Sveučilište u Zagrebu
PMF–Matematički odjel

Marko Horvat

Goldblatt-Thomasonov teorem

Diplomski rad

Zagreb, listopad 2010.

Sveučilište u Zagrebu
PMF–Matematički odjel

Marko Horvat

Goldblatt-Thomasonov teorem

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Mladen Vuković

Zagreb, listopad 2010.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

Cilj ovog diplomskog rada je prezentirati dokaz Goldblatt-Thomasonovog teorema o modalnoj definabilnosti elementarnih klasa okvira. Prije samog dokaza pripremamo teren uvođenjem niza pojmova i oznaka te dokazivanjem niza tvrdnji koje će nam osigurati razinu razumijevanja definabilnosti dovoljnu za našu svrhu. Tijekom izlaganja podrazumijevamo poznavanje notacije i osnova logike prvog reda iz [12].

U prvom poglavlju, *Osnovni pojmovi*, odrađujemo polovinu spomenute pripreme. Najprije dokazujemo Łośov teorem o ultraproduktima i činjenicu da su elementarne klase struktura zatvorene na ultraprodukte. Dajemo jednu verziju teorema kompaktnosti pomoću ultraprodukata te objašnjavamo standardnu translaciju, svojevrstan način prijevoda modalnih formula u specifičan jezik prvog reda. Potom opisujemo osnovni modalni jezik te definiramo dva ključna tipa struktura za proučavanje modalne logike: modele i okvire. Nakon toga uvodimo semantiku modela i okvira te preciziramo što je modalna definabilnost.

Uz to definiramo osnovne konstrukcije modela, odnosno okvira. To su redom: disjunktne unije, generirani podmodeli (podokviri), ograničeni morfizmi i ultrafiltar-proširenja. Za svaku konstrukciju dokazujemo propoziciju o očuvanju istinitosti formula na modelima. Dajemo vezu klasa m-saturiranih modela i Hennessy-Milnerovih klasa. Upoznavanjem koncepta bisimulacije upotpunjujemo sliku o izražajnoj snazi modela. Detaljno se bavimo ultrafiltar-proširenjima i raspisujemo primjer od velikog značaja za kasniji dokaz modalne nedefinabilnosti određene klase okvira. Pri prijelazu na okvire zaokružujemo cjelinu koristeći alate razvijene u čitavom poglavlju. Dokazujemo očuvanje valjanosti modalnih formula pri osnovnim konstrukcijama te propoziciju o spajanju točkom generiranih podokvira.

Drugo poglavlje, *Saturiranost*, čini drugu polovinu priprema za dokaz Goldblatt-Thomasona. Ono što će se pokazati vrlo ozbiljnom poteškoćom u dokazu jest grubo provođenje ideje dokaza: napuhat ćemo jezik, a time i skup nelogičkih simbola u koji ćemo taj jezik preslikati, do neprebrojivog. Time će nam egzistenciju jedne posebne strukture biti puno teže dokazati, pa je u ovom poglavlju nužno izgraditi dobro razumijevanje djelića teorije modela koji nam je potreban za uspješno otklanjanje problema kardinalnosti jezika za tu konkretnu primjenu. Dva najvažnija teorema svakako su upravo najavljeno postojanje α^+-dobrih prebrojivo nepotpunih ultrafiltara nad skupom kardinalnosti α te mogućnost proizvodnje α-saturiranih modela pomoću takvih ultrafiltara. Oslanjamo se i na standardnu translaciju za dobivanje veze m-saturiranosti i ω-saturiranosti modela.

Konačno, u trećem poglavlju zvanom *Dokaz Goldblatt-Thomasona* dajemo cjelovit dokaz Goldblatt-Thomasonovog teorema koji kaže da su elementarne klase okvira modalno definabilne ako i samo ako su zatvorene na svaku od osnovnih konstrukcija okvira. Ono što zapravo mislimo time je zatvorenost klase na disjunktne unije, generirane podokvire i slike pri ograničenim morfizmima te reflektiranje ultrafiltar-proširenja. Nakon toga diskutiramo mogućnost brisanja po jedne osnovne konstrukcije iz iskaza i proučavamo istinitost tako izmijenjenog teorema. Korak po korak otkrivamo da trebamo pretpostaviti zatvorenost na sve četiri konstrukcije, odnosno uočavamo da zatvorenost klase na tri konstrukcije ne povlači nužno modalnu definabilnost te klase. Na samom kraju poglavlja dokazujemo jaku verziju Goldblatt-Thomasonovog teorema koja ne pretpostavlja elementarnost klase okvira, već samo njenu zatvorenost na ultrapotencije.

Ovim putem zahvaljujem svom mentoru, doc. dr. sc. Mladenu Vukoviću, na odličnoj predloženoj temi, mnogim korisnim savjetima, pregrštu literature, a ponajviše na velikom strpljenju tijekom izrade ovog diplomskog rada.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

1.1 Ultrafiltri i ultraprodukti

Počet ćemo naše izlaganje davanjem definicija filtra i ultrafiltra. Filtar će nam poslužiti u trenutku kad ćemo poželjeti razgovarati o „velikim" podskupovima nekog skupa indeksa. Iz definicije će biti evidentno zašto te skupove možemo zamišljati baš kao „velike". Ultrafiltar će pak svojom strukturom idejno implicirati nužnost da svaki podskup indeksnog skupa ili bude „velik" ili ima „velik" komplement. To će nam omogućiti da jednostavno izađemo na kraj s negacijama formula kad to bude potrebno.

