|$.

Prvo rješenje.
Omjer određujemo koristeći radijvektore sa središtem u vrhu A. Označimo sljedeće bazne vektore:

$$\vec{x} := \overrightarrow{AC}, \quad \text{i} \quad \vec{y} := \overrightarrow{AF}.$$

Pored toga što su vektori $\vec{x}$ i $\vec{y}$ linearno nezavisni, oni su i međusobmno okomiti.



Izrazimo sve radijvektore preko baznih:

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\vec{x}}{2} - \frac{\vec{y}}{2}, \qquad \overrightarrow{AM} = \frac{3\vec{x}}{2}, \qquad \overrightarrow{AD} = \vec{x} + \vec{y}, \qquad \overrightarrow{AE} = \frac{\vec{x}}{2} + \frac{3\vec{y}}{2}.$$

Posebno nas zanimaju $\overrightarrow{BD}$ i $\overrightarrow{FM}$:

$$\overrightarrow{BD} = (\vec{x} + \vec{y}) - \left(\frac{\vec{x}}{2} - \frac{\vec{y}}{2}\right) = \frac{\vec{x}}{2} + \frac{3\vec{y}}{2}, \qquad \overrightarrow{FM} = \frac{3\vec{x}}{2} - \vec{y}$$

Kako je K sjecište pravaca BD i FM to postoje realni brojevi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, takvi da je

$$\overrightarrow{BK} = \lambda \cdot \overrightarrow{BD}, \quad \text{i} \quad \overrightarrow{FK} = \mu \cdot \overrightarrow{FM}.$$

Iz jednakosti $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FK}$ dobivamo sljedeću jednadžbu:

$$\frac{\vec{x}}{2} - \frac{\vec{y}}{2} + \lambda \cdot \left(\frac{\vec{x}}{2} + \frac{3\vec{y}}{2}\right) = \vec{y} + \mu \cdot \left(\frac{3\vec{x}}{2} - \vec{y}\right)$$

$$\iff \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}\right) \cdot \vec{x} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3\lambda}{2}\right) \cdot \vec{y} = \left(\frac{3\mu}{2}\right) \cdot \vec{x} + (1-\mu) \cdot \vec{y}.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz bazne vektore $\vec{x}$ i $\vec{y}$ dobivamo sustav:

$$\begin{cases} \lambda + 1 &= 3\mu, \\ 3\lambda - 1 &= -2\mu + 2. \end{cases}$$

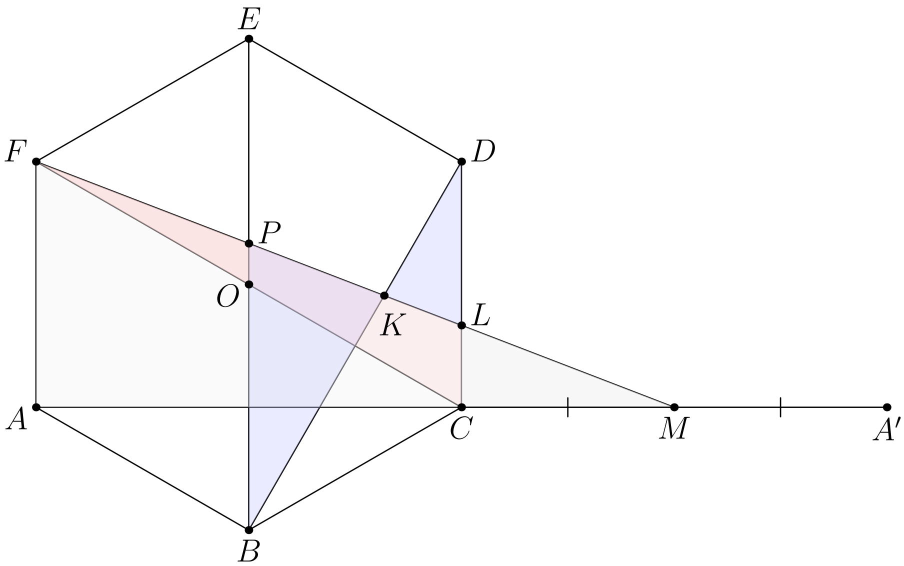
Rješavanjem sustava dobivamo da je $\lambda = \dfrac{7}{11}$, odakle je $|BK| : |KD| = \dfrac{\lambda}{1-\lambda} = \dfrac{7}{4}$. □

Drugo rješenje.

