ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Rješenja drugog kolokvija - 20. lipnja 2025.

Zadatak 1. Odredite sve pravce koji su od ravnine $\pi_1 \ldots 2x - 2y + z = 1$ udaljeni za 3, a od ravnine $\pi_2 \ldots 4x + 3z = 7$ udaljeni za 5. Jednadžbu barem jednog pravca zapišite u kanonskom obliku, a ostale možete zapisati u bilo kojem obliku.

Rješenje. Koristimo formulu za udaljenost točke i ravnine, podsjetimo se da za $T = (x_0, y_0, z_0)$ i ravninu $\pi \ldots Ax + By + Cz + D = 0$, imamo

$$d(T, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A + B^2 + C^2}}.$$

Iz te formule slijedi da točka $T = (x, y, z)$ zadovoljava $d(T, \pi_1) = 3$ i $d(T, \pi_2) = 5$ ako i samo ako vrijede sljedeće jednadžbe:

$$d(T, \pi_1) = \frac{|2x - 2y + z - 1|}{3} = 3, \qquad d(T, \pi_2) = \frac{|4x + 3z - 7|}{5} = 5.$$

to jest

$$2x - 2y + z - 1 = \pm 9, \qquad 4x + 3z - 7 = \pm 25.$$

Zaključujemo da je skup svih točaka T takvih da $d(T, \pi_1) = 3$ i $d(T, \pi_2) = 5$ disjunktna unija sljedeća 4 pravca:

$$p_1 \ldots \begin{cases} 2x - 2y + z - 10 = 0 \\ 4x + 3z - 32 = 0 \end{cases}$$

$$p_2 \ldots \begin{cases} 2x - 2y + z - 10 = 0 \\ 4x + 3z + 18 = 0 \end{cases}$$

$$p_3 \ldots \begin{cases} 2x - 2y + z + 8 = 0 \\ 4x + 3z - 32 = 0 \end{cases}$$

$$p_4 \ldots \begin{cases} 2x - 2y + z + 8 = 0 \\ 4x + 3z + 18 = 0 \end{cases}$$

Još treba odrediti kanonski oblik za barem jedan pravac, napravimo to za p_1. Točka $P = (8, 3, 0)$ leži na p_1 jer zadovoljava jednadžbe obe ravnine koje zadaju p_1. Odredimo sada $\vec{s}_{p_1}$. Općenito, ako je pravac sadržan u ravnini, onda je njegov vektor smjera ortogonalan na normalu te ravnine. Zaključujemo da je $\vec{s}_{p_1} \perp (2, -2, 1), (4, 0, 3) \implies \vec{s}_{p_1} \parallel (2, -2, 1) \times (4, 0, 3) = (-6, -2, 8)$. Pošto je vektor smjera određen do na množenje skalarom, možemo uzeti $\vec{s}_p := (3, 1, -4)$. (Uočimo još da sva četiri pravca p_1, p_2, p_3, p_4 imaju isti vektor smjera). Kanonska jednadžba pravca p_1 je

$$p_1 \ldots \frac{x - 8}{3} = \frac{y - 3}{1} = \frac{z}{4}.$$

$\square$

Zadatak 2. Odredite sve realne brojeve λ takve da je pravac

$$p \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y-2\lambda}{3} = \frac{z+\lambda}{\lambda}$$

paralelan s ravninom $\pi \dots 5x - 2y + (\lambda - 4)z = 7$. Za svaki takav λ odredite jednadžbu ravnine koja sadrži pravac p i paralelna je s π.