Definicija 1.1. Neka je I neprazan skup. Kažemo da je familija F podskupova od I *filtar nad* I ako vrijedi:

- $I \in F$,
- ako je $X, Y \in F$, tada je $X \cap Y \in F$ te
- ako je $X \in F$ i $X \subseteq Z \subseteq I$, tada je $Z \in F$.

Kažemo da je filtar F nad I *pravi filtar* ako je $F \neq \mathscr{P}(I)$ (ekvivalentno: $\emptyset \notin F$). Za pravi filtar F nad I kažemo da je *ultrafiltar* ako za sve $X \subseteq I$ vrijedi: $X \in F$ ako i samo ako $I \setminus X \notin F$.

Neka je $X \subseteq I$. Lako je pokazati da je tada $\{Y \subseteq I : X \subseteq Y\}$ filtar nad I. Nazivamo ga *filtrom generiranim skupom* X. Ako je filtar generiran jednočlanim skupom, nazivamo ga *glavnim filtrom.*

Primjer. Neka je I beskonačan skup. Tada je $F = \{X \subseteq I : I \setminus X \text{ konačan}\}$ pravi filtar. Nazivamo ga *Fréchetovim filtrom.*

Objasnit ćemo jednu konstrukciju koja se pokazala vrlo korisnom u teoriji modela: radi se o ultraproduktu familije struktura. U tome će nam pomoći definicija ultraprodukta familije skupova.

Definicija 1.2. Neka je $I \neq \emptyset$, $\{A_i : i \in I\}$ familija nepraznih skupova te U ultrafiltar nad I. Pogledajmo Kartezijev produkt dane familije:

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f \big| f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i, f(i) \in A_i \text{ za svaki } i \in I\}.$$

Za $f, g \in \prod_{i \in I} A_i$ definiramo sljedeću relaciju ekvivalencije: $f \sim g$ ako i samo ako je $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in U$. Kvocijentni skup $\prod_{i \in I} A_i / \sim$ po toj relaciji nazivamo *ultraproduktom familije skupova* $\{A_i : i \in I\}$ i označavamo ga $\prod_U A_i$. Klasu ekvivalencije čiji je reprezentant funkcija f označavamo f_U.

Prije nastavka opisujemo jednu sasvim specijalnu upotrebu λ-notacije praktičnu za definiranje relativno jednostavnih funkcija bez imenovanja istih.

Oznaka. Neka su I i J proizvoljni skupovi. Pisat ćemo $\lambda i.j$ za funkciju koja elementu $i \in I$ pridružuje vrijednost $j \in J$.

Definicija 1.3. Neka je σ skup nelogičkih simbola, $I \neq \emptyset$, $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ familija σ-struktura te U ultrafiltar nad I. Kažemo da je σ-struktura $\mathfrak{M}$ *ultraprodukt familije σ-struktura* $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ ako je $|\mathfrak{M}| = \prod_U |\mathfrak{M}_i|$ i

(i) za svaki n-mjesni relacijski simbol $R \in \sigma$ i $f_U^1, \ldots, f_U^n \in |\mathfrak{M}|$ vrijedi

$$R^{\mathfrak{M}}(f_U^1, \ldots, f_U^n) \iff \{i \in I : R^{\mathfrak{M}_i}(f^1(i), \ldots, f^n(i))\} \in U,$$

(ii) za svaki m-mjesni funkcijski simbol $F \in \sigma$ i $f_U^1, \ldots, f_U^m \in |\mathfrak{M}|$ vrijedi

$$F^{\mathfrak{M}}(f_U^1, \ldots, f_U^m) = \left(\lambda i. F^{\mathfrak{M}_i}(f^1(i), \ldots, f^m(i))\right)_U \text{ te}$$

(iii) za svaki konstantski simbol $c \in \sigma$ vrijedi

$$c^{\mathfrak{M}} = \left(\lambda i. c^{\mathfrak{M}_i}\right)_U.$$

Pri dokazivanju Goldblatt-Thomasonovog teorema trebat će nam Łośov teorem o ultraproduktima. Također, iz Łośovog teorema direktno dobivamo da je svaka elementarna klasa zatvorena na ultraprodukte.

Teorem 1.4 (Łośov teorem o ultraproduktima)**.** *Neka je $I \neq \emptyset$, σ skup nelogičkih simbola, $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ familija σ-struktura, U ultrafiltar nad I te $\mathfrak{M} = \prod_U \mathfrak{M}_i$.*

(i) Za svaki σ-term $t(x_1 \dots x_n)$ i elemente $f^1_U, \dots, f^n_U \in |\mathfrak{M}|$ vrijedi:

$$t^{\mathfrak{M}}[f^1_U \dots f^n_U] = (\lambda i. t^{\mathfrak{M}_i}[f^1(i) \dots f^n(i)])_U.$$

(ii) Za svaku σ-formulu $\phi(x_1 \dots x_n)$ i elemente $f^1_U, \dots, f^n_U \in |\mathfrak{M}|$ vrijedi:

$$\mathfrak{M} \models \phi[f^1_U \dots f^n_U] \iff \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \phi[f^1(i) \dots f^n(i)]\} \in U.$$

Dokaz. Dokaz prve tvrdnje provodimo indukcijom po duljini terma, a druge po složenosti formule.

