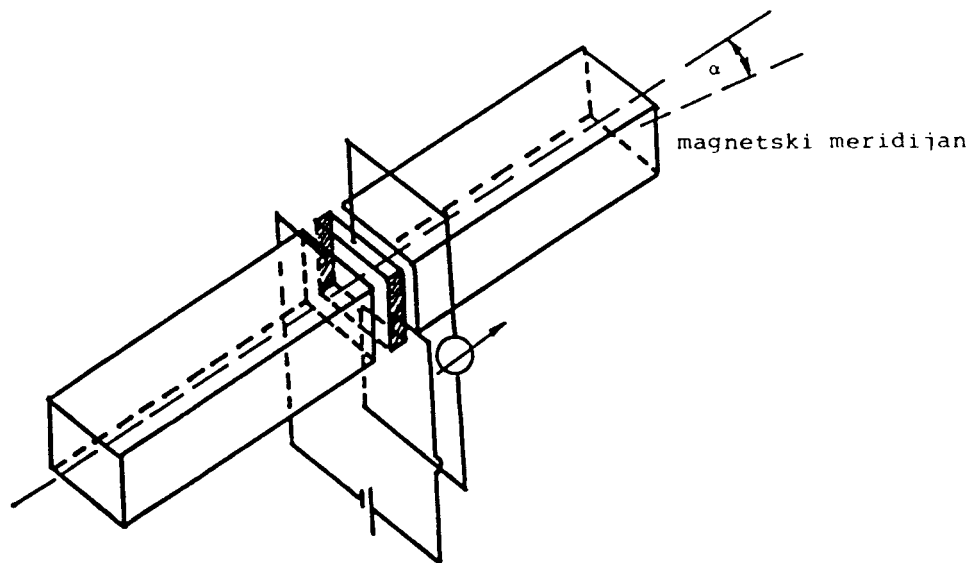


# 1. HALLOV EFEKT

## 2. UVOD

Hallov efekt je otkriven još 1879. godine, ali dugo vremena nije imao većeg značenja u fizici sve do naglog razvoja poluvodiča kada se prišlo detaljnom proučavanju toga efekta. Hallova konstanta je jednostavnim zakonima vezana uz pokretljivost nosilaca naboja i njihovu koncentraciju u poluvodičima i metalima. Hallov efekt otkriven je prvo na metalima koji se odlikuje velikim koncentracijama nosilaca naboja i malom njihovom pokretljivošću, dakle, u uvjetima pod kojima je Hallov efekt jako mali. Poluvodiči posjeduju upravo suprotne karakteristike, relativno vrlo velike pokretljivosti i niske koncentracije nosilaca naboja. Hallov efekt kod poluvodiča zato je relativno vrlo velik i vrlo pristupačan za mjerenje i primjenu.

Kod nekih vrlo osjetljivih i preciznih mjernih instrumenata primjenjuju se poluvodički elementi sa izrazitim Hallovim efektom (E. H. Hall), posebno se to odnosi na razne tipove magnetometra i Hallov kompas slika 1.



Slika 1 Kompas na principu Hallovog efekta

Hallov kompas je u principu vrlo jednostavan uređaj. Između dva štapa od visoko permeabilnog materijala nalazi se uzorak poluvodiča sa strujnim i naponskim kontaktima na istom mjestu kao na slici 1. Ako uzorkom teče struja pojaviti će se Hallov napon koji mjerimo galvanometrom. Visina tog napona ovisi o položaju uzorka prema magnetskom merdijanu. Napon je najviši kad je uzorak okomit na merdijan.

### 3. TEORIJSKI DIO

#### 3.1 Hallov efekt u metalima

Proučavanje Hallovog efekta u metalima je znatno jednostavnije, a rezultate možemo kasnije primjeniti i na poluvodiče.

Promotrimo gibanje elektrona u homogenom konstantnom električnom i magnetskom polju. Možemo uzeti da osim sile električnog i magnetskog polja djeluje i sila trenja. Za nju ćemo pretpostaviti da je proporcionalna umnošku mase i brzine elektrona. Tada je prema Newtonovu zakonu gibanja:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \gamma m \vec{v} \quad (3.1.1)$$

Da bismo odredili fizikalno značenje konstante  $\gamma$ , možemo zamisliti da smo u vrijeme  $t = 0$  isključili polje. Tada na elektron djeluje samo sila trenja i njegovo gibanje se prigušuje:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\gamma \vec{v} \quad (3.1.2)$$

nalazimo da je nakon isključivanja polja brzina elektrona:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) e^{-\gamma t} \quad (3.1.3)$$