Rješenje. Uočimo da je $\vec{n}_\pi = [5, -2, \lambda - 4]$ jedna normala na ravninu π, a $\vec{s}_p = [2, 3, \lambda]$ je vektor smjera za pravac p. Tada imamo da je $p \parallel \pi \iff \vec{s}_p \perp \vec{n}_\pi \iff \vec{s}_p \cdot \vec{n}_{\pi'} = 0$. Vrijedi $\vec{s}_p \cdot \vec{n}_\pi = 10 - 6 + \lambda(\lambda - 4) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$. Iz $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, odnosno $(\lambda - 2)^2 = 0$, zaključujemo $\boxed{\lambda = 2}$

Sada iz jednadžbe pravca uočimo da je $T := (1, 2\lambda, -\lambda) = (1, 4, -2)$ točka na p. Kada je $\lambda = 2$, normala ravnine π je $\vec{n}_\pi = [5, -2, -2]$. Π je tada ravnina kojoj je $\vec{n}_\pi$ normala i koja sadrži točku T, pa joj je jednadžba

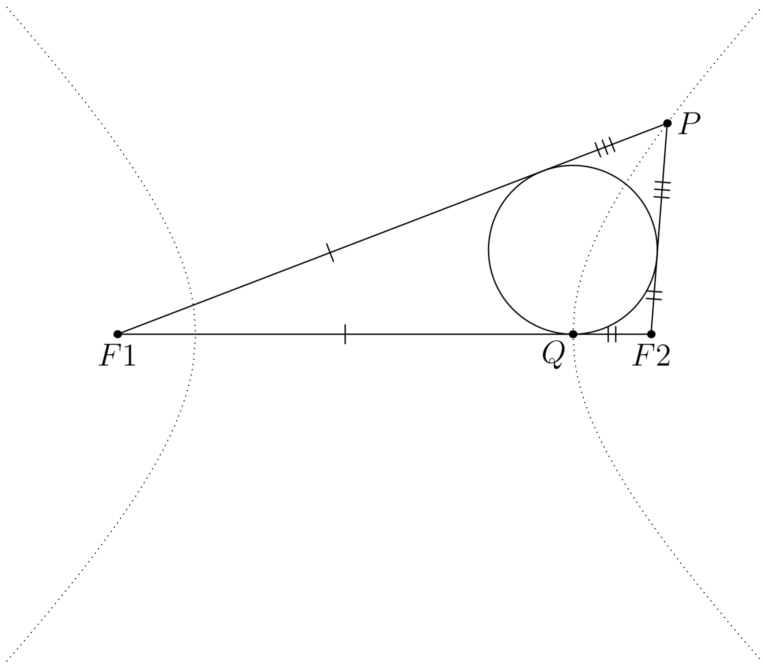
$$\begin{aligned} &5(x-1) - 2(y-4) - 2(z-(-2)) = 0 \\ \iff\ &5x - 2y - 2z = 1. \end{aligned}$$

□

Zadatak 3. Neka je P proizvoljna točka na hiperboli sa fokusima F_1 i F_2 te neka je Q diralište upisane kružnice trokuta $\triangle PF_1F_2$ sa stranicom $\overline{F_1F_2}$. Dokažite da je Q jedno od tjemena hiperbole.

Rješenje. Neka su Q, R i S dirališta upisane kružnice trokuta $\triangle F_1F_2P$ sa stranicama F_1, F_2, F_2P i PF_1 redom.

Dužine F_1Q i F_1S su kao tangente na kružnicu jednake duljine, isto vrijedi i za tangente iz ostalih vrhova kao što je prikazano na slici ispod.



Uvedimo oznake:

$$x := |F_1Q| = |F_1S|, \qquad y := |PS| = |PR|, \qquad z := |F_2R| = |F_2Q|.$$

Budući da P leži na hiperboli, vrijedi jednadžba

$$||F_1P| - |F_2P|| = 2a.$$

S druge strane duljine stranica F_1P i F_2P možemo izraziti preko uvedenih duljina x, y i z, odakle dobivamo sljedeću jednakost:

$$2a = |(x + y) - (y + z)| = |x - z| = ||F_1Q| - |F_2Q||.$$

Dakle i Q leži na hiperboli, budući da je Q leži na spojnici fokusa, Q mora biti jedno od tjemena hiperbole.

$\square$

Zadatak 4. Neka je F fokus parabole, T tjeme parabole i P proizvoljna točka na paraboli, ako se tangente na parabolu u T i P sijeku u točki Q dokažite da je $\angle PQF = 90°$.

Prvo rješenje.

