

2. domaća zadaća iz Financijskog modeliranja

Zadatak 16. Neka je $(B_t)_{t \geq 0}$ Brownovo gibanje i $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ proizvoljna subdivizija intervala $[0, T]$.

(a) Pokažite da vrijedi

$$\sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}}^2 (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) = \frac{1}{3} B_T^3 - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^n (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^3 - \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}} (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2.$$

(b) Korištenjem (a) dijela i Propozicije 2.15 odredite Itôv integral

$$I_T = \int_0^T B_t^2 dB_t.$$

Dodatno, provjerite da integrand u integralu I_T zadovoljava uvjete Propozicije 2.15.

(c) Označimo s $t_j^* = \frac{t_j + t_{j+1}}{2}$ sredinu intervala $[t_j, t_{j+1}]$, te definiramo

$$Q_\Pi = \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_j^*} - B_{t_j})^2.$$

Odredite $\mathbb{E}[Q_\Pi]$, $\text{Var}(Q_\Pi)$ i $(\mathbb{P}) \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} Q_\Pi$.

(d) Stratonovičev integral Brownovog gibanja B obzirom na samog sebe definira se kao

$$SI_T = \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_j^*} (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}).$$

Korištenjem (c) dijela i izraza za Itôv integral $\int_0^T B_t dB_t$ odredite SI_T .

Zadatak 17. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Odredite varijancu slučajne varijable X ako je

(a) $X = \int_0^1 e^t (\sin(B_t) + \cos(B_t)) dB_t$

(b) $X = \int_0^1 \text{sh}(B_t) dB_t$

Zadatak 18. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i $X = (X_t : t \geq 0)$ slučajan proces definiran s $X_t = (1 + \frac{1}{3} B_t)^3$. Primjenom Itôve formule dokažite da proces X zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dX_t = \frac{1}{3} X_t^{1/3} + X_t^{2/3} dB_t, \quad X_0 = 1.$$

Zadatak 19. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Primjenom Itôve formule dokažite da je slučajan proces $X = (X_t : t \geq 0)$, definiran s $X_t = e^{\frac{t}{2}} \cos B_t$, martingal obzirom na Brownovsku filtraciju.

Zadatak 20. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje. Dokažite da je $X = (X_t : t \geq 0)$ također Brownovo gibanje ako je

(a) $X_t = \int_0^t \text{sgn}(B_s) dB_s$

(b) $X_t = \int_0^t H_s dB_s,$

pri čemu je $H = (H_t : t \geq 0)$ adaptiran proces t.d. je Lebesgueova mjera skupa $\{t \geq 0 : |H_t| \neq 1\}$ jednaka 0 $\mathbf{P}$ -gotovo sigurno.

Zadatak 21. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje, $T > 0$ i $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \geq 0)$ filtracija generirana Brownovim gibanjem B . Ako je Y $\mathcal{F}_T$ -izmjeriva slučajna varijabla s konačnim očekivanjem, pokažite da postoji adaptirani proces $\theta = (\theta_t : t \in [0, T])$ t.d. je

$$Y = \mathbf{E}Y + \int_0^T \theta_t dB_t.$$

Zadatak 22. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje i proces $B^* = (B_t^* : t \geq 0)$ dan s

$$B_t^* = B_t + \sin(t).$$

Odredite mjeru $\mathbb{P}^*$ obzirom na koju je B^* Brownovo gibanje.

Zadatak 23. Neka je $B = (B_t : t \geq 0)$ Brownovo gibanje na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Promotrimo Bachelierov model financijskog tržišta, gdje je cijena dionice modelirana s

$$dS_t = \alpha dt + \sigma dB_t, \quad t > 0,$$

za $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, gdje je $S_0 > 0$ početna cijena dionice i kamatna stopa je $r = 0$.

- (a) Odredite razdiobu slučajne varijable S_t (obzirom na $\mathbb{P}$).
- (b) Pokažite da je model tržišta potpun.
- (c) Izračunajte cijenu call opcije s cijenom izvršenja $K > 0$ i dospijećem $T > 0$.
- (d) Odredite deltu call opcije iz (c) u trenutku 0.¹
- (e) Je li portfelj $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1) : t \geq 0)$

(e1) $\phi = ((-S_t^2 - \sigma^2 t, 2S_t) : t \geq 0)$

(e2) $\phi = \left(\left(-\int_0^t S_u du, t^2 \right) : t \geq 0 \right)$

samofinancirajući?

Zadatak 24. Promatramo BSM model financijskog tržišta s konstantnim koeficijentima $\alpha = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $r = 0.05$ i inicijalnom cijenom dionice $S_0 = 100$. Neka je L gubitak (odnosno, dobitak) od ulaganja u dionicu kupljenu u trenutku 0 i prodanu u trenutku $T = 1$

¹Neka je cijena opcije u trenutku t dana s $C_t = c(t, S_t)$, gdje je $c : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ glatka funkcija. Delta opcije u trenutku t jednaka je $\Delta_t = \frac{d}{dx} c(t, S_t)$.

(razlika između diskontiranih vrijednosti dionice u trenutcima $t = 1$ i $t = 0$). Odredite *Value-at-Risk* na razini značajnosti $a = 0.05$, definiran s

$$VaR(a) = \inf\{x : \mathbb{P}(L \leq x) \geq a\}.$$

Zadatak 25. Promatramo BSM model financijskog tržišta s konstantnim koeficijentima $\alpha, \sigma, r > 0$. Odredite cijenu u trenutku $t = 0$ *down-and-out* binarne opcije s cijenom izvršenja $K > 0$ i barijerom $b < S_0$, $C = K1_{\{m_T > b\}}$.

-
16. b) $I_T = \frac{1}{3}B_T^3 - \int_0^T B_t dt$, c) $\mathbb{E}[Q_\Pi] = \frac{T}{2}$, $\text{Var}(Q_\Pi) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n (t_{j+1} - t_j)^2$, $(\mathbb{P}) \lim_{||\Pi|| \rightarrow 0} Q_\Pi = \frac{T}{2}$, d) $SI_T = \frac{1}{2}B_T^2$.
17. (a) $\frac{e^2-1}{2}$, (b) $\frac{e^2-3}{4}$
22. Za $A \in \mathcal{F}_T$ je $\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{E}^* \left[e^{-B_T \cos T - \int_0^T \sin t B_t dt - \frac{1}{8} \sin(2T) - \frac{T}{4}} 1_A \right]$.
23. a) $S_t \sim N(S_0 + \alpha t, \sigma^2 t)$; c) $C_0 = (S_0 - K)\Phi(d) + \frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} e^{-d^2/2}$, $d = \frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}$; d) $\Delta_0 = \Phi(d)$; e1) da; e2) ne
24. $VaR(0.05) = S_0 e^{-1.645\sigma + (\alpha - r - \frac{\sigma^2}{2})T}$
25. $C_0 = K e^{-rT} \left[\Phi \left(\frac{\ln \frac{S_0}{b} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - \left(\frac{b}{S_0} \right)^{\frac{2r}{\sigma^2} - 1} \Phi \left(-\frac{\ln \frac{S_0}{b} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right]$.