Konstanta  $\gamma$  određuje promjenu brzine. Što je  $\gamma$  manji, to će pad brzine prema nuli trajati dulje. Vrijeme nakon kojega se brzina smanji na  $e$ -ti dio početne vrijednosti brzine nazvati ćemo vremenom relaksacije i označiti ga sa  $\tau$ .  $\tau$  je dan relacijom:

$$\tau = \frac{1}{\gamma} \quad (3.1.4)$$

Zamislimo na trenutak da na elektron djeluje samo električno polje u smjeru  $x$  osi. Tada prema Newtonovu zakonu gibanja:

$$m \frac{v_x}{\tau} = e E_x \quad (3.1.5)$$

odnosno:

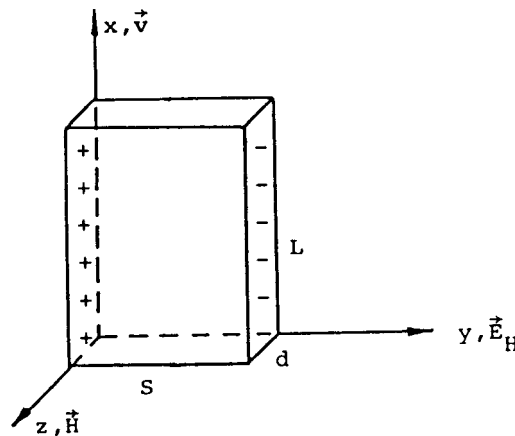
$$v_x = \frac{e\tau}{m} E_x \quad (3.1.6)$$

Brzina elektrona proporcionalna je intenzitetu električnog polja. Iznos faktora proporcionalnosti naziva se pokretljivost (mobilnost) elektrona:

$$\mu_e = \frac{e\tau}{m} \quad (3.1.7)$$

Pokretljivost smo definirali kao iznos brzine dobivene primjenom jediničnog električnog polja. Temperaturna ovisnost pokretljivosti razmatrana je u poglavlju električne vodljivosti.

Možemo sada promotriti uzorak u obliku pravokutnog paralelepipeda dužine L, širine s i debljine d, slika 3.1.1. Magnetsko polje neka djeluje u smjeru osi z, a električno polje E u smjeru x osi. Električno polje izaziva struju u uzorku u smjeru x osi pa su struja i magnetsko polje međusobno okomiti.



Slika 3.1.1 Uzorak metala ili poluvodiča u magnetskom i električnom polju

Pod takvim će uvjetima na elektrone u metalu, ako se oni gibaju brzinom  $\vec{v}$ , djelovati sila:

$$\vec{F}_M = e \vec{v} \times \vec{B} \quad (3.1.8)$$

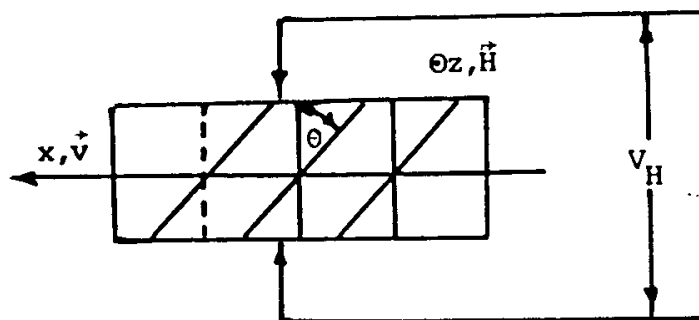
koja ima samo y-komponentu:

$$F_{My} = ev_x B \quad (3.1.9)$$

Zbog djelovanja te sile, elektroni će se otklanjati u smjeru ordinate, što će uzrokovati nagomilavanje negativnog naboja na desnoj površini uzorka. Tako stvoreni plošni naboj bit će nadalje uzrokom nastajanja električnog polja  $E_H$ , koje ima smjer ordinate, a zove se Hallovo polje, koje će na elektrone u gibanju djelovati silom :

$$F_E = eE_H \quad (3.1.10)$$

Proces nakupljanja naboja traje tako dugo, dok Hallovo polje ne počne djelovati na elektrone istom silom kao i magnetsko polje. Nakon postignute ravnoteže tih sila imamo i dalje tok elektrona u smjeru osi x, ali ekvipotencijalne plohe u uzorku nisu više okomite na smjer struje, već su prema starom položaju zakrenute za kut  $\theta$  ili tzv. Hallov kut, slika 3.1.2.



