Turbulentnost

« Hidrodinamika »

Ivo Batistić

Fizički odsjek, PMF
Sveučilište u Zagrebu

predavanja 2015 (zadnja inačica 19. svibnja 2016.)

Pregled predavanja

Stabilnost stacionarnog gibanja

Stabilnost stacionarnog gibanja

- Uz stacionarne rubne uvjete, NS jednadžba uvijek ima **stacionarno rješenje**, bez obzira na Reynoldsov broj.
- Ova stacionarna rješenja ne pojavljuju se nužno u prirodi.
  Da bi se neko stacionarno rješenje pojavilo u prirodi, nužno je da je ono stabilno na male smetnje.
- Mala smetnja se uvijek može pojaviti kao rezultat nečega što nije uzeto u obzir u NS jednadžbama. Mala smetnja
  - ili će vremenom trnuti - rješenje vremenski konvergira stacionarnom rješenju NS jednadžbe
  - ili će vremenom postati sve veća i veća te se dobiva rješenje koje ima vremensku dinamiku.

Matematički opis nestabilnosti

Matematički opis nestabilnosti

Pretpostavimo da je $\vec{v}_0(\vec{r})$ stacionarno rješenje NS (Navier-Stokesovu) jednadžbe

$$(\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_0 = -\frac{1}{\rho}\,\vec{\nabla} p_0 + \nu\,\Delta\vec{v}_0$$

Također pretpostavljamo da je:

$$\vec{\nabla}\vec{v}_0 = 0. \quad (\text{nestlačiva tekućina.})$$

Neka je $\vec{v}_1(\vec{r}, t)$ mala smetnja. Brzina $\vec{v}_0(\vec{r}) + \vec{v}_1(\vec{r}, t)$ zadovoljava nestacionarnu NS jednadžbu:

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1 + \underbrace{(\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1}_{\text{članovi 2. reda}} = -\frac{1}{\rho}\,\vec{\nabla} p_1 + \nu\,\Delta\vec{v}_1$$

pri čemu je:

$$\vec{\nabla}\vec{v}_1 = 0$$

Matematički opis nestabilnosti

Rubni uvjet na malu smetnju $\vec{v}_1$ isti je kao i za $\vec{v}_0$, tj. mora isčezavati na rubu.

Brzina $\vec{v}_1$ zadovoljava **linearnu** PDJ s koeficijentima koji su samo funkcije koordinata, ali ne i **vremena**. Vremenska evolucija općeg rješenja može se prikazati kao superpozicija oscilirajućih rješenja:

$$\vec{v}_1(\vec{r}, t) = \sum_{\omega} \vec{v}_1(\vec{r}, \omega)\, e^{-\imath\omega t}$$

Brzine $\vec{v}_1(\vec{r}, \omega)$ su Fourierovi transformati općeg rješenja. Frekvencije ω nisu priozvoljne nego su određene DJ i rubnim uvjetima.

Frekvencije ω su općenito kompleksni brojevi:

$$e^{-\imath(\omega' + \imath\omega'')t} = e^{-\imath\omega' t} e^{\omega'' t}$$

- Ako je $\omega'' < 0$ - Stacionarno rješenje je stabilno.
- Ako je $\omega'' > 0$ - Stacionarno rješenje je nestabilno!

Matematički opis nestabilnosti

Problem određivanja stabilnosti je općenito složen i težak. Ono što je poznato:

- Za dovoljno male $\mathcal{R}$ (velika viskoznost) stacionarni tok je stabilan.
- Povećavanjem $\mathcal{R}$ stacionarni tok postaje nestabilan.
  Postoji kritična vrijednost Reynoldsovog broja, $\mathcal{R}_C$.
  Kada je $\mathcal{R} > \mathcal{R}_C$ stacionarni tok je nemoguć (nestabilan).
- Kritična vrijednost $\mathcal{R}_C$ ovisi o problemu koji se razmatra. Tipična vrijenost: $\mathcal{R}_C \sim$ 10-100. Npr.

$$\mathcal{R}_C = \frac{u\,d}{\nu} \approx 30$$

  za opticanje cilindra dijametra d.