(i) Iz definicije ultraprodukta σ-struktura odmah vidimo da je tvrdnja istinita ako je $t(x_1 \dots x_n)$ oblika $F(x_1 \dots x_n)$ ili c, gdje su F i c redom funkcijski, odnosno konstantski simboli. Pretpostavimo stoga da imamo $t(x_1 \dots x_n) = F(t_1(x_1 \dots x_n) \dots t_m(x_1 \dots x_n))$, gdje termi $t_1, \dots, t_m$ zadovoljavaju (i). Prema definiciji interpretacije terma je $t^{\mathfrak{M}}[f^1_U \dots f^n_U] = F^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}[f^1_U \dots f^n_U] \dots t_m^{\mathfrak{M}}[f^1_U \dots f^n_U])$.

Iz pretpostavke indukcije za $t_1, \dots, t_m$ dobivamo $t_k^{\mathfrak{M}}[f^1_U \dots f^n_U] = g^k_U$, za sve $k \in \{1 \dots m\}$, uz $g^k = \lambda i. t_k^{\mathfrak{M}_i}[f^1(i) \dots f^n(i)]$. Iz definicije ultraprodukta σ-struktura slijedi $F^{\mathfrak{M}}(g^1_U \dots g^m_U) = (\lambda i. F^{\mathfrak{M}_i}(g^1(i) \dots g^m(i)))_U$. Iz prethodnog i $t^{\mathfrak{M}_i}[f^1(i) \dots f^n(i)] = F^{\mathfrak{M}_i}(g^1(i) \dots g^m(i))$ slijedi

$$t^{\mathfrak{M}}[f^1_U \dots f^n_U] = F^{\mathfrak{M}}(g^1_U \dots g^m_U) = (\lambda i. t^{\mathfrak{M}_i}[f^1(i) \dots f^n(i)])_U.$$

(ii) Neka su $t_1, \dots, t_m$ σ-termi, R m-mjesni relacijski simbol i $\phi(x_1 \dots x_n) = R(t_1(x_1 \dots x_n) \dots t_m(x_1 \dots x_n))$. Iz definicije istinitosti σ-formula na σ-strukturama dobivamo:

$$\mathfrak{M} \models \phi[f_U^1 \dots f_U^n] \iff$$

$$\mathfrak{M} \models R(t_1[f_U^1 \dots f_U^n] \dots t_m[f_U^1 \dots f_U^n]) \iff$$

$$R^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}[f_U^1 \dots f_U^n] \dots t_m^{\mathfrak{M}}[f_U^1 \dots f_U^n]) \stackrel{(i)}{\iff}$$

$$R^{\mathfrak{M}}((\lambda i.t_1^{\mathfrak{M}_i}[f^1(i) \dots f^n(i)])_U \dots (\lambda i.t_m^{\mathfrak{M}_i}[f^1(i) \dots f^n(i)])_U) \iff$$

$$\{i \in I : R^{\mathfrak{M}_i}(t_1^{\mathfrak{M}_i}[f^1(i) \dots f^n(i)] \dots t_m^{\mathfrak{M}_i}[f^1(i) \dots f^n(i)])\} \in U \iff$$

$$\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \phi[f^1(i) \dots f^n(i)]\} \in U.$$

Time smo dokazali tvrdnju za atomarne formule. Preostaje pokazati da tvrdnja vrijedi u slučaju baze $\{\neg, \wedge, \exists\}$. Pokažimo najprije da vrijedi za $\phi = \neg\psi(x_1 \dots x_n)$ uz pretpostavku da ψ zadovoljava (ii):

$$\mathfrak{M} \models \phi[f_U^1 \dots f_U^n] \iff$$

$$\mathfrak{M} \not\models \psi[f_U^1 \dots f_U^n] \stackrel{(ii)}{\iff}$$

$$\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \psi[f^1(i) \dots f^n(i)]\} \notin U \iff$$

$$\{i \in I : \mathfrak{M}_i \not\models \psi[f^1(i) \dots f^n(i)]\} \in U \iff$$

$$\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \phi[f^1(i) \dots f^n(i)]\} \in U.$$

Znamo da vrijedi:

$$X \cap Y \in U \iff X, Y \in U. \tag{$*$}$$

Naime, ako je $X \cap Y \in U$, iz definicije filtra i $X, Y \supseteq X \cap Y$ dobivamo $X, Y \in U$. Drugi smjer je ugrađen u definiciju filtra. Pomoću te činjenice dokazujemo tvrdnju za $\phi = \psi_1(x_1 \dots x_n) \wedge \psi_2(x_1 \dots x_n)$ uz pretpostavku da ψ_1, ψ_2 zadovoljavaju (ii):

$$\mathfrak{M} \models \phi[f_U^1 \dots f_U^n] \iff$$

$$\mathfrak{M} \models \psi_1[f_U^1 \dots f_U^n] \text{ i } \mathfrak{M} \models \psi_2[f_U^1 \dots f_U^n] \stackrel{(ii)}{\iff}$$

$$\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \psi_k[f^1(i) \dots f^n(i)]\} \in U \text{ za } k = 1, 2 \stackrel{(*)}{\iff}$$

$$\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \phi[f^1(i) \dots f^n(i)]\} \in U.$$