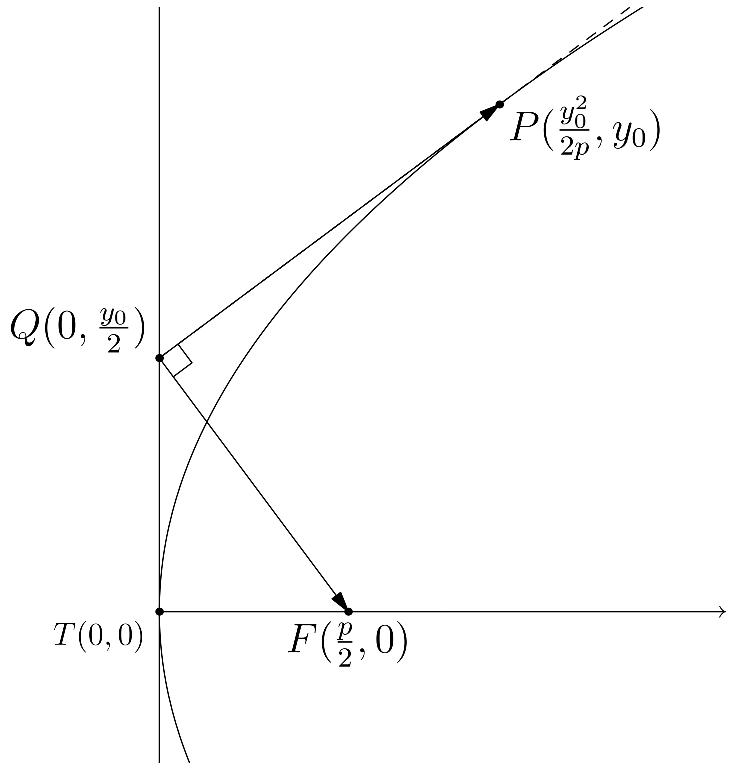
Afinom transformacijom koja je kompozicija translacije i rotacije parabolu možemo svesti u oblik $y^2 = 2px$ za neki $p \in \mathbb{R}$.

Neka je $P = (x_0, y_0)$, kako P leži na paraboli tada koordinate točke P zadovoljavaju jednadžbu

$$y_0^2 = 2px_0 \implies x_0 = \frac{y_0^2}{2p} \implies P = \left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0\right).$$

Jednadžba tangente u točki P je dana s

$$yy_0 = p \cdot (x + x_0). \tag{1}$$



Kako je tjeme parabole $y^2 = 2px$ zapravo ishodište $T = (0,0)$ to je tangenta u tjemenu zapravo y-os, to jest jednadžba tangente u tjemenu je upravo $x = 0$. Dakle točka Q ima koordinatne $(0, y_Q)$. Kako je točka Q presjek tangente u tjemenu i tangente u P ona zadovoljava jednadžbu (1), to jest

$$y_Q y_0 = p \cdot (0 + x_0) \implies y_Q = \frac{px_0}{y_0} = \frac{p \cdot \frac{y_0^2}{2p}}{y_0} = \frac{y_0}{2} \implies Q = \left(0, \frac{y_0}{2}\right).$$

Koordinate fokusa parabole $y^2 = 2px$ su dane s $F = (\frac{p}{2}, 0)$.

Kut $\angle FQP$ će biti pravi kut ako i samo ako je skalarni produkt vektora $\overrightarrow{QP}$ i $\overrightarrow{QF}$ nula.

$$\angle FQP = 90° \iff \overrightarrow{QF} \cdot \overrightarrow{QP} = 0.$$

Stoga računamo:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{QF} &= \left(\frac{p}{2}, -\frac{y_0}{2}\right), \\
\overrightarrow{QP} &= \left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0 - \frac{y_0}{2}\right) = \left(\frac{y_0^2}{2p}, \frac{y_0}{2}\right), \\
\overrightarrow{QF} \cdot \overrightarrow{QP} &= \frac{y_0^2}{2p} \cdot \frac{p}{2} - \frac{y_0^2}{4} = 0.
\end{aligned}$$

Dakle pravci QF i QP su zaista okomiti, to jest $\angle FQP = 90^\circ$. $\square$

Napomena: Alternativni način za dovršiti zadatak računski je pokazat da vrijedi

$$|PF|^2 = |PQ|^2 + |QF|^2,$$

te koristeći obrat *Pitagorinog teorema* dokazati da je $\angle FQP = 90^\circ$.

