

Fermatovi rezultati u teoriji brojeva (osim malog i velikog teorema)

Lovro Kuić

Pierre de Fermat jedan je od najvažnijih matematičara 17. stoljeća i jedan od začetnika moderne teorije brojeva. Iako se njegovo ime najčešće povezuje s malim i velikim Fermatovim teoremom, on je ostavio i niz drugih tvrdnji koje su bitno usmjerile razvoj matematike. Fermat je mnoge rezultate zapisivao u pismima ili na marginama knjiga, često bez potpunih dokaza, pa su ih kasniji matematičari morali dokazivati ili opovrgavati.

Jedan od njegovih poznatih rezultata odnosi se na proste brojeve oblika $4k + 1$ i $4k - 1$. Fermat je tvrdio da se svaki prost broj oblika $4k + 1$ može prikazati kao zbroj dvaju kvadrata, i to na jedinstven način. Primjerice, $13 = 2^2 + 3^2$. S druge strane, prosti brojevi oblika $4k - 1$ ne mogu se prikazati kao zbroj dvaju kvadrata. Ova podjela prostih brojeva smatra se jednim od važnih rezultata u teoriji brojeva.

Fermat je proučavao i prikazivanje prirodnih brojeva kao zbroja kvadrata. Tvrdio je da se svaki prirodan broj može zapisati kao zbroj najviše četiriju kvadrata. Taj je rezultat kasnije dokazao Lagrange i danas je poznat kao teorem o četiri kvadrata. Fermatova tvrdnja pokazuje kako se opća svojstva brojeva mogu povezati s vrlo jednostavnim izrazima poput kvadrata cijelih brojeva.

Posebno su zanimljivi i Fermatovi brojevi, oblika $F_n = 2^{2^n} + 1$. Fermat je pretpostavio da su svi takvi brojevi prosti. Prvih pet zaista jesu prosti: 3, 5, 17, 257 i 65 537. Međutim, Euler je kasnije pokazao da sljedeći Fermatov broj, 4 294 967 297, nije prost jer se može rastaviti na umnožak 641 i 6 700 417. Iako je Fermatova pretpostavka bila pogrešna, Fermatovi brojevi ostali su važni u proučavanju prostih brojeva i konstrukcija pravilnih mnogokuta.

Fermat je dao i važan doprinos metodama dokazivanja. U dokazivanju nemogućnosti određenih cjelobrojnih rješenja koristio je metodu beskonačnog silaska. Ideja je pretpostaviti da postoji najmanje rješenje nekog problema, a zatim iz njega izvesti još manje rješenje. To vodi do proturječja jer u skupu pozitivnih cijelih brojeva ne može postojati beskonačan niz sve manjih brojeva. Tu je metodu primijenio, primjerice, na tvrdnju da ne postoji pravokutni trokut s cjelobrojnim stranicama kojemu je površina potpuni kvadrat.

Fermatovi rezultati važni su jer su pokazali da se iza jednostavnih pitanja o cijelim brojevima kriju duboki problemi. Njegove tvrdnje potaknule su rad Eulera, Lagrangea i Gaussa te su snažno utjecale na oblikovanje teorije brojeva kao samostalnog područja matematike.

Reference:

1. Encyclopaedia Britannica – *Number theory: Pierre de Fermat*
2. PMF Zagreb – *Povijest matematike, skripta, 2026.*
3. MacTutor History of Mathematics – *Pierre de Fermat*