# Šeste i sedme vježbe : Relacije ekvivalencije i parcijalnog uređaja

**Teorijski podsjetnik**

- Binarna relacija koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna zove se **relacija ekvivalencije**.
- Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu $A$ i neka je $x \in A$. Skup $[x] := \{y \in A \mid x \sim y\}$ zovemo **klasa ekvivalencije** elementa $x$. Nadalje, kažemo da je $x$ **reprezentant** klase $[x]$.

  Skup svih klasa ekvivalencije zovemo **kvocijentni skup** od $\sim$ i označavamo ga sa $A/_\sim := \{[x] \mid x \in A\}$. Kvocijentni skup daje jednu **particiju** skupa $A$.
- Relacija $\rho$ na skupu $A$ koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna zove se **relacija parcijalnog uređaja** ili jednostavno **parcijalni uređaj**. Ako još vrijedi $(\forall x, y \in A)(x \ \rho \ y \vee y \ \rho \ x)$, onda $\rho$ zovemo **relacija totalnog uređaja** ili **totalni uređaj**. Relacija koja je irefleksivna i tranzitivna zove se **relacija strogog parcijalnog uređaja**.
- Neka je $\rho$ relacija parcijalnog uređaja na skupu $A$ i neka je $B \subseteq A$. Kažemo da je $a \in A$ **donja međa** skupa $B$ ako $(\forall b \in B)(a \ \rho \ b)$. Kažemo da je element $a \in A$ **najveća donja međa** ili **infimum** skupa $B$ i pišemo $a = \inf B$ ako je $a$ donja međa skupa $B$ i ako za svaku donju među $x \in A$ skupa $B$ vrijedi $x \ \rho \ a$. Ako vrijedi i $\inf B \in B$, kažemo da je $\inf B$ **najmanji element** skupa $B$.
- Kažemo da je $a \in A$ **gornja međa** skupa $B$ ako $(\forall b \in B)(b \ \rho \ a)$. Kažemo da je element $a \in A$ **najmanja gornja međa** ili **supremum** skupa $B$ i pišemo $a = \sup B$ ako ako je $a$ gornja međa skupa $B$ i ako za svaku gornju među $x \in A$ skupa $B$ vrijedi $a \ \rho \ x$. Ako vrijedi i $\sup B \in B$, kažemo da je $\sup B$ **najveći element** skupa $B$.

**1.** Na skupu $\mathbb{N}$ zadana je relacija $\sim$ s $m \sim n \iff m - n$ je paran cijeli broj. Dokažite da je $\sim$ relacija ekvivalencije i odredite klase ekvivalencije.

**2.** Odredite relaciju ekvivalencije $\sim$ na skupu $A$ čije klase su $A/_\sim$, ako je:

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A/_\sim = \big\{\{1, 4, 5\},\ \{2, 3\}\big\}$;

(b) $A = \mathbb{N}$, $A/_\sim = \big\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\big\}$;

(c) $A = \mathbb{R}$, $A/_\sim = \big\{[k, k+1\rangle \mid k \in \mathbb{Z}\big\}$.

**3.** Na skupu $\mathbb{N}$ zadana je relacija $\rho$ s $a \ \rho \ b \iff (\exists p \in \mathbb{P})(p \mid a \wedge p \mid b)$, gdje je $\mathbb{P}$ skup prostih brojeva.

(a) Ispitajte svojstva relacije $\rho$. Je li $\rho$ relacija ekvivalencije?

(b) Odredite najmanju relaciju ekvivalencije koja sadrži $\rho$.

**4.** Na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ zadana je relacija $\rho$ na sljedeći način:

$$(a, b) \ \rho \ (c, d) \iff 2 \mid a - c \ \vee \ 3 \mid b - d.$$

(a) Ispitajte svojstva relacije $\rho$. Je li $\rho$ relacija ekvivalencije?

(b) Odredite sve načine na koje se $\rho$ može nadopuniti do relacije ekvivalencije.