Drugo rješenje.
Neka je N nožište okomice iz P na direktrisu, po geometrijskoj karakterizaciji parabole vrijedi

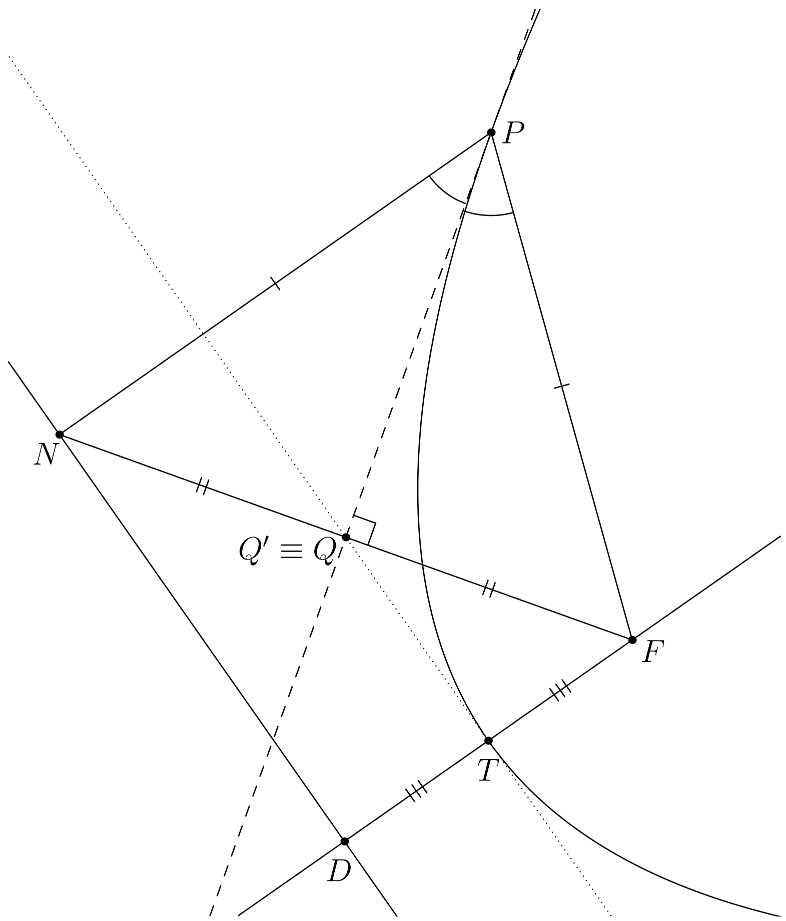
$$|PN| = |PF|. \tag{2}$$

Neka je t tangenta na parabolu u tjemenu T i neka je p tangenta na parabolu u točki P.

Tada je po optičkom svojstvu parabole, p simetrala kuta $\angle FPN$. Kako je po (2) trokut $\triangle FPN$ jednakokračan to je p i simetrala osnovice $\overline{FN}$.

Točka Q nam je definirana kao presjek tangenti p i t, kada bismo dokazali da Q leži na pravcu FN vrijedilo bi da je Q polovište dužine $\overline{FN}$. Odakle iz činjenice da je p simetrala dužine $\overline{FN}$ slijedi da je $\angle FQP = 90°$.

Biramo jednostavniju varijantu problema za dokazati. Definiramo točku Q' kao presjek pravca TN i tangente t, te dokazujemo da Q leži na p, to jest da je $Q \equiv Q'$.



Označimo sa D točku na direktrisi koja leži na optičkoj osi (na pravcu FT). Kako je T tjeme na paraboli imamo jednakost $|TF| = |TD|$, a budući da je tjeme T na optičkoj osi ono je i polovište segmenta $\overline{FD}$.