Slika 3.1.2. Djelovanjem magnetkog polja, ekvipotencijalne plohe zakreću se za Hallov kut

Prislonimo li na lijevu i desnu plohu uzorka dva metalna šiljka i mjerimo razliku potencijala između njih, dobit ćemo napon  $V_H$ , koji zovemo Hallovim naponom.

Polje  $E_H$  možemo pisati kao vektorski produkt:

$$\vec{E}_H = R_H \vec{i} \times \vec{B} \quad (3.1.11)$$

s konstantom proporcionalnosti  $R_H$ , bitnom za sva naša izlaganja, a koja se zove Hallova konstanta. Upravo opisana pojava nastajanja transferzalnog električnog polja  $E_H$ , odnosno napona  $V_H$  na uzorku u magnetskom polju naziva se Hallovim efektom. Ravnoteža sila na elektrone dozvoljava izjednačavanje relacija (3.1.9) i (3.1.10):

$$eE_H = ev_x B \quad (3.1.12)$$

Za Hallovo polje prema tome dobivamo:

$$E_H = v_x B \quad (3.1.13)$$

Ako upotrijebimo izraz za gustoću struje:

$$i = nev_x \quad (3.1.14)$$

možemo brzinu elektrona iz te relacije uvrstiti u (3.1.13) i usporedbom s relacijom (3.1.11) dobiti da je Halova konstanta dana relacijom:

$$R_H = 1/ne \quad (3.1.15)$$

Poznavajući Hallovu konstantu možemo izračunati koncentraciju elektrona  $n$ . No to nije sve. Kombinacijom izraza (3.1.15) s poznatim izrazom za električnu vodljivost (2.2.5) dobivamo također važnu relaciju:

$$R_H \sigma = \mu_n \quad (3.1.16)$$

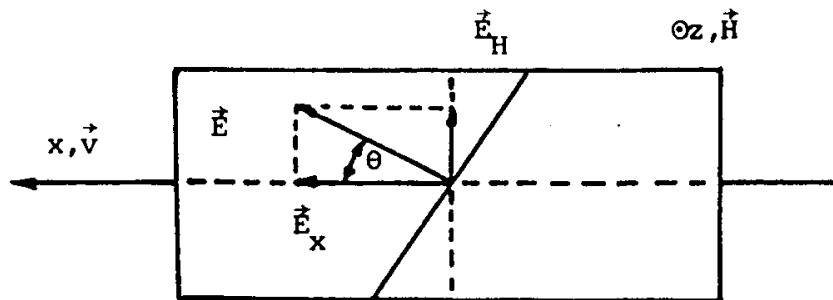
gdje je  $\mu_n$  pokretljivost elektrona. Možemo zaključiti da mjereći Hallovu konstantu i električnu vodljivost vodiča pomoću relacije (3.1.16) možemo izračunati  $\mu_n$  pokretljivost elektrona.

Pogledajmo još koliki je Hallov kut  $\theta$ . Nakon uključivanja magnetskog polja stvara se polje  $E_H$  koje zajedno s poljem  $E_x$  daje resultantno polje  $E$  tj. stvarno električno polje koje djeluje na elektrone, slika 3.1.2. Kut između  $E$  polja i  $E_x$  polja je i kut starih i novih ekvipotencijalnih ploha, dakle Hallov kut. Pošto pretpostavljamo da je kut  $\theta$  malen, možemo pisati:

$$\operatorname{tg}\theta \approx \theta = E_H/E_x \quad (3.1.17)$$

Uvrštavanjem poznatih izraza za  $E_x$  i  $E_H$ , za Hallov kut dobivamo:

$$\theta = R_H \sigma B \quad (3.1.18)$$

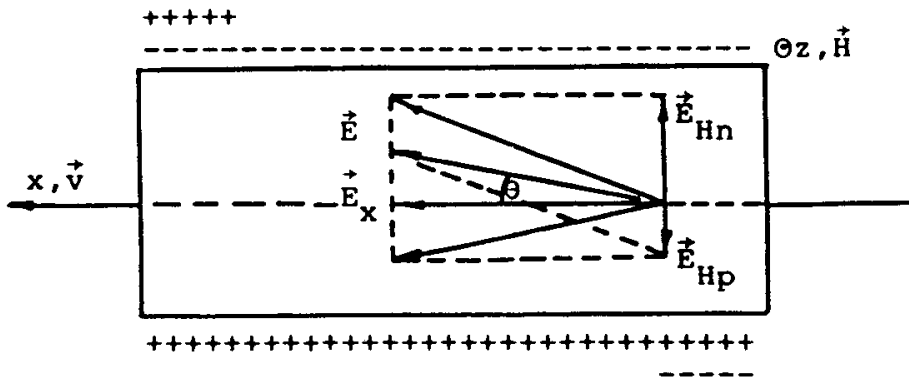


Slika 3.1.2. Vektorska slika električnih polja u uzorku metala pod djelovanjem magnetskog polja