Ideja iza drugog rješenja je nizom sličnosti doći do traženog omjera. Prvu sličnost dobivamo uočavanjem da je glavna dijagonala BE paralelna sa stranicom CD. Ako definiramo točke P i L kao presjeke pravca FM sa BE i CD redom tada imamo prvu sličnost trokuta:

$$\triangle BKP \sim \triangle DKL \implies \frac{|BK|}{|KD|} = \frac{|BP|}{|LD|}. \tag{6}$$

Kako bismo odredili traženi omjer potrebno je odrediti $|BP|$ i $|LD|$.



Označimo sa O središte šesterokuta i sa a duljinu stranice šesterokuta.

Kako su FA i LC paralelni imamo

$$\triangle FAM \sim \triangle LCM \implies \frac{|FA|}{|AM|} = \frac{|LC|}{|CM|} \implies |LC| = \frac{|CM|}{|AM|} \cdot |FA| = \frac{a}{3}. \tag{7}$$

Dakle $|LD| = |CD| - |LC| = \dfrac{2a}{3}$, odredimo sada $|PB|$. Uočimo da O kao središte leži na glavnoj dijagonali BE. Lako vidimo da se P nalazi između O i E. Stoga je $|BP| = |BO| + |OP|$. Sada koristeći paralelnost OP sa LC imamo sličnost:

$$\triangle FOP \sim \triangle FCL \implies \frac{|OP|}{|FO|} = \frac{|LC|}{|FC|} \implies |OP| = \frac{|FO|}{|FC|} \cdot |LC| = \frac{a}{6} \tag{8}$$

No tada je $|BP| = |BO| + |OP| = a + \dfrac{a}{6} = \dfrac{7a}{6}$. Konačno uvrštavajući u jednadžbu (6) dobivamo omjer koji smo tražili:

$$\frac{|BK|}{|KD|} = \frac{|BP|}{|LD|} = \frac{\frac{7a}{6}}{\frac{2a}{3}} = \frac{7}{4}.$$

$\square$

Zadatak 3. Odredite sve realne brojeve λ takve da je pravac

$$p \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y-2\lambda}{3} = \frac{z+\lambda}{\lambda}$$

paralelan s ravninom $\pi \ldots 5x - 2y + (\lambda - 4)z = 7$. Potom odredite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac p i paralelna je s π.

Rješenje. Uočimo da je $\vec{n}_\pi = [5, -2, \lambda - 4]$ jedna normala na ravninu π, a $\vec{s}_p = [2, 3, \lambda]$ je vektor smjera za pravac p. Tada imamo da je $p \parallel \pi \iff \vec{s}_p \perp \vec{n}_\pi \iff \vec{s}_p \cdot \vec{n}_{\pi'} = 0$. Vrijedi $\vec{s}_p \cdot \vec{n}_\pi = 10 - 6 + \lambda(\lambda - 4) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$. Iz $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, odnosno $(\lambda - 2)^2 = 0$, zaključujemo $\boxed{\lambda = 2}$

Sada iz jednadžbe pravca uočimo da je $T := (1, 2\lambda, -\lambda) = (1, 4, -2)$ točka na p. Kada je $\lambda = 2$, normala ravnine π je $\vec{n}_\pi = [5, -2, -2]$. Π je tada ravnina kojoj je $\vec{n}_\pi$ normala i koja sadrži točku T, pa joj je jednadžba

$$\begin{aligned} &5(x-1) - 2(y-4) - 2(z - (-2)) = 0 \\ \iff\ &5x - 2y - 2z = 1. \end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 4. Neka je F fokus parabole, T tjeme parabole i P proizvoljna točka na paraboli, ako se tangente na parabolu u T i P sijeku u točki Q dokažite da je $\angle PQF = 90°$.