Konačno, riješimo $\phi(x_1 \dots x_n) = (\exists x_0)\psi(x_0 x_1 \dots x_n)$, uz pretpostavku da ψ zadovoljava (ii):

$$\mathfrak{M} \models \phi[f_U^1 \dots f_U^n] \iff$$

$$\text{postoji } f_U^0 \in |\mathfrak{M}| \text{ t.d. } \mathfrak{M} \models \psi[f_U^0 f_U^1 \dots f_U^n] \overset{(ii)}{\iff}$$

$$\text{postoji } f_U^0 \in |\mathfrak{M}| \text{ t.d. } \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \psi[f^0(i) f^1(i) \dots f^n(i)]\} \in U.$$

Treća tvrdnja implicira $\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \phi[f^1(i) \dots f^n(i)]\} \in U$. Obratno, posljednje povlači da postoji funkcija (AC) $f^0 \in \prod_{i \in I} |\mathfrak{M}_i|$ takva da vrijedi treća tvrdnja gore.

□

Podsjetimo se definicije elementarnih klasa σ-struktura.

Definicija 1.5. Neka je σ skup nelogičkih simbola, $I \neq \emptyset$ skup indeksa te $\mathscr{K} = \{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ familija σ-struktura. Za S neprazan skup σ-formula definiramo $\mathrm{Mod}\,(S) = \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \models S\}$. Kažemo da je $\mathscr{K}$ *elementarna klasa σ-struktura* ako je $\mathscr{K} = \mathrm{Mod}\,(S)$ za neki S.

Korolar 1.6. *Neka je σ skup nelogičkih simbola. Ako je klasa $\mathscr{K}$ σ-struktura elementarna, onda je $\mathscr{K}$ zatvorena na ultraprodukte.*

Dokaz. Budući da je $\mathscr{K}$ elementarna, postoji skup S σ-formula takav da je $\mathscr{K} = \mathrm{Mod}\,(S)$. Neka su $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\} \subseteq \mathscr{K}$, U ultrafiltar nad I te $\phi \in S$ proizvoljni. Tada, zbog $\mathfrak{M}_i \models \phi$ za sve $i \in I$ i $I \in U$, iz Łošovog teorema o ultraproduktima slijedi $\prod_U \mathfrak{M}_i \models \phi$. To povlači $\prod_U \mathfrak{M}_i \models S$, tj. $\prod_U \mathfrak{M}_i \in \mathscr{K}$. □

Prisjećajući se teorema kompaktnosti iz logike prvog reda, dokazat ćemo jednu njegovu verziju pomoću ultraprodukata. Ta verzija je korisna jer točno znamo na kojoj strukturi dobivamo ispunjivost danog konačno ispunjivog skupa formula.

No, da bismo zaista dokazali spomenutu verziju teorema kompaktnosti, nakon kratke pripreme najprije dokazujemo dva oblika teorema o ultrafiltru. Taj teorem nije isključivo zanimljiv sam po sebi jer upućuje na bogatu raznolikost ultrafiltara, nego će nam više puta biti od velike koristi u ovom radu.

Definicija 1.7. Neka je E neprazna familija skupova. Kažemo da E ima *svojstvo konačnih presjeka* ako za sve $X, Y \in E$ vrijedi $X \cap Y \neq \emptyset$.

Lema 1.8. *Filtar F je pravi ako i samo ako ima svojstvo konačnih presjeka.*

Dokaz. Kad filtar F ne bi imao svojstvo konačnih presjeka, postojali bi $X, Y \in F$ takvi da je $F \ni X \cap Y = \emptyset$. Obratno, ako vrijedi $\emptyset \in F$, onda je $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$, pa F nema svojstvo konačnih presjeka. □

Teorem 1.9. *Neka je I neprazan skup te $E \subseteq \mathscr{P}(I)$ koji ima svojstvo konačnih presjeka. Tada postoji ultrafiltar U nad I takav da je $E \subseteq U$.*

Dokaz. Označimo

$$F_0 = \bigcap \{F' : F' \text{ filtar nad I}, E \subseteq F'\} \supseteq E.$$

Lako se provjeri da je F_0 filtar koji ima svojstvo konačnih presjeka, pa iz leme 1.8 slijedi da je pravi filtar.

Sada definiramo

$$\mathcal{F} = \{F' : F' \text{ pravi filtar nad I}, E \subseteq F'\}.$$

Budući da je $F_0 \in \mathcal{F}$, vrijedi da je $\mathcal{F}$ neprazan. Skup $(\mathcal{F}, \subset)$ je parcijalno uređen. Neka je L proizvoljan lanac u $\mathcal{F}$. Lako se provjeri da je $\bigcup L$ pravi filtar koji sadrži E. Time smo pokazali da svaki lanac L u $\mathcal{F}$ ima gornju među. Iz Zornove leme slijedi da postoji maksimalan element $U \in \mathcal{F}$.

