Viskozna tekućina 2.

« Hidrodinamika »

Ivo Batistić

Fizički odsjek, PMF
Sveučilište u Zagrebu

predavanja 2015 (zadnja inačica 16. travnja 2015.)

Pregled predavanja

Laminarni trag

Disipacija energije

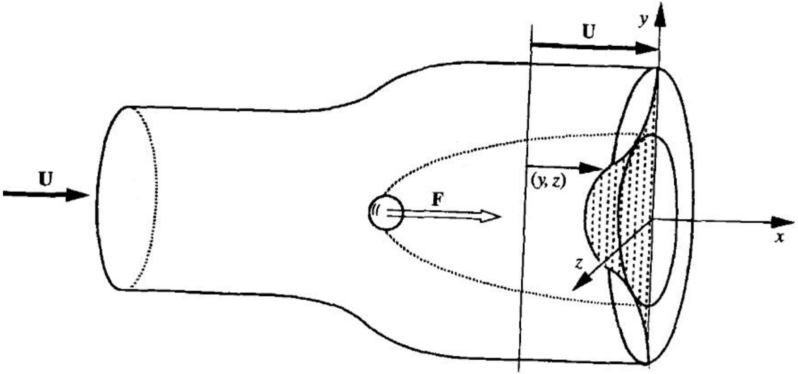
Gušenje gravitacijskih valova

Laminarni trag

Promatramo **stacionarno** opticanje viskozne tekućine oko tijela proizvoljnog oblika. Brzina opticanja neka je $\vec{U}$ (brzina tekućine u beskonačnosti).

- Brzina tekućine, $\vec{u}$ *značajnije* razlikuje od brzine opticanja $\vec{U}$ **samo** u relativno uskom području iza tijela.
- To područje iza tijela nazivamo **laminarni trag**.
- Laminarni trag je nastao iz onih strujnica koje su prošle jako blizu površine tijela - unutar graničnog sloja.
- Strujanje tekućine izvan graničnog sloja i izvan laminarnog traga može se tretirati kao potencijalno gibanje idealne tekućine.
- U graničnom sloju nastaju veliki gradijenti tangencijalne komponente brzine (u idealnoj tekućini to je diskontinuitet) koji prestavljaju vrtloge i koji se dalje propagiraju u područje traga.

Laminarni trag



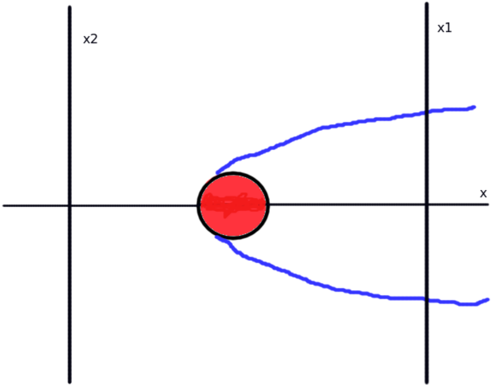
Opticanje tijela i lanimarni trag iza tijela.

Laminarni trag

Gibanje tekućine u tragu moguće je povezati sa silama koje dijeluju na tijelo.

Problem ćemo rješavati u sustavu u kojem tekućina (u beskonačnosti) miruje:

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{U} + \vec{v}(\vec{r}) \qquad \text{gdje } |\vec{v}| \xrightarrow{|\vec{r}|\to\infty} 0.$$



Ogradit ćemo tijelo zamišljenim ravninama ispred i pozadi koje se nalaze u x_1 i x_2.

Izračunat ćemo promjenu impulsa u prostoru ograničenom ovim dvijema ravninama.