Prvo rješenje.

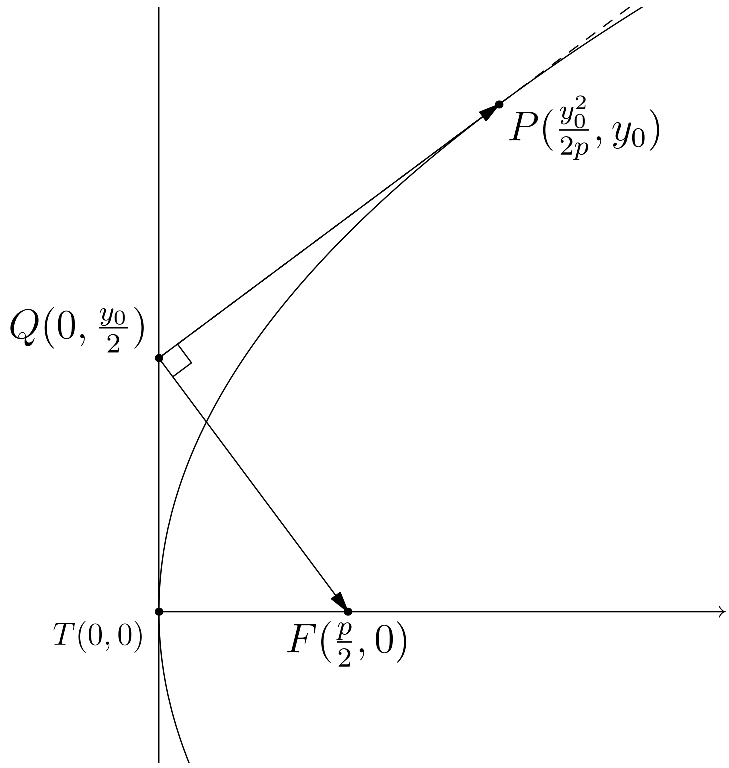
Afinom transformacijom koja je kompozicija translacije i rotacije parabolu možemo svesti u oblik $y^2 = 2px$ za neki $p \in \mathbb{R}$.

Neka je $P = (x_0, y_0)$, kako P leži na paraboli tada koordinate točke P zadovoljavaju jednadžbu

$$y_0^2 = 2px_0 \implies x_0 = \frac{y_0^2}{2p} \implies P = \left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0\right).$$

Jednadžba tangente u točki P je dana s

$$yy_0 = p \cdot (x + x_0). \tag{9}$$



Kako je tjeme parabole $y^2 = 2px$ zapravo ishodište $T = (0,0)$ to je tangenta u tjemenu zapravo y-os, to jest jednadžba tangente u tjemenu je upravo $x = 0$. Dakle točka Q ima koordinatne $(0, y_Q)$. Kako je točka Q presjek tangente u tjemenu i tangente u P ona zadovoljava jednadžbu (9), to jest

$$y_Q y_0 = p \cdot (0 + x_0) \implies y_Q = \frac{px_0}{y_0} = \frac{p \cdot \frac{y_0^2}{2p}}{y_0} = \frac{y_0}{2} \implies Q = \left(0, \frac{y_0}{2}\right).$$

Koordinate fokusa parabole $y^2 = 2px$ su dane s $F = (\frac{p}{2}, 0)$.
Kut $\angle FQP$ će biti pravi kut ako i samo ako je skalarni produkt vektora $\overrightarrow{QP}$ i $\overrightarrow{QF}$ nula.

$$\angle FQP = 90° \iff \overrightarrow{QF} \cdot \overrightarrow{QP} = 0.$$

Stoga računamo:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{QF} &= \left(\frac{p}{2}, -\frac{y_0}{2}\right), \\
\overrightarrow{QP} &= \left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0 - \frac{y_0}{2}\right) = \left(\frac{y_0^2}{2p}, \frac{y_0}{2}\right), \\
\overrightarrow{QF} \cdot \overrightarrow{QP} &= \frac{y_0^2}{2p} \cdot \frac{p}{2} - \frac{y_0^2}{4} = 0.
\end{aligned}$$

Dakle pravci QF i QP su zaista okomiti, to jest $\angle FQP = 90^\circ$. $\square$

Napomena: Alternativni način za dovršiti zadatak računski je pokazat da vrijedi

$$|PF|^2 = |PQ|^2 + |QF|^2,$$

te koristeći obrat *Pitagorinog teorema* dokazati da je $\angle FQP = 90^\circ$.

