Erdős - Ko - Rado teorem

1. Motivacijski problem

Neka je $[n] = \{1, \dots, n\}$ i neka

$\binom{[n]}{k}$ označava skup svih k-članih podskupova

od $[n]$. Kažemo da je familija

$\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ presječna ako se

svaka dva njezina člana sijeku.

Primjer jedne takve familije dobivamo tako da fiksiramo jedan element, recimo i i uzmemo sve k-podskupove koji ga sadrže:

$$S_i = \{ A \in \binom{[n]}{k} : i \in A \}.$$

Tada $|S_1| = \binom{n-1}{k-1}$.

Q: Može li postojati veća presječna familija?

Teorem (Erdős-Ko-Rado)
Pretp. $n \geq 2k$. Ako je $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ presječna familija, tada vrijedi

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

Ako je $n > 2k$ jednakost se postiže samo za familije oblika S_i.

zovu se zvijezde

2. Preformulacija preko Kneserovog grafa

Kneserov graf $K(n,k)$:

- vrhovi su k-podskupovi od $[n]$
- dva vrha A i B su spojena bridom ako su disjunktna, pišemo $A \sim B$

Tada je presječna familija upravo nezavisan skup u grafu $K(n,k)$.

↗ podskup u kojem nikoja dva vrha nisu povezana

Q: Koliko velik može biti nezavisan skup u Knesenovog grafu?

$K(n,k)$

- ima $N = \binom{n}{k}$ vrhova
- svaki k-podskup A je disjunktan s točno $d = \binom{n-k}{k}$ drugih k-skupova pa je $K(n,k)$ d-regularan graf.

Strategija dokaza:

1. za regularan graf dati spektralnu gornju ogradu za veličinu nezavisnog skupa

2. izračunati najmanju svojstvenu vrijednost operatora susjedstva Kneserovog grafa

3. primijeniti tu ogradu

3. Hoffmanova granica

Neka je G konačan d-regularan graf sa skupom vrhova X, $|X| = N$.

Neka je $V = \mathbb{R}^X$ vektorski prostor realnih funkcija na X sa skalarnim produktom

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in X} f(x) g(x)$$

Definirajmo operator susjedstva $A : V \to V$ formulom

$$(Af)(x) = \sum_{y \sim x} f(y)$$

y je susjed od x

Napomena: Matrica ovog operatora u kanonskoj bazi se još zove matrica susjedstva.

Lako se vidi $\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle$ jer je graf neusmjeren.

kažemo da je A samoadjungiran

Kao i $A\,1 = d\,1$ gdje je 1 konstantna funkcija 1. Označimo s τ najmanju svojstvenu vrijednost operatora A (znamo da su svojstvene vrijednosti od A realni brojevi, zašto?).

Teorem (Hoffmanova granica)

$$\alpha(G) \leq N \frac{-\tau}{d-\tau}$$

veličina najvećeg nezavisnog skupa u grafu G

dokaz Hoffmanove granice

Neka je $I \subseteq X$ nezavisan skup i neka je $f = 1_I$ njegova karakteristična funkcija.

Kako se nezavisnost skupa I reflektira u funkciji f?

Kako nema bridova unutar I vrijedi

$$\langle Af, f\rangle = 0 .$$

Rastavimo f na konstantni dio i dio okomit na konstante

$$f = \frac{|I|}{N} 1 + g \quad , \quad g \perp 1 .$$

jer

$$\left\langle f - \frac{|I|}{N} 1, 1 \right\rangle = 0$$

pa

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{\langle Af, f\rangle} = \left\langle A\left(\frac{|I|}{N} 1 + g\right), \frac{|I|}{N} 1 + g\right\rangle = \dots$$

$$= d\frac{|I|^2}{N} + \langle Ag, g\rangle$$

Kako je $g \perp 1$ iz definicije najmanje svojstvene vrijednosti slijedi (dokažite!)

A se dijag. u ortog. bazi

$$\langle Ag, g\rangle \geq \tau \|g\|^2$$

Pitagorin teorem

Također (dokažite!)

$$\|g\|^2 = \|f\|^2 - \left\| \frac{|I|}{N} 1 \right\|^2 = |I| - \frac{|I|^2}{N}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \geq d\,\frac{|I|^2}{N} + \tau\left(|I| - \frac{|I|^2}{N}\right)$$

$$\Rightarrow \dots \quad |I| \leq N\,\frac{-\tau}{d-\tau} \qquad \blacksquare$$

4. Dekompozicija prostora funkcija na k-podskupovima

$V_k = \mathbb{R}^{\binom{[n]}{k}}$ prostor funkcija na k-podskupovima.