Preostaje dokazati da je U ultrafiltar. Za to je dovoljno pokazati da za svaki $X \subseteq I$ vrijedi: $X \in U$ ako i samo ako $I \setminus X \notin U$. Neka je $X \in U$. Tada bi iz $I \setminus X \in U$ slijedilo $\emptyset = X \cap (I \setminus X) \in U$. Obratno, ako je $I \setminus X \notin U$, ne može biti i $X \notin U$. Naime, pretpostavimo da jest $X \notin U$. Pogledajmo filtar $U' = \{Y \subseteq I : Y \supseteq X \cap A, A \in U\} \supseteq U \supseteq E$. Budući da je taj filtar pravi zbog pretpostavke $I \setminus X \notin U$, sadrži E te je veći od U, vrijedi $U = U' \ni X$. Time je dobivena kontradikcija s pretpostavkom $X \notin U$. □

Korolar 1.10. *Neka je I neprazan skup. Svaki pravi filtar F nad I može se proširiti do ultrafiltra nad I.*

Dokaz. Filtar F prema lemi 1.8 ima svojstvo konačnih presjeka, pa se prema teoremu 1.9 može proširiti do ultrafiltra nad I. □

Napomena. Neki autori nazivaju teorem 1.9, a neki korolar 1.10 teoremom o ultrafiltru. Iako neće biti zabune oko toga koja nam varijanta treba u danom trenutku, eksplicitno ćemo navesti koju koristimo.

Sada dokazujemo ranije najavljenu verziju teorema kompaktnosti pomoću ultraprodukata koja će nam trebati za bitan korak u dokazu Goldblatt-Thomasonovog teorema.

Korolar 1.11. *Neka je σ skup nelogičkih simbola, Δ skup σ-formula, $I = \mathscr{P}_\omega(\Delta)$ te $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ familija σ-struktura takvih da za svaki $i \in I$ vrijedi $\mathfrak{M}_i \models i$. Tada postoji ultrafiltar U nad I takav da $\prod_U \mathfrak{M}_i \models \Delta$.*

Dokaz. Za svaki $\phi \in \Delta$, neka je $\hat{\phi} = \{i \in I : \phi \in i\}$. Skup $E = \{\hat{\phi} : \phi \in \Delta\}$ ima svojstvo konačnih presjeka jer vrijedi $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \in \hat{\phi}_1 \cap \ldots \cap \hat{\phi}_n$. Prema teoremu 1.9, E je moguće proširiti do ultrafiltra U nad I. Ako je $i \in \hat{\phi}$, tada je $\phi \in i$, iz čega slijedi $\mathfrak{M}_i \models \phi$. Stoga za svaki $\phi \in \Delta$ dobivamo $\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \phi\} \supseteq \hat{\phi}$ i $\hat{\phi} \in U$. Prema tome, $\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models \phi\} \in U$. Iz Łośovog teorema dobivamo da je $\prod_U \mathfrak{M}_i \models \phi$ za sve $\phi \in \Delta$. $\square$

1.2 Osnovni modalni jezik

Alfabet osnovnog modalnog jezika sastoji se od skupa Φ propozicionalnih varijabli (označavamo ih $p, q, r, \ldots$), logičkih veznika $\neg$ i $\vee$ te unarnog modalnog operatora $\Diamond$. Često ćemo podrazumijevati da je skup Φ unaprijed fiksiran. Formule u osnovnom modalnom jeziku tvore se od propozicionalnih varijabli, propozicionalne konstante $\bot$, negacije, disjunkcije i operatora $\Diamond$. Kraće to zapisujemo ovako:

$$\phi := p \Big| \bot \Big| \neg\phi \Big| \psi \vee \phi \Big| \Diamond\phi.$$

Skup svih formula osnovnog modalnog jezika s propozicionalnim varijablama iz skupa Φ označavamo $\mathrm{Form}(\Phi)$. Kad u radu govorimo o *modalnim formulama*, podrazumijevamo da se radi o formulama iz $\mathrm{Form}(\Phi)$.

Još se definira dualni modalni operator od $\Diamond$ kao $\Box\phi := \neg\Diamond\neg\phi$. Umjesto n uzastopnih simbola $\Diamond$, odnosno $\Box$, pisat ćemo redom $\Diamond^n$, odnosno $\Box^n$. Pokrate za ostale logičke veznike su sljedeće:

- $\phi \wedge \psi := \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$
- $\phi \rightarrow \psi := \neg\phi \vee \psi$
- $\phi \leftrightarrow \psi := (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$

Uvodimo i jednu pokratu za logičku konstantu: $\top := \neg\bot$.

Moguće je dati generalizaciju definiranih pojmova na dva različita načina: nema razloga za ograničavanje na jezike s jednim simbolom $\Diamond$ u alfabetu, isto tako ni za ograničavanje na modalnosti kojima samo jedna formula može biti argument.

Drugim riječima, mogli bismo pričati o različitim modalnim operatorima i tipovima modalne sličnosti (općeniti modalni jezici sadrže prebrojivo mnogo modalnih operatora proizvoljnih mjesnosti). Međutim, dokaz glavnog rezultata provest ćemo koristeći goreopisani jezik uz napomenu da je analogan onom općenitijem.