Laminarni trag

Sile koje dijeluju na tijelo rezultat su prijenosa impulsa tekućiom kroz zamišljene ravnine:

$$F_i = \oint \Pi_{ij} \, df_j,$$

gdje je:

$$\Pi_{ij} = p \, \delta_{ij} + \rho(U_i + v_i)(U_j + v_j).$$

Tlak u tekućini možemo napisati da je:

$$p(\vec{r}) = p_0 + p'(\vec{r}),$$

gdje je p' razlika tlaka od konstantne vrijednosti koju tekućina ime u beskonačnosti (p_0) koja se pojavljuje zbog opticanja tekućine oko tijela. Također, brzine $\vec{v}$ u području traga daleko od tijela puno su manje od brzine $\vec{U}$.

Laminarni trag

Izračunavajući tok impulsa kroz zamišljene ravnine koje su dovoljno daleko od tijela, moguće je napraviti određene aproksimacije:

$$\begin{aligned} F_i &= \oint \left[(p_0 + p')\,\delta_{ij} + \rho\,(U_i + v_i)(U_j + v_j) \right] \\ &\approx \oint (p'\,\delta_{ij} + \rho v_i U_j)\, df_j . \end{aligned}$$

U ovom izrazu:

- član s konstantnim impulsom p_0 se točno pokrati.
- Kvadratični članovi $\rho U_i U_j$ se točno pokrate
- Kvadratični članovi $\rho v_i v_j$ su zanemareni napram članova linearnih u brzini $\vec{v}$.
- Linearni član $\rho U_i v_j$ se točno pokrati zbog zakona sačuvanja količine tvari unutar područja omeđenog ravninama.

$$\rho\, U_i \oint df_j v_j \equiv 0$$

Laminarni trag

Konačno:

$$
\begin{aligned}
F_x &= \left(\iint\limits_{x=x_2} - \iint\limits_{x=x_1} \right) dy\,dz \; (p' + \rho v_x U) \\
F_y &= \left(\iint\limits_{x=x_2} - \iint\limits_{x=x_1} \right) dy\,dz \; \rho v_y U \\
F_z &= \left(\iint\limits_{x=x_2} - \iint\limits_{x=x_1} \right) dy\,dz \; \rho v_z U
\end{aligned}
$$

Ovi se izrazi mogu dalje pojednostaviti.

Laminarni trag

Koristeći Bernoullijevu jednadžbu za opis gibanja tekućine **izvan** traga, te zanemarujući članove kvadratične u $\vec{v}$:

$$p + \frac{1}{2}\rho(\vec{U} + \vec{v})^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho\vec{U}^2 = \text{konst.}$$

izlazi:

$$p' + \rho v_x U \approx 0 \qquad \text{(područje izvan traga!).}$$

Untar područja traga,

$$p' \sim \rho v^2 \ll \rho v_x U$$

pa je:

$$F_x \approx -\iint_{\text{trag}} dy\, dz \;\; \rho v_x U.$$

Integrira se samo unutar područja traga.

Laminarni trag

Za druge dvije sile, možemo koristiti činjenicu da se gibanje tekućine **izvan traga** može prikazati kao gradijent potencijala:

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

pa su integracije:

$$\iint v_y \, dy \, dz = \int dz \int dy \; \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \qquad \text{(izvan traga).}$$

Isto vrijedi i za z-komponentu sile. Općenito vrijedi.

$$F_i \approx -\rho U \iint_{\text{trag}} dy \, dz \;\; v_i \qquad (i = x, y, z).$$

Integrira se samo unutar područja traga.

Laminarni trag

Za određivanje brzine u tragu možemo se poslužiti Oseenovom aproksimacijom Navier-Stokesove jednadžbe, pod uvjetom da je x_1 (položaj ravnine) dovoljno daleko od tijela:

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} \approx (\vec{U}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}\frac{p}{\rho} + \nu\,\Delta\vec{v}.$$