Možemo primjetiti da je zakretanje ekvipotencijalnih ploha veće kod jačih magnetskih polja i u metalima s većom pokretljivošću elektrona. Budući je pokretljivost elektrona u metalima vrlo mala, Hallov kut je također malen čak i u slučaju jakih magnetskih polja. Hallov efekt u metalima se vrlo teško mjeri. Možemo zaključiti, da bi se na metalnom uzorku mogao mjeriti Hallov napon, moraju se upotrebiti vrlo jaka magnetska polja i jake struje kroz uzorak.

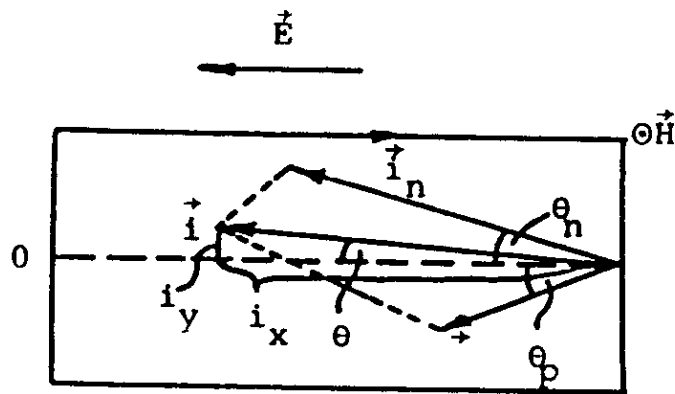
### 3.2 Hallov efekt u poluvodičima

Kao nosioci naboja u poluvodiču javljaju se elektroni i šupljine. U vanjskom električnom polju šupljine se gibaju u suprotnom smjeru od elektrona i nose pozitivni naboj, što znači da će magnetsko polje na njih djelovati silom u istom smjeru kao i silom na elektrone. Rezultat djelovanja polja na elektrone i šupljine bit će skupljanje negativnog naboja na desnoj površini uzorka, slika 3.1.1., ali i pozitivnog naboja na istoj površini. Za razliku od metala stvorit će se sada dva električna polja u smjeru osi y, ali suprotne orijentacije. Zbog nejednake koncentracije elektrona i šupljina u poluvodiču ta dva polja nisu jednaka i ne poništavaju se. Dobiva se kao i prije neko polje  $E_H$ . Imati ćemo i dva Hallova kuta. Jedan za elektrone drugi za šupljine. Pod tim uvjetima možemo izvesti opći izraz za Hallovu konstantu kod poluvodiča. Kad se uključi struja i magnetsko polje, u uzorku će nakon ravnoteže nastati situacija prikazana na slici 3.2.1. Kao i u poglavlju 3.1, u smjeru osi x imat ćemo električno polje  $E_x$ , koje potječe od napona uključenog na krajevima uzorka poluvodiča. U osi y nastaju dva Hallova polja:  $E_{Hn}$  od



Slika 3.2.1. Hallov efekt u n-tipu poluvodiča

površinske raspodjele elektrona i  $E_{Hp}$  od površinske raspodjele šupljina. Odabrat ćemo n-tip poluvodiča. Elektrona imamo znatno više nego šupljina pa je i električno polje  $E_{Hn}$  veće. Ukupno električno polje dobivamo vektorskim zbrojem sva tri polja. Kao što smo već rekli u poglavlju 3.1, smjer struje kroz kristal ne poklapa se sa smjerom ukupnog polja već je otklonjen za kut  $\theta$  od njega. Znamo da smjer ukupne struje leži longitudinalno i nema transverzalne komponente. Općeniti izraz za Hallovu konstantu izvest ćemo na osnovu vektorske slike gustoće struja. Cilj nam je izračunati kut  $\theta$  iz tog dijagrama i posredstvom relacije (3.1.17) dobiti Hallovu konstantu.



Slika 3.2.2. Vektorski prikaz gustoća struja.