Okviri i modeli

Definiramo relacijsku strukturu koja će biti osnova našeg proučavanja modalne logike.

Definicija 1.12. Uređen par $\mathfrak{F} = (W, R)$ gdje je W neprazan skup (nazivamo ga *nosačem od* $\mathfrak{F}$, oznaka: $|\mathfrak{F}|$), a $R \subseteq W \times W$ binarna relacija na skupu W nazivamo *okvirom*. Elemente skupa W nazivamo *svjetovima*, a R *relacijom dostiživosti*.

Napomena. Često ćemo umjesto $(w, v) \in R$ pisati wRv ili Rwv. Također, ako postoje $w_0, \ldots, w_k \in W$ takvi da je $w = w_0 R w_1 R w_2 R \ldots R w_k = v$, pisat ćemo $wR^k v$.

Kako bismo mogli govoriti o istinitosti, prije svega propozicionalnih varijabli, a zatim i formula, definirat ćemo pojam koji obogaćuje strukturu okvira.

Definicija 1.13. Uređen par $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ gdje je $\mathfrak{F} = (W, R)$ okvir, a $V : \Phi \rightarrow \mathscr{P}(W)$ funkcija nazivamo *modelom*. Nosač W okvira $\mathfrak{F}$ nazivamo i *nosačem modela* $\mathfrak{M}$ te ga označavamo $|\mathfrak{M}|$. Funkciju V nazivamo *valuacijom*.

Nadalje uvodimo pojam koji opisuje što znači da je neka formula istinita na svijetu iz modela.

Definicija 1.14. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model te $w \in W$. Tada induktivno definiramo *istinitost od* ϕ *na* w (pišemo $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ ili, kraće, $w \Vdash \phi$):

- za svaki $p \in \Phi$, $w \Vdash p$ ako i samo ako $w \in V(p)$,
- ne vrijedi $w \Vdash \bot$,
- $w \Vdash \neg\phi$ ako i samo ako nije $w \Vdash \phi$,
- $w \Vdash \phi \vee \psi$ ako i samo ako je $w \Vdash \phi$ ili $w \Vdash \psi$ te
- $w \Vdash \Diamond\phi$ ako i samo ako za neki $v \in W$ takav da je wRv vrijedi $v \Vdash \phi$.

Iz definicije slijedi da je $w \Vdash \Box\phi$ ako i samo ako za svaki $v \in W$ takav da je wRv vrijedi $v \Vdash \phi$. Uočimo da možemo proširiti valuaciju V tako da djeluje na formulama, a ne samo na propozicionalnim varijablama. Tada za formulu ϕ imamo: $V(\phi) = \{w \in W : w \Vdash \phi\}$.

Definicija 1.15. Kažemo da je *formula* ϕ *istinita* (*ispunjiva*) *na modelu* $\mathfrak{M}$ ako je $w \Vdash \phi$ za svaki (neki) $w \in W$. To označavamo $\mathfrak{M} \Vdash \phi$ ($\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$). Također, kažemo da je *skup formula* Σ *istinit* (*ispunjiv*) *na modelu* $\mathfrak{M}$ ako su sve formule iz Σ istinite na svakom (nekom) svijetu w modela $\mathfrak{M}$. Tu činjenicu označavamo $\mathfrak{M} \Vdash \Sigma$ ($\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$). U oznakama ispunjivosti na svijetu, odnosno modelu možemo ispustiti model ukoliko nema mogućnosti zabune.

Definicija 1.16. Kažemo da je skup formula X *ispunjiv u klasi okvira* $\mathscr{K}$ ako u $\mathscr{K}$ postoji okvir $\mathfrak{F}$ takav da su sve formule ϕ iz X za neku valuaciju V_ϕ ispunjive na modelu $(\mathfrak{F}, V_\phi)$.

Kako bismo se mogli udaljiti od modela i proučavati semantiku okvira, definirat ćemo valjanost.

Definicija 1.17. Formula ϕ je *valjana na svijetu* w *u okviru* $\mathfrak{F}$ ako je ϕ istinita na w u svakom modelu $(\mathfrak{F}, V)$ (oznaka je $\mathfrak{F}, w \Vdash \phi$ ili, ako nema mogućnosti zabune, $w \Vdash \phi$). Kažemo da je ϕ *valjana na okviru* $\mathfrak{F}$ ako je valjana na svakom svijetu u $\mathfrak{F}$ (oznaka: $\mathfrak{F} \Vdash \phi$). Nadalje, kažemo da je ϕ *valjana na klasi okvira* $\mathscr{C}$ ako je valjana na svakom okviru iz klase $\mathscr{C}$ (oznaka: $\mathscr{C} \Vdash \phi$). Kažemo da je ϕ *valjana* ako je valjana na klasi svih okvira (oznaka: $\Vdash \phi$). Skup svih formula koje su valjane na klasi okvira $\mathscr{C}$ nazivamo *logikom od* $\mathscr{C}$ (oznaka: $\Lambda_{\mathscr{C}}$).

Napomena. Analogno istinitosti i ispunjivosti definiramo *valjanost skupa formula* Σ *na svijetu u okviru*, *na okviru* te *na klasi okvira*.