Za $T \subseteq [n]$, $|T| = j \leq k$ definiramo funkciju $\chi_T \in V_k$ formulom

$$\chi_T(A) = \begin{cases} 1, & T \subseteq A \\ 0, & T \not\subseteq A \end{cases}.$$

Definirajmo

$$F_j = \text{span}\{\chi_T : |T| = j\}.$$

Lema 1: Vrijedi

$$F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_k = V_k$$

Dokaz: Neka je $|T| = j-1$. Tada za svaki $A \in \binom{[n]}{k}$ vrijedi (dokažite!)

$$\sum_{i \notin T} \chi_{T \cup \{i\}}(A) = (k-j+1)\,\chi_T(A)$$

Zato

$$\chi_T = \frac{1}{k-j+1} \sum_{i \notin T} \chi_{T \cup \{i\}}$$ pa je

$F_{j-1} \subseteq F_j$. Za $j = k$, χ_T gdje je $|T| = k$ su karakteristične funkcije vrhova pa je $F_k = V_k$.

∎

Definirajmo ortogonalne slojeve

$U_0 = F_0$ a za $j \geq 1$

ortog.

$U_j := F_j \cap F_{j-1}^{\perp} \Rightarrow F_j = F_{j-1} \oplus U_j$

$\Rightarrow V_n = U_0 \oplus U_1 \oplus \dots \oplus U_n \quad (*)$

ortogonalna dekompozicija

Knesenovog grafa

5. Djelovanje operatora susjedstva na ortogonalnoj dekompoziciji (*)

Neka je $T \subset [n]$, $|T| = j$, $j \leq k$. Tada

$$A\chi_T(B) = \#\left\{ C \in \binom{[n]}{k} : C \cap B = \emptyset, \ T \subseteq C \right\}$$

$A : V_n \to V_n$

$$(Af)(B) = \sum_{\substack{C \in \binom{[n]}{k} \\ C \cap B = \emptyset}} f(C)$$

ako $T \cap B \neq \emptyset$ tada skupa C nema

Lako se vidi

$$(Ax_T)(B) = \binom{n-k-j}{k-j} 1_{\{T \cap B = \emptyset\}}$$

Formula uključivanja i isključivanja nam daje

$$1_{\{T \cap B = \emptyset\}} = \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|S|} X_S(B)$$

$$\Rightarrow \quad AX_T = \binom{n-k-j}{k-j} \sum_{S \subseteq T} (-1)^{|S|} X_S$$

odnosno

$$AX_T = (-1)^j \binom{n-k-j}{k-j} X_T \pmod{F_{j-1}}$$

$(**)$

$A(F_j) \subseteq F_j$

Uzmimo $u \in U_j$. Tada je $u \in F_j$ i $u \perp F_{j-1}$

$\Rightarrow Au \in F_j$. Kako je A samo-adjungiran

$\forall v \in F_{j-1}$, $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle = 0$

$\Rightarrow Au \perp F_{j-1} \Rightarrow Au \in U_j$ $\quad Av \in F_j$

Dakle, U_j je A-invarijantan.

Q.. Kako A djeluje na U_j?

Iz kongruencije (**) slijedi $\forall u \in F_j$

$Au - \lambda_j u \in F_{j-1}$ gdje je

$$\lambda_j = (-1)^j \binom{n-k-j}{k-j}.$$

Posebno, ako je $u \in U_j$ onda su

Au i $\lambda_j u$ u U_j pa je

istovremeno $Au - \lambda_j u$ element od

U_j i F_{j-1}, dakle 0.

$$\Rightarrow A|_{U_j} = (-1)^j \binom{n-k-j}{k-j} Id.$$

Zaključujemo da su

λ_j, $j=0,\ldots,k$ svojstvene vrijednosti

Kneserovog grafa (odnosno njegovog operatora susjedstva).

6. Dokaz Erdős-Ko-Rado teorema

Pretp. $n \geq 2k$

Lako se vidi da je najmanja svojstvena vrijednost $\lambda_1 = -\binom{n-k-1}{k-1}$. (dokažite!)