Drugo rješenje.
Neka je N nožište okomice iz P na direktrisu, po geometrijskoj karakterizaciji parabole vrijedi

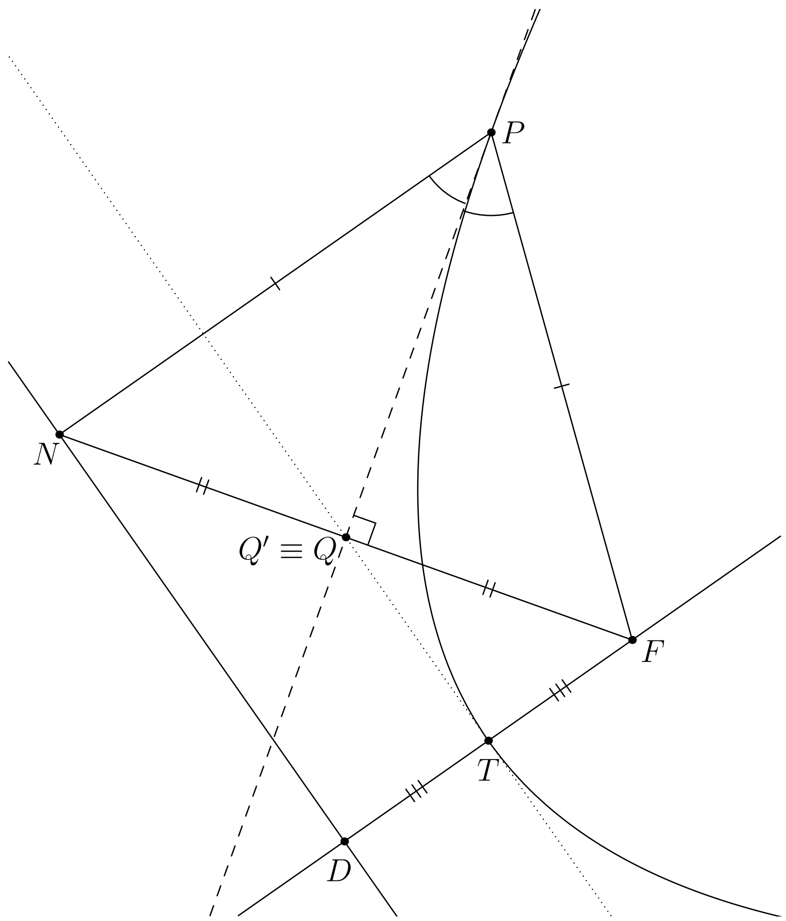
$$|PN| = |PF|. \tag{10}$$

Neka je t tangenta na parabolu u tjemenu T i neka je p tangenta na parabolu u točki P.

Tada je po optičkom svojstvu parabole, p simetrala kuta $\angle FPN$. Kako je po (10) trokut $\triangle FPN$ jednakokračan to je p i simetrala osnovice $\overline{FN}$.

Točka Q nam je definirana kao presjek tangenti p i t, kada bismo dokazali da Q leži na pravcu FN vrijedilo bi da je Q polovište dužine $\overline{FN}$. Odakle iz činjenice da je p simetrala dužine $\overline{FN}$ slijedi da je $\angle FQP = 90^\circ$.

Biramo jednostavniju varijantu problema za dokazati. Definiramo točku Q' kao presjek pravca TN i tangente t, te dokazujemo da Q leži na p, to jest da je $Q \equiv Q'$.



Označimo sa D točku na direktrisi koja leži na optičkoj osi (na pravcu FT). Kako je tjeme T na paraboli imamo jednakost $|TF| = |TD|$, a budući da je tjeme T na optičkoj osi ono je i polovište segmenta $\overline{FD}$.