Landauov opis nestabilnosti

Landauov opis pojave nestabilnosti

- Kada je $\mathcal{R} < \mathcal{R}_C$, sve frekvencije su stabilne ($\omega'' < 0$).
- Kada je $\mathcal{R} = \mathcal{R}_C$, barem jedna frekvencija ima ω'' = 0.
- Kada je $\mathcal{R} \geq \mathcal{R}_C$, barem jedna frekvencija ima $\omega'' > 0$.
  (te vrijedi: $\omega' \gg \omega''$)

Imaginarni dio frekvencije kao funkcija od $\mathcal{R}$ ima nul-točku za $\mathcal{R} = \mathcal{R}_C$, te vrijedi:

$$\omega''(\mathcal{R}) \sim \mathcal{R} - \mathcal{R}_C.$$

Za *malu* smetnju možemo napisati:

$$\vec{v}_1(\vec{r}, t) = A(t)\,\vec{f}(\vec{r}),$$

gdje je:

$$A(t) \sim e^{-\imath\omega' t} e^{\omega'' t}.$$

$\omega' + \imath\omega''$ je upravo ona frekvencija koja postaje nestabilna.

Landauov opis pojave nestabilnosti

Izraz za $A(t)$ vrijedi samo u jednom malom vremenskom intervalu dok brzina $\vec{v}_1$ ne naraste dovoljno da aproksimacija $v_0 \gg v_1$ više ne vrijedi (aproksimacija se sastojala u zanemarivanju članova drugug reda u v_1). Jasno je da $A(t)$ ne može rasti u beskonačnost, nego se saturira na neku konačnu vrijednost.

Kako bi eliminirali vremenski periodični dio promatrat ćemo samo amplitudu $|A(t)|$. Za mala vremena vrijedi:

$$|A(t)| \sim e^{\omega'' t}.$$

Amplituda zadovoljava DJ:

$$\frac{d}{dt}|A(t)|^2 = 2\omega'' \cdot |A(t)|^2 = f(A(t), A(t)^\star).$$

Landauov opis pojave nestabilnosti

Nepoznata funkcija $f(A, A^\star)$ za male vrijednosti amplitude proporcionalna je kvadratu amlitude, a koeficijent proporcionalnosti je $2\omega''$:

$$f(A(t), A(t)^\star) = 2\omega'' \cdot |A(t)|^2 + \ldots (\text{članovi višer reda u amlitudi}) \ldots$$

Kada amplituda $|A|$ više nije mala, potrebno je uzeti u obzir članove višeg reda razvoju funkcije f po A i $A^\star$.

Prvi slijedeći članovi u razvoju su:

$$|A|^2 A \qquad \text{i} \qquad |A|^2 A^\star.$$

To su članovi koji brzo ociliraju jer je $\omega' \gg \omega''$.

Landauov opis pojave nestabilnosti

Kako bi eliminirali brzo oscilirajuće članove, DJ koju zadovoljava kvadrat amplitude **usrednjavamo** preko perioda $2\pi/\omega'$.
Dakle zanima nas:

$$\overline{|A|^2} = \frac{\omega'}{2\pi} \int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega'}} dt\, |A(t)|^2$$

Usrednjeni kvadrat amplitude zadovoljava DJ koja ne sadrži više brzo oscilirajuće članove. Stoga je:

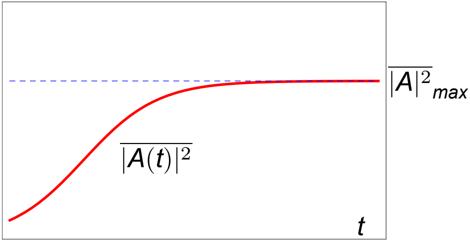
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\overline{|A(t)|^2} &= 2\omega'' \cdot \overline{|A(t)|^2} - \alpha\overline{|A(t)|^4} + \dots \\ &\approx 2\omega'' \cdot \overline{|A(t)|^2} - \alpha(\overline{|A(t)|^2})^2. \end{aligned}$$

Landauov opis pojave nestabilnosti

Diferencijalna jednadžba se može točno riješiti te se dobiva:

- za mala vremena postoji eksponencijalni rast.
- za veća vremena dolazi do saturacije na konačnu vrijednost:

$$\overline{|A|^2}_{max} = \frac{2\omega''}{\alpha}.$$



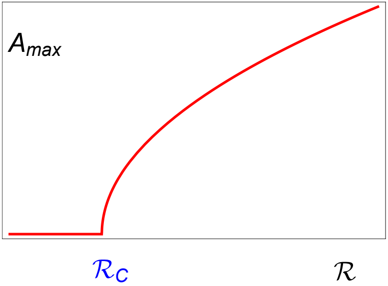
Landauov opis pojave nestabilnosti

Kao što je već prije kazano:

$$\omega''(\mathcal{R}) \sim \mathcal{R} - \mathcal{R}_C$$

pa je:

$$A_{max} = \sqrt{\overline{|A|^2}_{max}} \sim \sqrt{\mathcal{R} - \mathcal{R}_C}$$



Ovo odgovara situaciji kada je $\alpha > 0$.