Iz slike se može vidjeti da je:

$$\operatorname{tg}(-\theta) = i_y/i_x \quad (3.2.1)$$

Kut  $\theta$  je jako malen, pa možemo pisati:

$$\operatorname{tg}(-\theta) = -\theta \quad (3.2.2)$$

odakle je:

$$\theta = -i_y/i_x \quad (3.2.3)$$

Transverzalna komponenta gustoće struje je iz slike jednaka:

$$i_y = -i_n \sin\theta_n + i_p \sin\theta_p \quad (3.2.4)$$

Kao i prije primjenjujemo aproksimaciju malih kuteva:

$$i_y = -(i_n \theta_n + i_p \theta_p) \quad (3.2.5)$$

Uvrštavanjem poznatih relacija za gustoću struje i kut  $\theta$  dobivamo konačnu relaciju za tu komponentu struje:

$$i_y = -ne\mu_n^2 E_x B + pe\mu_p^2 E_x B \quad (3.2.6)$$

Longitudinalna komponenta  $i_x$ , u aproksimaciji malih kuteva, dana je relacijom:

$$i_x = i_n + i_p = (ne\mu_n + pe\mu_p)E_x \quad (3.2.7)$$

Podijelimo li relaciju (3.2.6) s relacijom (3.2.7), za Hallov kut dobivamo:

$$\theta = (-ne\mu_n^2 B + pe\mu_p^2 B)/(ne\mu_n + pe\mu_p) \quad (3.2.8)$$

Podijelimo li kut  $\theta$  s produktom  $B\sigma$  dobivamo Hallovu konstantu:

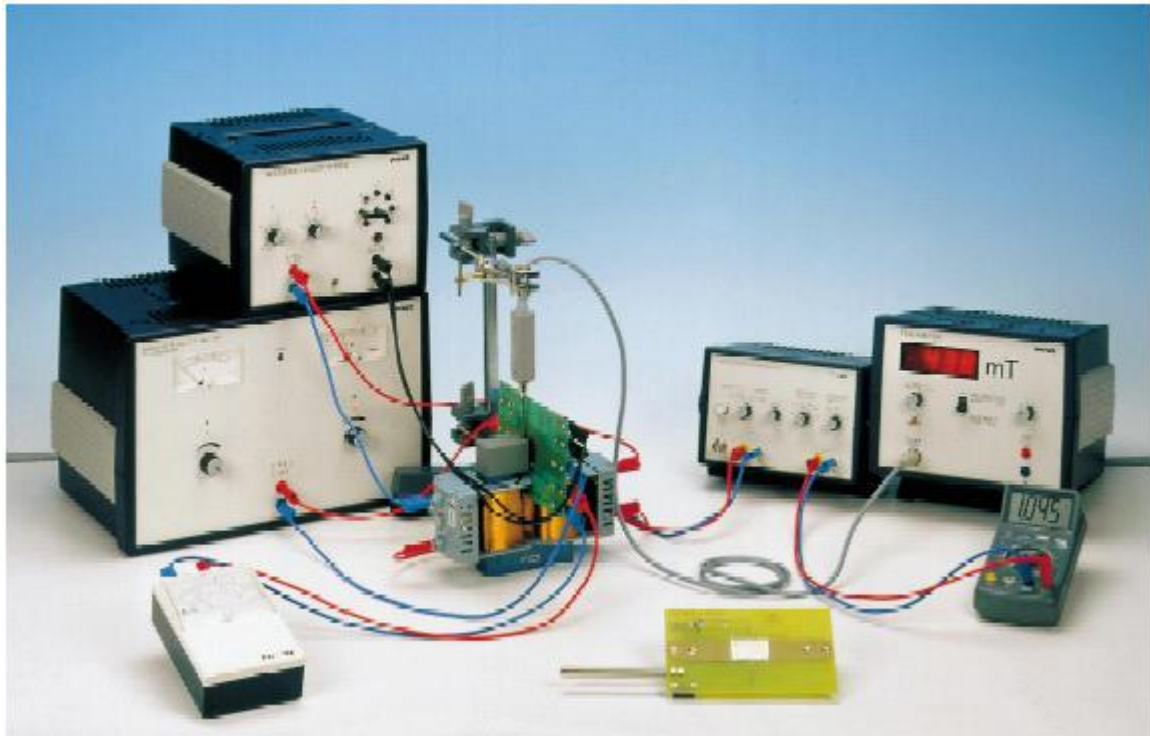
$$R_H = -(n\mu_n^2 - p\mu_p^2)/e(n\mu_n + p\mu_p)^2 \quad (3.2.9)$$

Dobivena relacija (3.2.9) pokazuje da između Hallove konstante i koncentracije nosilaca naboja kod poluvodiča ne postoji tako jednostavna veza kao kod metala. Da bi izračunali koncentraciju jedne vrste nosilaca naboja treba poznavati osim Hallove konstante još tri veličine, koncentraciju druge vrste nosilaca naboja i obje pokretljivosti.