Nadalje, unutar traga moguće je zanemariti drugu derivaciju po x-u u Laplace-ianu, naspram prostornih derivacija po y i z. Naime, širina traga raste korijenski s udaljenošću od tijela:

$$U\frac{\partial v}{\partial x} \sim \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \qquad \Rightarrow \qquad U\frac{v}{X} \sim \nu\frac{v}{Y^2}$$

gdje smo pretpostavili da su X i Y područja preko kojih se brzina značajnije mijenja u x i y smjeru. Odavde izlazi daje:

$$Y \sim \sqrt{\frac{\nu X}{U}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{v}{Y^2} \gg \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \frac{v}{X^2}$$

Laminarni trag

Jednadžbu koju je potrebno riješiti je:

$$U\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = -\vec{\nabla}\frac{p}{\rho} + \nu\left(\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}\right)$$

Budući da je riječ o linearnoj nehomogenoj parcijalnoj DJ, rješenje možemo prikazati kao zbroj rješenja homogene jednadžbe i partikulanog rješenja nehomogene jednadžbe:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Pri tome $\vec{v}_1$ zadovoljava homogenu PDJ:

$$U\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial z^2}\right),$$

a partikulano rješenje *probat* ćemo priklazati kao gradijent nekog skalara:

$$\vec{v}_2 = \vec{\nabla}\Phi.$$

Laminarni trag

Pri tome zamemarujemo partikularno rješenje za x-komponetu jer su prostorne derivacije po y-u i z-u veće od derivacija po x-u.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \ll \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Stoga x-komponenta brzine zadovoljava jednadžbu diffuznog tipa:

$$U\frac{\partial v_x}{\partial x} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right),$$

čije je rješenje:

$$v_x = -\frac{F_x}{4\pi \, \rho \, \nu x} \ \exp \left[-U \, \frac{y^2 + z^2}{4\nu x} \right].$$

Pri tome smo nepoznatu multiplikativnu konstantu u rješenju odredili iz uvijeta:

$$F_x = -\rho U \iint dy \, dz \ \ v_x$$

Laminarni trag

Rješenja za y i z komponentu brzine su dana analognim izrazima. Pri tome možemo izabrati takav koordinatni sustav da je sila uzgona, F_y samo u y smjeru, tj. $F_z = 0$:

$$
\begin{aligned}
v_y &= -\frac{F_y}{4\pi\,\rho\,\nu x}\exp\left[-U\,\frac{y^2+z^2}{4\nu x}\right] + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \\
v_z &= \frac{\partial\Phi}{\partial z}
\end{aligned}
$$

Da bi odredili nepoznatu skalarnu funkciju Φ možemo se poslužiti jednadžbom kontinuiteta:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
&\approx \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}\right)\Phi + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} = 0
\end{aligned}
$$

Laminarni trag

Diferenciranjem te jednadžbe po x-u:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_{1y}}{\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}\right)\frac{\nu}{U}\left(\frac{\partial v_{1y}}{\partial y}\right)$$

slijedi da je:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\nu}{U}\frac{\partial v_{1y}}{\partial y}.$$

Odavde se integracijom dobiva da je:

$$\Phi = -\frac{F_y}{2\pi\,\rho\,U}\,\frac{y}{y^2+z^2}\left\{\exp\left[-U\,\frac{y^2+z^2}{4\nu x}\right]-1\right\}.$$

Ako ne postoji sila uzgona, strujanje tekućine u tragu je aksijalno simetrično. Tada je $\Phi = 0$.

Laminarni trag

- Unutar traga točno na x-osi brzine v_x, v_y, v_z opadaju s udaljenosti od tijela kao $1/x$.
- Brzine eksponencijalno brzo trnu s udaljavanjem od x osi. Širina područja gdje su brzine različite od nule, tj. širina traga jednaka je:
$$Y \sim \sqrt{\frac{\nu X}{U}}$$
gdje je X udaljenost od tijela.
- Promjena brzine u x-smjeru je puno sporija od eksponencijalnog trnjenja brzina u y- i z-smjeru.