Ako primijenimo Hoffmanovu granicu na Kneserov graf imamo

$$N = \binom{n}{k} \qquad \tau = -\binom{n-k-1}{k-1}$$
$$d = \binom{n-k}{k}$$

$$\Rightarrow \quad |\mathcal{F}| \leq \binom{n}{k} \frac{\binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}}$$

$$\ldots \quad |\mathcal{F}| \leq \binom{n}{k} \frac{k}{n} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Budući da zvijezda ima istu tu veličinu, granica je optimalna.

Slučaj jednakosti kad je $n > 2k$ za d.z.

7. Gdje se ovdje pojavljuje teorija reprezentacija simetrične grupe?

Neka je G grupa i V vektorski prostor.

Reprezentacija grupe G je homomorfizam grupa

$$\rho : G \to GL(V)$$

grupa invertibilnih linearnih operatora na V

Tj. svakom elementu $g \in G$ pridružujemo invert. linearni operator $\rho(g) : V \to V$ tako da vrijedi

$$\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$$

$$\rho(e) = id_V .$$

Često umjesto $\rho(g)v$ pišemo $g \cdot v$.

Potprostor $W \subseteq V$ je G-invarijantan ako $g \cdot W \subseteq W \ \forall g \in G$. Tada je W reprezentacija od G koju zovemo podreprezentacija od ρ.

Reprezentacija V je ireducibilna ako nema netrivijalnih invarijantnih potprostora.
$(\neq \{0\}, V)$

Glavni zadatak teorije reprezentacija je razumijeti ireducibilne reprezentacije jer npr. imamo sljedeći teorem:

Teorem (Maschke)

Svaka konačnodimenzionalna reprezentacija konačne grupe nad $\mathbb{C}$ rastavlja se kao direktna suma ireducibilnih reprezentacija tj.

$$V \simeq W_1 \oplus \dots \oplus W_r$$

gdje su W_i ireducibilne reprezentacije

(G-ekvivarijantna preslikavanja)
ovo je izomorfizam G-modula ili G-reprezentacija, ne samo vektorskih prostora;

Preciznije, ako su V i W dvije reprezentacije grupe G, onda se linearno preslikavanje $T : V \to W$ zove G-ekvivarijantno (ili operator isprepletanja, ili G-morfizam) ako $T(g \cdot v) = g \cdot T(v)$ $\forall g \in G$, $\forall v \in V$.

Jedan od osnovnih rezultata teorije reprezentacija je Schurova lema

Lema: Neka su V i W ireducibilne kompleksne reprezentacije grupe G.
Ako je $T : V \to W$ G-morfizam tada vrijedi ← u kategoriji G-repr.
a) ako $V \not\cong W$ onda $T = 0$

b) ako $V \cong W$ onda T djeluje kao skalar, $T = \lambda \, Id_V$.

Q: Kakve veze ima ovo sve s našim problemom dijagonalizacije operatora susjedstva $A: V_n \to V_k$?

A priori ta nemamo nikakvu reprezentaciju ali kad bi mogli na V_n definirati djelovanje grupe $G\ (=S_n)$ tako da A bude operator isprepletanja u odnosu na to djelovanje onda bi plan bio rastaviti V_k na ireducibilne reprezentacije (Maschkeov teorem) pa iz Schurove leme zaključiti da se A dijagonalizira u toj dekompoziciji.

Za potrebe ovog argumenta definirat ćemo V_n kao $\mathbb{C}^{\binom{n}{k}}$ (da bi imali kompleksne vektorske prostore). Tada grupa permutacija S_n djeluje na k-podskupove formalno

$$\sigma \cdot B = \{\sigma(a) : a \in B\} \quad \forall B \in \binom{[n]}{k}.$$

Iz toga dobivamo djelovanje na V_k

$$(\sigma f)(B) = f(\sigma^{-1} B) \quad \forall \sigma \in S_n, \forall B.$$

Pokažimo da je operator susjedstva A S_n- ekvivarijantan na ovo djelovanje.