#### 4. EKSPERIMENTALNI POSTAV

Eksperimentalni postav za mjerenje Hall-ovog napona u metalima je prikazan na sl. 4.1 i sastoji se od izvora istosmjerne struje, dviju zavojnica za uspostavljanje magnetskog polja i pripadajućeg izvora te uređaja (voltmetra) za mjerenje Hall-ovog napona. Kako je kod metala taj napon puno manji nego kod poluvodiča, za mjerenje na metalu se još koristi i pojačalo koje signal pojačava  $10^5$  puta. Umjesto da se magnetsko polje direktno mjeri digitalnim teslametrom njegove vrijednosti su baždarene na iznos struje koja prolazi zavojnicama.



Slika 4.1: Eksperimentalni postav za mjerenje Hall-ovog napona u metalima i poluvodičima.

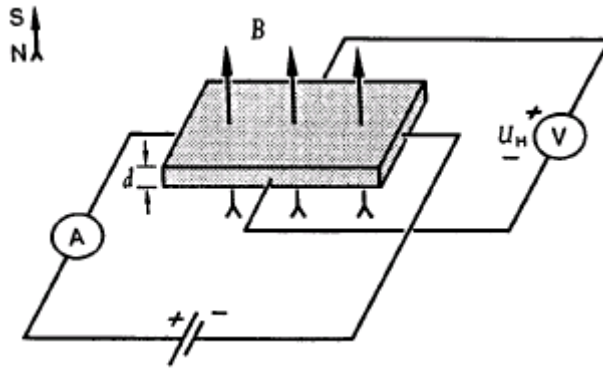
Na sl. 4.2 je shematski prikazan uzorak metala debljine  $d$ , širine  $s$  i dužine  $L$  s negativnim nosiocima naboja te su označeni smjerovi struje, magnetskog polja i Hall-ovog napona označenog s  $U_H$ . Na elektrone koji se gibaju brzinom  $\vec{v}$  u magnetskom polju  $\vec{B}$  djeluje Lorentzova sila:

$$\vec{F}_M = e\vec{v} \times \vec{B}, \quad (4.1)$$

pri čemu je  $e$  naboj elektrona. Neka gustoća struje  $i$  teče u smjeru osi  $x$ , a magnetsko polje neka je u smjeru osi  $z$ . Tada sila ima samo  $y$ -komponentu:

$$F_{My} = ev_x B. \quad (4.2)$$

Zbog toga se elektroni gomilaju na desnoj strani (obzirom na smjer protoka struje) uzorka i dolazi do stvaranja električnog polja  $\vec{E}_H$  u smjeru osi  $y$ .



Slika 4.2: Hall-ov učinak na pravokutnom uzorku materijala s negativnim nosiocima naboja.

To polje je jednako vektorskom produktu gustoće struje i magnetskog polja:

$$\vec{E}_H = R_H \vec{i} \times \vec{B} \quad (4.3)$$

i djeluje na elektrone u gibanju silom  $F_{Ey} = eE_H$ .  $R_H$  je Hall-ova konstanta. Uz izraz za gustoću struje  $i = nev_x$ , gdje je  $n$  gustoća nosilaca naboja, slijedi izraz za Hall-ovu konstantu:

$$R_H = \frac{1}{ne}. \quad (4.4)$$

Obzirom da je električna vodljivost  $\sigma$  dana sa  $\sigma = ne\mu_n$ , pri čemu je  $\mu_n$  pokretljivost elektrona vrijedi i izraz koji povezuje vodljivost, pokretljivost nosilaca naboja i Hall-ovu konstantu:

$$R_H \sigma = \mu_n. \quad (4.5)$$

Kod poluvodiča situacija je kompliciranija jer postoje dvije vrste nosilaca naboja: negativni elektroni i pozitivne šupljine. Zbog njihovih različitih naboja, stvaraju se dva transverzalna električna polja suprotnog smjera duž osi  $y$ . Ako koncentracije elektrona i šupljina nisu jednake ta dva polja se neće poništiti i postojati će rezultantno polje. Općenito, vrijede izrazi za gustoće struja elektrona ( $n$ ) i šupljina ( $p$ ) te ukupnu vodljivost poluvodiča:

$$i_n = nev_{xn} = ne\mu_n E_x, \quad i_p = pev_x = p\mu_p E_x, \quad \sigma = ne\mu_n + p\mu_p \quad (4.6)$$