Slijedeći općenitu definiciju ultraprodukta familije σ-struktura, definiramo ultraprodukt familije okvira, odnosno modela.

Definicija 1.18. Neka je $I \neq \emptyset$, U ultrafiltar nad I te $\{\mathfrak{F}_i = (W_i, R_i) : i \in I\}$ familija okvira. Kažemo da je $\mathfrak{F} = \prod_U \mathfrak{F}_i = (W_U, R_U)$ *ultraprodukt familije okvira* $\{\mathfrak{F}_i : i \in I\}$ ako vrijedi:

(i) $W_U = \prod_U W_i$ te

(ii) $f_U R_U g_U$ ako i samo ako je $\{i \in I : f(i) R_i g(i)\} \in U$.

Neka je $I \neq \emptyset$, U ultrafiltar nad I te $\{\mathfrak{M}_i = (\mathfrak{F}_i, V_i) : i \in I\}$ familija modela. Kažemo da je $\mathfrak{M} = \prod_U \mathfrak{M}_i = (\mathfrak{F}, V_U)$ *ultraprodukt familije modela* $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ ako vrijedi:

(i) $\mathfrak{F} = \prod_U \mathfrak{F}_i$ te

(ii) $f_U \in V_U(p)$ ako i samo ako je $\{i \in I : f(i) \in V_i(p)\} \in U$.

Napomena. Kao i kod ultraprodukta familije σ-struktura, lako je pokazati da su dane definicije dobre.

Spomenimo usput pojam koji predstavlja modalni analogon elementarno ekvivalentnih struktura u logici prvog reda te definirajmo glavni pojam o kojem ćemo govoriti, modalnu definabilnost.

Definicija 1.19. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ modeli te $w \in |\mathfrak{M}|$ i $w' \in |\mathfrak{M}'|$. Kažemo da su w i w' *modalno ekvivalentni* ako za sve $\phi \in \mathrm{Form}(\Phi)$ vrijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', w' \Vdash \phi$ (oznaka: $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$ ili, kraće, $w \equiv w'$).

Kažemo da su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ *modalno ekvivalentni modeli* ako su svaka dva svijeta $w \in |\mathfrak{M}|$ i $w' \in |\mathfrak{M}'|$ modalno ekvivalentna (oznaka: $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}'$).

Definicija 1.20. Neka je $\mathscr{C}$ klasa modela (okvira) te Γ skup modalnih formula. Kažemo da Γ *definira klasu* $\mathscr{K}$ *modela* (*okvira*) *iz* $\mathscr{C}$ ako za sve modele (okvire) $\mathfrak{M} \in \mathscr{C}$ ($\mathfrak{F} \in \mathscr{C}$) vrijedi: $\mathfrak{M} \in \mathscr{K}$ ($\mathfrak{F} \in \mathscr{K}$) ako i samo ako $\mathfrak{M} \Vdash \Gamma$ ($\mathfrak{F} \Vdash \Gamma$). Ako je $\mathscr{C}$ klasa svih modela (okvira), jednostavno kažemo da Γ *definira klasu* $\mathscr{K}$. Ako postoji konačan (beskonačan) skup modalnih formula koji definira klasu $\mathscr{K}$, kažemo da je $\mathscr{K}$ *modalno definabilna jednom formulom* (*skupom formula*).

Napomena. Naravno, „jedna formula" koja se spominje u gornjoj definiciji je upravo konjunkcija navedenog konačnog skupa formula. Ukoliko ne naglasimo o kojoj definabilnosti govorimo, podrazumijevat ćemo definabilnost skupom formula.

1.3 Standardna translacija

Uzevši u obzir da nam je cilj proučavati definabilnost, korisno je znati nešto o njoj iz perspektive logike prvog reda. Slijedi definicija standardne translacije koja će nam pružati priliku za prijelaz iz modalne logike u logiku prvog reda, pravi ambijent za naše buduće razmatranje ogromnih modalnih jezika.

Vidjet ćemo da je o pojmu istinitosti modalne formule na modelu moguće govoriti kao o istinitosti σ-formule na σ-strukturi za pomno odabran σ.

Definicija 1.21. Neka je Φ skup propozicionalnih varijabli, x individualna varijabla te $\sigma^1(\Phi)$ skup nelogičkih simbola koji sadrži dvomjesne relacijske simbole R i $=$ te po jedan unarni relacijski simbol P za svaki $p \in \Phi$. Kažemo da je preslikavanje ST_x *standardna translacija* ako modalnim formulama pridružuje $\sigma^1(\Phi)$-formule u kojima samo varijabla x može imati slobodan nastup na sljedeći način:

$$\begin{aligned} ST_x(p) &= Px, \\ ST_x(\bot) &= x \neq x, \\ ST_x(\neg\phi) &= \neg ST_x(\phi), \\ ST_x(\phi \vee \psi) &= ST_x(\phi) \vee ST_x(\psi) \text{ te} \\ ST_x(\Diamond\phi) &= \exists y(Rxy \wedge ST_y(\phi)). \end{aligned}$$

Najvažnije svojstvo standardne translacije koje zapravo i opravdava njenu definiciju opisujemo u nastavku. Radi se o lokalnoj i globalnoj korespondenciji na modelima.