Prisjetimo se definicije

$$(Af)(B) = \sum_{\substack{C \in \binom{[n]}{k} \\ C \cap B = \emptyset}} f(C)$$

Želimo pokazati $\quad A(\sigma f) = \sigma(Af) \quad \forall \sigma, \forall f$

Računamo

$$(A(\sigma \cdot f))(B) = \sum_C{}' (\sigma \cdot f)(C) = \sum_C f(\sigma^{-1} C)$$

Primijenimo zamjenu varijabli $\quad D = \sigma^{-1} C$

Tada je uvjet $\quad C \cap B = \emptyset$ ekvivalentan uvjetu $\quad \sigma^{-1} C \cap \sigma^{-1} B = \emptyset$, odnosno

$$D \cap \sigma^{-1} B = \emptyset$$

pa je

$$A(\sigma f)(B) = \sum_{\substack{D \in \binom{[m]}{n} \\ D \cap \sigma^{-1}B = \emptyset}} f(D) = Af(\sigma^{-1}B)$$

što je trebalo pokazati.

Dakle, problem dijagonalizacije se svodi na rastav S_m-reprezentacije V_k na ireducibilne reprezentacije.

To je upravo naš rastav!

$$V_n \simeq U_0 \oplus U_1 \oplus \dots \oplus U_k$$

Uvjerimo se prvo da su potprostori U_i S_m-invarijantni, odnosno podreprezentacije.

1. F_i je S_n- invarijantan

Uzmimo jedan generator X_T, $|T| = i$.

Lako se vidi

$$\sigma \cdot X_T = X_{\sigma T} \quad \forall \sigma \in S_n.$$

pa je očito $\sigma F_i = F_i$

2. Skalarni produkt je S_n- invarijantan.

$$\langle f, g \rangle = \sum_{B \in \binom{[n]}{k}} f(B) \overline{g(B)}$$

Lako se provjeri (d.z.)

$$\langle \sigma \cdot f, \sigma \cdot g \rangle = \langle f, g \rangle \quad \forall \sigma.$$

3. Zato je $F_{i-1}^{\perp}$ S_n - invarijantan.

Neka je $u \in F_{i-1}^{\perp}$. Želimo pokazati da je $Au \in F_{i-1}^{\perp}$. Uzmimo proizvoljan $v \in F_{i-1}$. Zbog 1. znamo $\sigma^{-1} v \in F_{i-1}$

Sada $\langle \sigma u, v\rangle = \langle u, \sigma^{-1} v\rangle$

S_n-invarijantnost skalarnog produkta

$= 0$ jer $\sigma^{-1} v \in F_{i-1}$.

Kako ovo vrijedi $\forall v \in F_{i-1}$ slijedi $\sigma u \in F_{i-1}^{\perp}$

Sada uzmimo $u \in U_i = F_i \cap F_{i-1}^{\perp}$. Prema prethodnom $\sigma u \in F_i \cap F_{i-1}^{\perp} = U_i$

pa zaključujemo da su potprostori U_i S_n podreprezentacije.

Preostaje još dokazati da su reprezentacije U_i ireducibilne (mogu se i točno klasificirati), ali to nećemo napraviti.

Ako vas ovakva matematika zanima upišite kolegij

Uvod u teoriju reprezentacija!

Domaća zadaća

Riješite sve zadatke 1–4 ili zadatak 5.

1. Pokažite da su svojstvene vrijednosti operatora A realni brojevi.

2. Dokažite tvrdnju iz predavanja

$$\langle Ag, g\rangle \geq \tau \|g\|^2 \quad \forall g \perp 1$$

najmanja svojstvena vrijednost

$\|g\|^2 = \langle g, g\rangle$

3. Dokažite Schurovu lemu.

4. Dokažite S_n-invarijantnost skalarnog produkta na V_n

$$\langle \sigma f, \sigma g\rangle = \langle f, g\rangle \quad \forall \sigma, \forall f, g$$

5.* Neka je $J(n,k)$ graf čiji su vrhovi k-podskupovi od $[n]$, a dva vrha su susjedna ako se razlikuju u točno jednom elementu, tj. ako

$$|A \cap B| = k-1.$$

Neka je B operator susjedstva tog grafa (Johnsonov graf).

a) odredite svojstvene vrijednosti od B

b) izračunajte pomoću Hoffmanove granice gornju ogradu za broj elemenata u familiji $\mathcal{C} \subseteq \binom{[n]}{k}$ u kojoj se nikoja dva elementa ne razlikuju u točno jednom elementu.

Napomena: Otvoreno je pitanje kada se ta gornja ograda postiže. Npr. za $k=3$ to je slučaj ako je $n \equiv 1,3 \pmod 6$. (Tada postoji Steinerov sustav $S(k-1,k,n)$.)