Laminarni trag

Gibanje tekućine izvan traga opisano je potencijalnom Φ koji zadovoljava Laplaceovu jednadžbu:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = 0$$

Rješenje se može tražiti u obliku:

$$\Phi = \frac{a}{r} + \frac{\cos\phi}{r} f(\theta).$$

- Prvi, sferno simetrični član povezan je sa silom otpora F_x.
- Drugi član odgovoran je za pojavu sile uzgona F_y.

Laminarni trag

Uvrštavanjem pretpostavljenog rješenja u Laplaceovu jednadžbu dobiva se jednadžba za nepoznatu funkciju *f*:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{df}{d\theta}\right) - \frac{f}{\sin\theta} = 0.$$

čije je rješenje:

$$f = b\cot\left(\frac{1}{2}\theta\right)$$

Nepoznati koeficijenti u rješenju, *a* i *b*, trebaju se odrediti povezujući ovo potencijalno rješenje i poznato rješenje u tragu. Tako se na kraju dobiva:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\,\rho\,U}\frac{1}{r}\left(-F_x + F_y\cos\phi\cot\left(\frac{1}{2}\theta\right)\right)$$

Disipacija energije u nestlačivoj tekućini

Zakon sačuvanja kinetičke energije, obrađen u 4. predavanju:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{v^2}{2}\right) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_j \frac{v^2}{2} + \sum_i v_i P_{ij}\right) = \sum_{ij} P_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

gdje je:

$$P_{ij} = p\,\delta_{ij} - \eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}(\vec{\nabla}\cdot\vec{v})\right] - \zeta\,\delta_{ij}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{v}).$$

Pri tome smo potencijalnu energiju i rad u vanjskom polju smo zanemarili.

Disipacija energije u nestlačivoj tekućini

U slučaju nestlačive tekućine gustoća izvora/ponora energije (desna strana jednadžbe balansa) postaje:

$$-\eta \sum_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] = -\frac{\eta}{2} \sum_{ij} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right]^2 .$$

Stoga je ukupni gubitak kinetičke energije u nekom volumenu jednak:

$$\dot{E}_k = -\frac{\eta}{2} \int_V dV \sum_{ij} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right]^2 .$$

Isti se izraz dobiva za gubitke ukupne mehaničke energije, $E_k + E_p$, jer gubitak/dobitak potencijalne energije kompenziran je dobitkom/gubitkom kinetičke energije.

Gušenje gravitacijskih valova

Gubitak mehaničke energije gravitacijskih valova u nekom volumenu može se izračunati koristeći izraz:

$$\dot{E}_{meh} = -\frac{\eta}{2} \int\limits_V dV \sum_{ij} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right]^2 .$$

Već smo prije pokazali da se u slučaju gravitacijskih valova gibanje može tretirati kao približno potencijalno:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Stoga je:

$$\dot{E}_{meh} = -2\eta \int\limits_V dV \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_i} \right)^2 .$$

Gušenje gravitacijskih valova

Koristeći izraz za potencijal za slučaj gravitacijskih valova u dubokoj vodi:

$$\Phi = \Phi_0 \cos(kx - \omega t + \alpha)\, e^{kz},$$

te usrednjavajući gubitak energije po periodu titranja:

$$\overline{\dot{E}}_{meh} = -8\eta\, k^4 \int dV\, \overline{\Phi^2}$$

Sama mehanička energija gibanja može se izračunati na isti način:

$$\overline{E}_{meh} = \overline{E}_k + \overline{E}_p = 2E_k = \rho \int dV\, \overline{v^2} = \rho \int dV \sum_i \overline{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)^2} = 2\rho\, k^2 \int dV\, \overline{\Phi^2}$$

Koeficijent gušenja:

$$\gamma = \frac{\overline{\dot{E}}_{meh}}{2\overline{E}_{meh}} = 2\nu\, k^2 = 2\nu \frac{\omega^4}{g^2}.$$

Valovi velikih valnih duljina (ali kraćih od dubine!) se sporo guše.