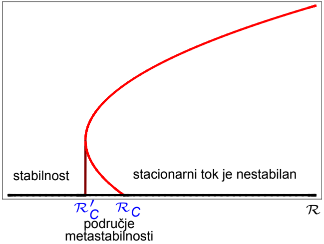
Landauov opis pojave nestabilnosti

Ako je $\alpha \leq 0$, tada članovi četvrtog reda u razvoju funkcije *f* više nisu dovoljni te je potrebno ići na članove višeg reda. Npr. šestog ako je $\beta > 0$:

$$\frac{d}{dt}\overline{|A(t)|^2} = 2\omega'' \cdot \overline{|A(t)|^2} + |\alpha|(\overline{|A(t)|^2})^2 - \beta(\overline{|A(t)|^2})^3 + \dots$$

Tada je:

$$\overline{|A|^2}_{max} = \frac{|\alpha|}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{|\alpha|^2}{4\beta^2} + \frac{2|\alpha|}{\beta}\omega''}$$



U području metastabilnosti stacionarni tok je stabilan na (beskonačno) malu smetnju, ali je nestabilan na smetnju konačne (dovoljno velike) amplitude.

Landauov opis pojave nestabilnosti

- Nelinearni član $(\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1$ nije zanemariv ako $A(t)$ nije infinitezimalno mali. Taj član dovodi do saturacije $A(t)$.
- Isti taj član generira članove koji imaju dvostruku i višestruko veću frekvenciju titranja od ω.
- Rješenje sa samo jednom frekvencijom titranja nije dobro.
- Pravo rješenje je linearna kombinacija članova koji imaju kao frekvenciju titranja višekratnike od ω:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \vec{A}_n(\vec{r}) e^{-\imath\, n\, \phi(t)}$$

gdje je:

$$\phi(t) = \omega t + \beta.$$

β je faza čija je vrijednost određena početnim uvjetima. Ona predstavlja **jedan stupanj slobode** u rješenju.

Landauov opis pojave nestabilnosti

- Landau-Hopfov scenario nastanka turbulentnosti pretpostavlja da daljnim povećanjem $\mathcal{R}$ i druge frekvencije postaju nestabilne. Tada je pravo rješenje lienarna kombinacija svih frekvencija (modova) i **njihovih harmonika**:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \sum_{n_1,n_2,\dots} \vec{A}_{n_1,n_2,\dots}(\vec{r}) \cdot e^{-\imath\,(n_1\,\phi_1(t)+n_2\,\phi_2(t)+\dots)},$$

  gdje su:

$$\phi_i(t) = \omega_i t + \beta_i. \qquad (i = 1, 2, \dots).$$

  Proizvoljne faze β_i definirane su **početnim uvjetima**, ali ne i rubnim.
- Svaka nestabilna frekvencija predstavlja jedan stupanj slobode, što je opisanom fazom čija je vrijednost određena početnim uvjetima.
- Frekvencije ω_i su međusobno nesumjerljive, tako da se $\vec{v}(t)$ mijenja u vremenu **aperiodično**, odnosno **kaotično**.

Nestabilnost tangencijalnog prekida

Nestabilnost tangencijalnog prekida

Tangencijalni prekid je situacija kada tangencijalna komponenta brzine na nekoj površini ima skok. Ta situacija može se pojaviti samo u idealnoj tekućini.

- Mirujuće tijelo oko kojeg se giba idealna tekućina.
- Dvije idealne tekućine (različitih gustoća) razdvojenih površinom:
  - morska i riječna voda kod ušća rijeka
  - izlijev otpadnih/kanalizacijskih voda
  - ispušna cijev auta, mlazni avioni, rakete, fen

U slučaju viskozne tekućine tangencijalni prekid nije skokovit već je razmazan preko **graničnog sloja** u kojem postoje veliki gradijenti tangencijalne komponente brzine. U viskoznoj tekućini nestabilnost tangencijalnog prekida odnosi se na **nestabilnost graničnog sloja**.

Nestabilnost tangencijalnog prekida

Promatramo jednostavni primjer dviju idealnih tekućina, različitih gustoća i različitih brzina separiranih *tangencijalnim prekidom:* skokom u gustoćama i brzinama.