Tangenta t u tjemenu je paralelna sa direktrisom to jest

$$TQ' \parallel DN.$$

Kako je T polovište to je TQ' srednjica trokuta $\triangle FDN$, odakle vidimo da je Q' polovište segmenta $\overline{FN}$. Ovime smo dokazali da je $Q' \equiv Q$ jer se Q' nalazi na tangenti p koju smo karakterizirali kao simetralu stranice $\overline{FN}$. $\square$

Zadatak 5. Dana je krivulja

$$C : x^2 + 2y^2 + xy - x - y = 6.$$

(a) Je li C elipsa, hiperbola ili parabola? Obrazložite.

(b) Odredite neku racionalnu parametrizaciju od C.

Rješenje. (a) Svest ćemo jednadžbu na kanonski oblik koristeći afine transformacije. Prvo ćemo se riješiti mješovitog člana xy upotpunjavanjem do kvadrata.

$$\begin{aligned} & x^2 + xy + 2y^2 - x - y = 6 \\ \Longrightarrow\ & \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} + 2y^2 - x - y = 6 \\ \Longrightarrow\ & \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}y^2 - x - y = 6 \end{aligned}$$

Uvodimo prvu supstituciju $x_1 = x + \frac{y}{2}$, $y_1 = y$. Tada je $x = x_1 - \frac{y_1}{2}$. Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned} & x_1^2 + \frac{7}{4}y_1^2 - \left(x_1 - \frac{y_1}{2}\right) - y_1 = 6 \\ \Longrightarrow\ & x_1^2 - x_1 + \frac{7}{4}y_1^2 - \frac{1}{2}y_1 = 6 \end{aligned}$$

Sada upotpunjujemo na potpune kvadrate po varijablama x_1 i y_1:

$$\begin{aligned} & \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{7}{4}\left(y_1^2 - \frac{2}{7}y_1\right) = 6 \\ \Longrightarrow\ & \left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\left(y_1 - \frac{1}{7}\right)^2 = \frac{44}{7}. \end{aligned}$$

Uvođenjem novih koordinata $x_2 = x_1 - \frac{1}{2}$ i $y_2 = y_1 - \frac{1}{7}$, dobivamo kanonski oblik:

$$\boxed{x_2^2 + \frac{7}{4}y_2^2 = \frac{44}{7}}.$$

Kako su koeficijenti uz x_2^2 i y_2^2 oba pozitivna, zaključujemo da je krivulja C **elipsa**.

(b) Da bismo našli racionalnu parametrizaciju, prvo moramo pronaći jednu racionalnu točku na krivulji. Uočimo da se $P = (0, 2)$ nalazi na krivulji (općenito je ideja uvrštavati male brojeve dok ne nađemo točku koja zadovoljava jednadžbu).

Sada povlačimo pravce kroz točku P s racionalnim koeficijentom smjera t. Jednadžba takvog pravca je $y = tx + 2$. Uvrstimo to u jednadžbu krivulje C:

$$x^2 + 2(tx + 2)^2 + x(tx + 2) - x - (tx + 2) = 6.$$

Sređivanjem izraza dobivamo:

$$\begin{aligned} & x^2 + 2(t^2x^2 + 4tx + 4) + tx^2 + 2x - x - tx - 2 - 6 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \quad (2t^2 + t + 1)x^2 + (7t + 1)x = 0. \end{aligned}$$

Jedno rješenje kvadratne jednadžbe u x je $x_1 = 0$, što odgovara našoj početnoj točki $P = (0, 2)$. Drugo rješenje je

$$x_2 = -\frac{7t + 1}{2t^2 + t + 1}.$$

Pripadna y-koordinata je

$$y_2 = tx_2 + 2 = \frac{-3t^2 + t + 2}{2t^2 + t + 1}.$$

Dakle, tražena racionalna parametrizacija krivulje C je dana s

$$Q(t) = \left(-\frac{7t + 1}{2t^2 + t + 1}, \frac{-3t^2 + t + 2}{2t^2 + t + 1} \right). \quad \square$$

$\square$