Tangenta t u tjemenu je paralelna sa direktrisom to jest

$$TQ' \parallel DN.$$

Kako je T polovište to je TQ' srednjica trokuta $\triangle FDN$, odakle vidimo da je Q' polovište segmenta $\overline{FN}$. Ovime smo dokazali da je $Q' \equiv Q$ jer se Q' nalazi na tangenti p koju smo karakterizirali kao simetralu stranice $\overline{FN}$. $\square$

Zadatak 5. Dana je krivulja

$$C : x^2 + 2y^2 + xy - x - y = 6.$$

(a) Je li C elipsa, hiperbola ili parabola? Obrazložite.

(b) Odredite neku racionalnu parametrizaciju od C.

Rješenje. (a) Svest ćemo jednadžbu na kanonski oblik koristeći afine transformacije. Prvo ćemo se riješiti mješovitog člana xy upotpunjavanjem do kvadrata.

$$\begin{aligned} & x^2 + xy + 2y^2 - x - y = 6 \\ \Longrightarrow\ & \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + 2y^2 - x - y = 6 \\ \Longrightarrow\ & \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}y^2 - x - y = 6 \end{aligned}$$

Uvodimo prvu supstituciju $x_1 = x + \frac{y}{2}$, $y_1 = y$. Tada je $x = x_1 - \frac{y_1}{2}$. Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned} & x_1^2 + \frac{7}{4}y_1^2 - \left(x_1 - \frac{y_1}{2}\right) - y_1 = 6 \\ \Longrightarrow\ & x_1^2 - x_1 + \frac{7}{4}y_1^2 - \frac{1}{2}y_1 = 6 \end{aligned}$$

Sada upotpunjujemo na potpune kvadrate po varijablama x_1 i y_1:

$$\begin{aligned} & \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{7}{4}\left(y_1^2 - \frac{2}{7}y_1\right) = 6 \\ \Longrightarrow\ & \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\left(y_1 - \frac{1}{7}\right)^2 = \frac{44}{7}. \end{aligned}$$

Uvođenjem novih koordinata $x_2 = x_1 - \frac{1}{2}$ i $y_2 = y_1 - \frac{1}{7}$, dobivamo kanonski oblik:

$$\boxed{x_2^2 + \frac{7}{4}y_2^2 = \frac{44}{7}}.$$

Kako su koeficijenti uz x_2^2 i y_2^2 oba pozitivna, zaključujemo da je krivulja C **elipsa**.

(b) Da bismo našli racionalnu parametrizaciju, prvo moramo pronaći jednu racionalnu točku na krivulji. Uočimo da se $P = (0, 2)$ nalazi na krivulji (općenito je ideja uvrštavati male brojeve dok ne nađemo točku koja zadovoljava jednadžbu).

Sada povlačimo pravce kroz točku P s racionalnim koeficijentom smjera t. Jednadžba takvog pravca je $y = tx + 2$. Uvrstimo to u jednadžbu krivulje C:

$$x^2 + 2(tx + 2)^2 + x(tx + 2) - x - (tx + 2) = 6.$$

Sređivanjem izraza dobivamo:

$$\begin{aligned} & x^2 + 2(t^2x^2 + 4tx + 4) + tx^2 + 2x - x - tx - 2 - 6 = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & (2t^2 + t + 1)x^2 + (7t + 1)x = 0. \end{aligned}$$

Jedno rješenje kvadratne jednadžbe u x je $x_1 = 0$, što odgovara našoj početnoj točki $P = (0, 2)$. Drugo rješenje je

$$x_2 = -\frac{7t + 1}{2t^2 + t + 1}.$$

Pripadna y-koordinata je

$$y_2 = tx_2 + 2 = \frac{-3t^2 + t + 2}{2t^2 + t + 1}.$$

Dakle, tražena racionalna parametrizacija krivulje C je dana s

$$Q(t) = \left(-\frac{7t + 1}{2t^2 + t + 1}, \frac{-3t^2 + t + 2}{2t^2 + t + 1}\right). \quad \square$$

$\square$