$\rho_1 \quad \vec{v}_1 \longrightarrow$ $\qquad z > 0$

$z = 0$

$\rho_2 \quad \vec{v}_2 \longrightarrow$ $\qquad z < 0$

Neka je početno stanje (t < 0):

$\vec{v}(\vec{r}, t < 0) = \vec{v}_0 \longrightarrow \qquad p_1(\vec{r}, t < 0) = p_0$ $\qquad z > 0$

$z = 0$

$\vec{v}(\vec{r}, t < 0) = 0 \qquad p_2(\vec{r}, t < 0) = p_0$ $\qquad z < 0$

Nestabilnost tangencijalnog prekida

Provjeravamo da su jednadžbe gibanja zadovoljene:

$$
\begin{aligned}
(\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_0 &= -\frac{1}{\rho_1}\,\vec{\nabla} p_0 = 0 \qquad (z > 0) \\
(\vec{0} \cdot \vec{\nabla})\vec{0} &= -\frac{1}{\rho_2}\,\vec{\nabla} p_0 = 0 \qquad (z < 0)
\end{aligned}
$$

Uvodimo malu smetnju na početno stanje, te promatramo njenu evuluciju u vremenu:

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{v}_0 + \vec{v}_1'(\vec{r},t) \qquad p_1(\vec{r},t) = p_0 + p_1'(\vec{r},t) \qquad z > 0$$

$$z = 0$$

$$\vec{v}(\vec{r},t) = 0 + \vec{v}_2'(\vec{r},t) \qquad p_2(\vec{r},t) = p_0 + p_2'(\vec{r},t) \qquad z < 0$$

Članove drugog reda u $\vec{v}'_{1/2}(\vec{r},t)$ i $p'_{1/2}(\vec{r},t)$ u jednadžbama gibanja zanemarujemo. Pretpostavit ćemo da su tekućine nastlačive, pa je:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1'(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_2(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_2'(\vec{r},t) = 0$$

Nestabilnost tangencijalnog prekida

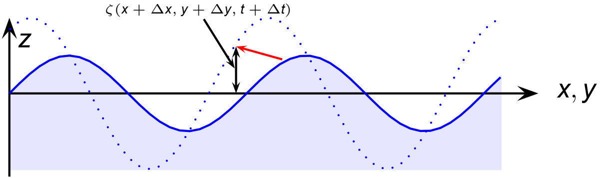
Uvodimo funkciju koja opisuje površinu razdvajanja dvaju tekućina:

$$z = \zeta(\vec{r}, t)$$

Vrijedi:

$$v_z(\vec{r}, t) = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\zeta(\vec{r}, t)$$

To je funkcija slična onoj kojom smo opisivali površinske gravitacijske valove.



Nestabilnost tangencijalnog prekida

Raspišimo jednadžbe gibanja za $t > 0$ zanemarujući članove drugog reda. Za $z > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}_1'}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})\vec{v}_1' &\approx \frac{1}{\rho_1}\,\vec{\nabla} p_1' \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1' &= 0 \end{aligned}$$

Ako je brzina $\vec{v}_0$ u x-smjeru, onda je:

$$\frac{\partial \vec{v}_1'}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \vec{v}_1'}{\partial x} \approx -\frac{1}{\rho_1}\,\vec{\nabla} p_1'$$

Primjenimo li divergenciju na ovu jednadžbu, dobiva se:

$$\Delta p_1' = 0 \qquad\qquad (\text{jer je } \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1' = 0)$$

Nestabilnost tangencijalnog prekida

Riješenje tražimo u obliku:

$$p_1' = f(z) \cdot e^{\imath(kx - \omega t)}$$

Budući da su jednadžbe linarizirane, opće rješenje je linearna kombinacija svih partikularnih rješenja.
Nepoznata funkcija $f(z)$ zadovoljava jednadžbu:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0$$

čije je rješenje eksponencijalna funkcija. Zadržavamo samo ono eksponecijalno rješenje koje je konačno za $z > 0$:

$$f(z) = p_1^{(0)}\, e^{-kz} \qquad \Rightarrow \qquad p_1' = p_1^{(0)}\, e^{-kz}\, e^{\imath(kx - \omega t)}$$

Iz jednadžbe za brzinu $\vec{v}_1'$, pišemo jednadžbu za z-komponentu:

$$\frac{\partial v_z'}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_z'}{\partial x} \approx -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1'}{\partial z} = \frac{k}{\rho_1}\, e^{-kz}\, e^{\imath(kx - \omega t)}$$