Nakon izvjesnog računa<sup>1</sup>, dobiva se izraz za Hall-ovu konstantu:

$$R_H = -\frac{1}{e} \cdot \frac{n\mu_n^2 - p\mu_p^2}{(n\mu_n + p\mu_p)^2}. \quad (4.7)$$

Svi dosadašnji izrazi su bili izvedeni uz dvije aproksimacije: svi nosioci naboja imaju iste brzine i nema raspršenja. U stvarnosti brzine nosilaca naboja su statistički raspodijeljene, i to prema Boltmannovoj raspodjeli ako im koncentracija nije prevelika i temperatura preniska. Također, gibajući se kroz kristal nosioci naboja se raspršuju na fononima, atomima nečistoća, dislokacijama i sami međusobno. Pri normalnim uvjetima, dominantno je raspršenje na fononima pa se izraz (7) korigira tako da se desna strana pomnoži faktorom  $3\pi/8 = 1.17$ . Kod n-tipa poluvodiča dodatno vrijedi  $n \gg p$ , pa izraz za Hall-ovu konstantu, koncentraciju elektrona i njihovu pokretljivost konačno postaje:

$$R_H = -\frac{3\pi}{8e} \frac{1}{n}, \quad n = -\frac{3\pi}{8e} \frac{1}{R_H}, \quad \mu_n = -\frac{8}{3\pi} R_H \sigma \quad (4.8)$$

Osim navedenog postoje i dodatne efekti koje će se zanemariti a ovdje tek ukratko napomenuti. Tu je prije svega utjecaj geometrijskog oblika uzorka na Hall-ovu konstantu uz napomenu da je ona veća za veći omjer  $(L/s)^{1/2}$  uzorka, a da je Hall-ov napon proporcionalan omjeru  $s/L$ . Ako kontakti za mjerenje Hall-ovog napona nisu točno jedan nasuprot drugome, javlja se i napon zbog omskog otpora uzorka. Zatim, osim Hall-ovog, interakcija nosilaca naboja s vanjskim magnetskim poljem daje u čvrstom tijelu još četiri učinka (parazitska napona):

transverzalni magnetoelektrični otpor, Ettinghausen-ov učinak koji se manifestira pojavom transverzalnog temperaturnog gradijenta, Nerst-ov učinak koji odgovara pojavi transverzalnog električnog polja; dok se pojava transverzalnog temperaturnog gradijenta zove Righi-Leducovim učinkom. Za postojanje posljednja dva potreban je longitudinalni temperaturni gradijent.

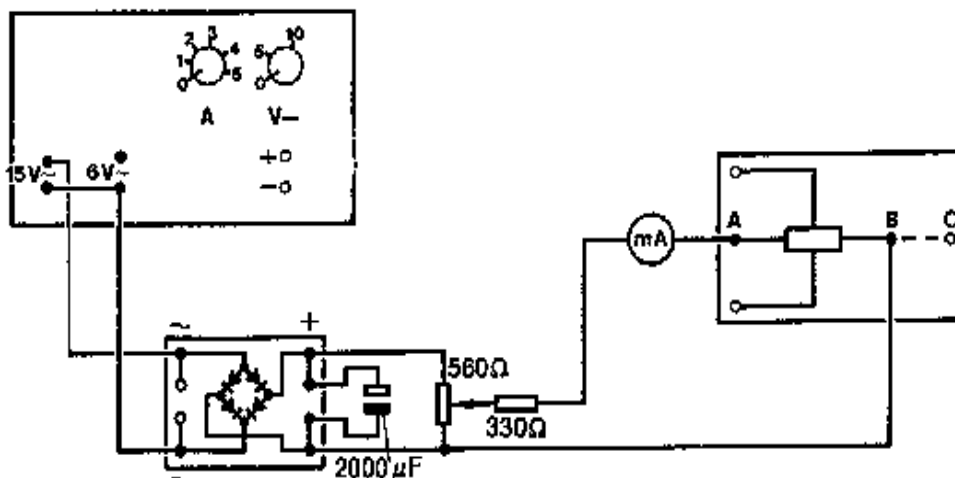
Veza Hall-ovog polja i Hall-ovog napona je jednostavna:  $E_H = V_H / s$ , kao i izraz za gustoću struje:  $i = I / sd$ , pri čemu je  $I$  iznos struje koja teče kroz uzorak. Kombinirajući ta dva izraza, dobiva se izraz za Hall-ovu konstantu ako je mjereno Hall-ov napon, debljina uzorka, vanjsko magnetsko polje i struja kroz uzorak:

$$R_H = \frac{V_H d}{BI} \quad (4.9)$$

U magnetskom polju mijenja se omski otpor uzorka poluvodiča. Do promjene otpora dolazi zato jer na elektrone koji imaju brzine manje ili veće od prosječne brzine kompenzacijsko djelovanje Hall-ovog polja nije potpuno te oni skreću sa lijevo ili desno u odnosu na smjer elektrona prosječne brzine i više se raspršuju što dovodi do promjene otpora. Relativna promjena otpornosti materijala proporcionalna je kvadratu iznosa magnetskog polja<sup>1</sup>:

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \propto B^2 \quad (4.10)$$

Eksperiment je dizajniran tako da za dano magnetsko polje u najvećoj mjeri do izražaja dođe Hallov učinak. Magnetsko polje okomito je na tok struje tj. pravac gibanja nosilaca naboja. Postav eksperimenta je prikazan na slici 4.3.



**Oprez! Kondenzator je elektrolitski, što znači da nije svejedno kako okrenuti polaritet u odnosu na strujni krug!**

Slika 4.3 Shematski prikaz aparature eksperimenta za mjerenje Hallovog napona

Za napajanje uzorka istosmjernom strujom, koristimo izmjenični izvod izvora napajanja. Izmjenični napon se ispravlja pomoću Graetzovog spoja, četiri diode koje služe za punovalno ispravljanje izmjenične struje. Na izlazu toga spoja imamo elektrolitski kondenzator koji služi za uzemljivanje "preživjelih" izmjeničnih komponenti. Potencijometarski djelitelj napona i jedan dodatni otpornik omogućava nam odabir struje koju šaljemo u uzorak. Na taj način možemo podešavati struju kroz uzorak između 0 i 30 mA, što je gornja dozvoljena granica za naš uzorak. Istosmjerno magnetsko polje ostvaruje se pomoću elektromagneta koji se sastoji od dviju serijski spojenih zavojnica kroz koje se propušta istosmjerna struja. Magnetsko polje mjeri se teslametrom. Maksimalna dozvoljena struja kroz zavojnice omogućava postizanje maksimalne

vrijednosti magnetskog polja od 450 mT. Smjer magnetskog polja se mijenja zamjenom polova na priključnicama magneta.

Vršena su mjerenja za obadva smjera magnetskog polja. Dimenzije uzorka su 20 mm x 10mm x 1mm. Mjerenje je izvedeno na slijedeći način: za određenu jakost struje kroz uzorak mjeri se Hallov napon u ovisnosti o magnetskom polju, slika 4.3.

Mjereni su padovi napona između kontakata A i B za različite jakosti struja kroz uzorak kako bi se mogao izračunati otpor uzorka, a onda i vodljivost uzorka, koja je upotrebljena za izračun pokretljivosti nosilaca naboja.

#### Literatura

- <sup>1</sup>Ogorelec, Z.; Praktikum iz fizike čvrstog stanja, I dio; Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovnomatematički fakultet; Zagreb; 1985.; str. 1 – 45  
<sup>2</sup>PHYWE; Laboratory Experiments; Hall effect in n-germanium, LEP 5.3.02  
<sup>3</sup>PHYWE; Laboratory Experiments; Hall effect in metals, LEP 5.3.03

#### Zadaci vježbe:

1. Na sobnoj temperaturi i konstantnom magnetskom polju, izmjerite Hallov napon u ovisnosti o struji kroz uzorak. Odredite Hallovu konstantu i tip nosilaca naboja.
2. Na sobnoj temperaturi i konstantnoj struji kroz uzorak, izmjerite pad napona na uzorku u ovisnosti o jakosti magnetskog polja.
3. Na sobnoj temperaturi i konstantnoj struji kroz uzorak, izmjerite Hallov napon u ovisnosti o jakosti magnetskog polja. Odredite Hallovu konstantu i tip nosilaca naboja.
4. Odredite Hallovu mobilnost  $u_H$  i koncentraciju nosilaca naboja  $n$ . Koje veličine trebate izmjeriti?

Prilikom svih mjerenja, razmislite kako ćete ih izvesti i koje artefakte možete imati.