**5.** Na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ zadana je relacija $\gg$ s $a \gg b \Leftrightarrow a > b + 1000$,

(a) Ispitajte svojstva relacije $\gg$.

(b) Odredite sve načine na koje se $\gg$ može nadopuniti do relacije ekvivalencije.

**6.** Neka je $S \neq \emptyset$ skup i $T \subseteq S$. Na skupu $\mathcal{P}(S)$ zadana je relacija $\rho$ s $A \,\rho\, B \iff A \cap T = B \cap T$.

(a) Dokažite da je $\rho$ relacija ekvivalencije.

(b) Za $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $T = \{2, 3, 4\}$ odredite $[\{2, 5\}]$.

**7.** Neka je $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Na skupu $\mathcal{P}(S)$ zadana je relacija $\sim$ s

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad A \triangle B \subseteq \{1, 2\}.$$

(a) Dokažite da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Je li relacija parcijalnog uređaja?

(b) Odredite klasu ekvivalencije elementa $\{1, 3, 4\}$.

(c) Koliko elemenata ima kvocijentni skup $\mathcal{P}(S)/_{\sim}$?

**8.** Neka su $\leq_1$ i $\leq_2$ parcijalni uređaji na nekom skupu $A$. Jesu li relacije $\leq_\cup$ definirana s $\leq_1 \cup \leq_2$ i $\leq_\cap$ definirana s $\leq_1 \cap \leq_2$ nužno parcijalni uređaji?

**9.** Na skupu $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dana je relacija $\rho$ s

$$\rho = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (3,3), (3,4), (4,4)\}.$$

(a) Dokažite da je $\rho$ relacija parcijalnog uređaja.

(b) Odredite sve donje međe skupa $\{3, 4\}$. Ima li taj skup infimum?

(c) Odredite sve gornje međe skupa $\{2, 3\}$. Ima li taj skup supremum?

(d) Odredite sve gornje međe skupa $\{1\}$. Ima li taj skup supremum?

**10.** Neka je $\rho$ relacija strogog parcijalnog uređaja na skupu $A$. Neka je $\sigma$ relacija na skupu $A$ definirana s $x \,\sigma\, y \iff x = y \ \vee \ x \,\rho\, y$. Dokažite da je $\sigma$ relacija parcijalnog uređaja.

**11.** Na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definirana je relacija $\rho$ s $(a, b) \,\rho\, (c, d) \iff a \mid c \ \wedge \ b \leq d$.

(a) Dokažite da je $\rho$ relacija parcijalnog uređaja.

(b) Ima li skup $\big\{(6, 16), (9, 12), (15, 8)\big\}$ donju među (s obzirom na uređaj $\rho$)? Ima li infimum?

**12.** Pronađite primjer relacije parcijalnog uređaja na skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ koja sadrži točno 13 elemenata i s obzirom na koju skup $\{1, 4\}$ nema nijednu gornju među.

**13.** Na skupu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definirana je relacija parcijalnog uređaja $\rho$ s

$$A \,\rho\, B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \setminus A \subseteq N,$$

gdje smo s $N$ označili skup svih neparnih prirodnih brojeva. Odredite

(a) sve gornje međe skupa $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$;

(b) infimum skupa $\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 5\}\}$.

**14.** Neka je $\rho$ relacija na $\mathbb{N}$ definirana s

$$a \,\rho\, b \quad \Leftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{N}_0)\ b = 2^k a.$$

(a) Dokažite da je $\rho$ relacija parcijalnog uređaja. Je li totalan uređaj?

(b) Odredite, ako postoje, sve gornje međe skupa $\{3, 6\}$.

(c) Dokažite: ako neprazan skup $S \subseteq \mathbb{N}$ ima gornju među, onda ima i supremum.

**15.** Na skupu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ zadana je relacija $\rho$ s

$$A \,\rho\, B \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(B = A \cup \{n\}).$$

(a) Ispitajte svojstva ove relacije.

(b) Odredite najmanju relaciju parcijalnog uređaja koja sadrži $\rho$.