Nestabilnost tangencijalnog prekida

Riješenje tražimo u obliku ravnih valova:

$$v'_z = v_z^{(0)}\; e^{-kz}\, e^{\imath(k\,x-\omega t)}$$

pa je:

$$v_z^{(0)} = p_1^{(0)}\;\frac{k}{\imath\;\rho_1}\;\frac{1}{v_0 k - \omega} \qquad \text{za } \forall x \text{ i } z > 0.$$

Prostorno-vremenska ovismost funkcija koja razdvaja dvije tekućine može se dobiti iz jednadžbe koju smo već prije izveli:

$$v'_z = \left.\frac{\partial\zeta}{\partial t} + v_0\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right|_{z=\zeta\approx 0}$$

pa je tako:

$$v_z^{(0)} = \zeta^{(0)}\;\imath(v_0 k - \omega)$$

odnosno:

$$p_1^{(0)} = -\zeta^{(0)}\cdot\frac{\rho_1}{k}\,(v_0 k-\omega)^2 \qquad \text{za } z = +0$$

Naglašeni k dolazi od gradijenta tlaka koji ima eksponecijalno trnući član u z.

Nestabilnost tangencijalnog prekida

Sliči izvod se može napraviti i za područja $z < 0$, s time da jei

- početna brzina gibanja tekučine jednaka nuli
- gustoća tekućine je ρ_2
- i tlak ima eksponecijalnu funkciju koja trne za $z < 0$ pa njena derivacija ima suprotni predznak.

Dakle:

$$p_2^{(0)} = +\zeta^{(0)} \cdot \frac{\rho_2}{k} (\omega)^2 \qquad \text{za } z = -0$$

Kako se tlak kontinuirano mijenja na površini i ζ ima istu vrijednost, tada mora biti:

$$\rho_1 (\omega - v_0 k)^2 = -\rho_2 (\omega)^2$$

odnosno

$$(\rho_1 + \rho_2)\omega^2 - 2\rho_1 v_0 k \omega + \rho_1 (v_0 k)^2 = 0$$

dobiva se jednadžba za frekvenciju titranja male smetnje valnog broja k,

Nestabilnost tangencijalnog prekida

Riješenja jednadžbe:

$$\omega(k) = v_0 k \, \frac{\rho_1 \pm \imath\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\rho_1 + \rho_2}$$

imaju i realni i imaginarni dio. U granici kada tekućine imaju iste gustoće:

$$\omega(k) = v_0 k \, \frac{1 \pm \imath}{2}$$

- $\omega(k)$ je kompleksni broj i ima pozitivni imaginarni dio.
- Tangecijalni prekid je **uvijek** nestabilan.
- Proizvoljno mala smetnja površine razdvajanja počinje eksponencijalno rasti u vremenu.
- Eksponecijalni rast se moze zaustaviti samo s nelinearnim članovima koje smo zanemarili u izvodu.

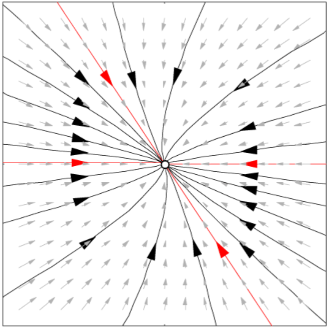
Prostor stanja

Prostor stanja

- Svaka točka u prostoru stanja (ili faznom prostoru) predstavlja jedno moguće stanje sustava.
- Radi se u multidimenzionalnom prostoru s velikim brojem stupnjeva slobode
- Vremenska evolucija sustava se može prikazati kao trajektorija u prostoru stanja.

Stabilno stacionarno stanje

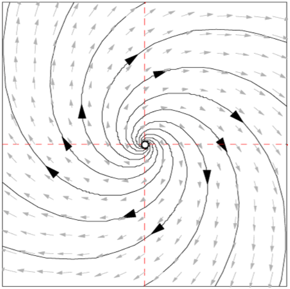
Stacionarno stanje u prostoru stanja predstavlja točku koja se **ne giba - miruje**. Vremenska evolucija točaka u blizini stabilne stacionarne točke (njihova trajektorija u prostoru stanja) je takva da se one vremenski približavaju i završavaju u stacionarnoj točci.

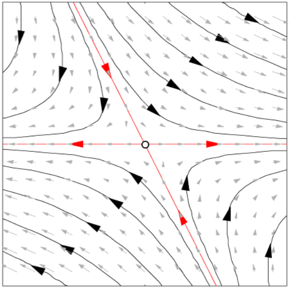


Prostor stanja

Nestabilno stacionarno stanje

Trajektorije točaka oko nestabilnog stacionarnog stanja se udaljavaju od stacionarnog stanja.



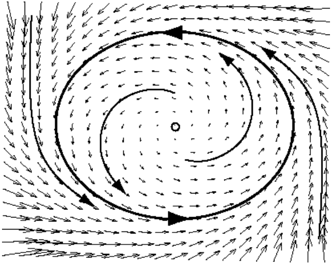


Prostor stanja može imati područja koja sadrže stabilna i nestabilna stacionarna stanja. Trajektorije točaka oko nestabilnog stacionarnog stanja mogu završavati u drugom **stabilnom stacionarnom stanju**, ili na višedimenzionalnom objektu: **zatvorena petlja**, **višedimenzionalni torusi** ili neki **fraktalni objekti** (čutni atraktor).

Stabilno periodičko gibanje

Periodičko gibanje u prostoru stanja prikazuje se kao zatvorena perlja.

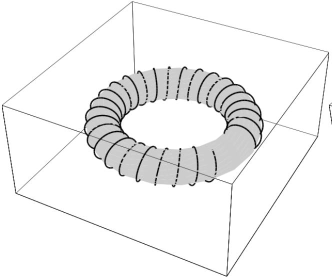
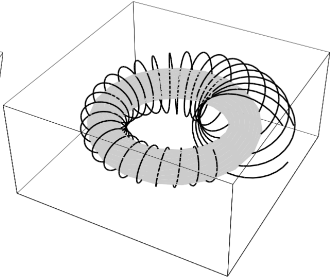
Vremenska evolucija točaka oko stabilnog periodičkog gibanja završavaju na zatvorenoj petlji.



Prostor stanja

Dvoperiodičko gibanje

Dvoperiodičko gibanje u prostoru stanja prikazuje se kao torus.

Ako je dvoperiodičko gibanje stabilno, trajektorije točaka oko torusa završavaju na torusu.

Prostor stanja

- Za svako stabilno gibanje postoji područje točaka oko objekta čije vremenske trajektorije završavaju na objektu.
- Takav stabilni objekt nazivamo **atraktorom**.
- Za dane rubne uvjete može postojati više domena i više atraktora.
- Za $\mathcal{R} > \mathcal{R}_C$ može postojati više od jednog stabilnog rješenja problema. Koje od njih će biti realizirano ovisi o početnim uvjetima.

Navier-Stokesove jednadžbe mogu se u prostoru stanja prikazati kao:

$$\dot{\vec{X}} = \vec{F}(\vec{X})$$

gdje je $\vec{X}$ vektor u multidimenzionalnom prostoru stanja. $\vec{F}(\vec{X})$ je neka funkcija koja se može odrediti iz Navier-Stokesove jednadžbe. $\vec{F}$ ovisi o paramatrima koji opisuju sustav.

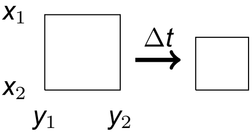
Prostor stanja

Promatramo **mali volumen bliskih stanja**

- Ako je taj volumen u području atrakcije stabilnog stanja, volumen će se mijenjati u vremenu.
- Konzervativni sustavi čuvaju volumen (Liouvilleov teorem).
- Disipativni sustavi ne čuvaju volumen - volumen se kontrahira.
- Promjene u volumenu dane su divergencijom polja $\vec{F}$.

Vrijedi:

$$div(\dot{\vec{X}}) = div(\vec{F}) = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial X_i} < 0$$



$$\left.\begin{aligned}
\overline{x}_1 &= x_1 + \Delta t \cdot F_x(x_1, y_1) \\
\overline{x}_2 &= x_2 + \Delta t \cdot F_x(x_2, y_1) \\
\overline{y}_1 &= y_1 + \Delta t \cdot F_y(x_1, y_1) \\
\overline{y}_2 &= y_2 + \Delta t \cdot F_y(x_2, y_2)
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\overline{\Delta x} = \Delta x + \Delta t \Delta x \cdot \frac{\partial F_x}{\partial x}$$

$$\overline{\Delta y} = \Delta y + \Delta t \Delta y \cdot \frac{\partial F_y}{\partial y}$$