Propozicija 1.22. *Neka je ϕ modalna formula.*

(i) Za svaki model $\mathfrak{M}$ i svijet $w \in |\mathfrak{M}|$ vrijedi:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \phi \iff \mathfrak{M} \models ST_x(\phi)[w].$$

(ii) Za svaki model $\mathfrak{M}$ vrijedi:

$$\mathfrak{M} \Vdash \phi \iff \mathfrak{M} \models \forall x ST_x(\phi).$$

Dokaz.

(i) Dokaz provodimo indukcijom po složenosti formule ϕ. Kao i obično, pogledat ćemo samo modalni slučaj, odnosno onaj za $\phi = \Diamond\psi$.

Iz $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ slijedi postojanje $v \in |\mathfrak{M}|$ takvog da je wRv i vrijedi $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. Tada prema pretpostavci indukcije dobivamo $\mathfrak{M} \models ST_y(\psi)[v]$, a iz wRv slijedi $\mathfrak{M} \models \exists y(Rxy \wedge ST_y(\psi))[w]$. Iz definicije standardne translacije slijedi $\mathfrak{M} \models ST_x(\phi)[w]$. Obrat je također jednostavan.

(ii) Neka je $\mathfrak{M} \models \forall x ST_x(\phi)$. Tada znamo da za svaki $w \in |\mathfrak{M}|$ vrijedi $\mathfrak{M} \models ST_x(\phi)[w]$, pa prema (i) za svaki $w \in |\mathfrak{M}|$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$. To upravo znači $\mathfrak{M} \Vdash \phi$. Obrnutim slijedom zaključaka dobivamo obrat.

□

Pitanje je možemo li analogno postupati s okvirima. Budući da je valjanost na okvirima pojam drugog reda, nije moguće o njoj govoriti u logici prvog reda. Prema tome, ne čudi da jedino što kod okvira možemo proučavati u takvom ambijentu jest njihova relacijska struktura.

Jasno je da svaki okvir $\mathfrak{F}$ možemo promatrati kao $\{R, =\}$-strukturu gdje se dvomjesni relacijski simboli R i $=$ interpretiraju na prirodan način. Pritom, dakako, pišemo $\mathfrak{F} \models \phi$ umjesto $\mathfrak{F} \Vdash \phi$. Potonju oznaku rezerviramo za upotrebu u modalnoj logici.

Napomena. Uglavnom neće biti potrebno dodatno upozoravati na shvaćanje modela kao $\sigma^1(\Phi)$-struktura te okvira kao $\{R, =\}$-struktura. Također ćemo implicitno podrazumijevati korištenje standardne translacije te propozicije o lokalnoj i globalnoj korespondenciji na modelima.

1.4 Osnovne konstrukcije

U ovom nam je dijelu cilj opisati četiri konstrukcije novih okvira i modela od jednog ili više postojećih: disjunktne unije, generirane podokvire i podmodele, ograničene morfizme i ultrafiltar-proširenja. Te konstrukcije, uz činjenicu da su same po sebi često vrlo korisne, predstavljaju četiri glavna sastojka za modalnu definabilnost. Štoviše, one točno hvataju modalnu definabilnost elementarnih klasa—upravo o tome govori Goldblatt-Thomasonov teorem.

Disjunktne unije

Vjerojatno najlakši način dobivanja novih okvira ili modela od starih jest spajanje dvaju okvira ili modela koji nemaju ništa zajedničko. Ako pak nisu disjunktni, nije ih teško najprije takvima učiniti. Štoviše, radi sažetog iskaza definicije uvijek dodajemo indekse koji će osigurati disjunktnost.

Definicija 1.23. Neka je I neprazan skup indeksa te $\{\mathfrak{F}_i = (W_i, R_i) : i \in I\}$ familija okvira. Neka je $\mathfrak{F}'_i = (W'_i, R'_i)$ gdje je $W'_i = \{i\} \times W_i$ te vrijedi $(i, w)R'_i(i, v)$ ako i samo ako wR_iv. Kažemo da je $\biguplus_i \mathfrak{F}_i := (\biguplus_i W'_i, \biguplus_i R'_i)$ *disjunktna unija familije okvira* $\{\mathfrak{F}_i\colon i \in I\}$.

Neka je I neprazan skup indeksa te $\{\mathfrak{M}_i = (\mathfrak{F}_i, V_i) : i \in I\}$ familija modela. Neka je $(i, w) \in V'_i(p)$ ako i samo ako je $w \in V_i(p)$. Model $\biguplus_i \mathfrak{M}_i := (\biguplus_i \mathfrak{F}_i, \biguplus_i V'_i)$ nazivamo *disjunktnom unijom familije modela* $\{\mathfrak{M}_i\colon i \in I\}$.

Napomena. Često ćemo izostavljati indekse u gornjim oznakama zbog jednostavnosti zapisa ili ih pisati s desne strane.

Dokažimo propoziciju o očuvanju istinitosti formula na svijetu u modelu kod ove konstrukcije.

Propozicija 1.24. *Neka je I neprazan skup indeksa te $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ familija disjunktnih modela. Tada za svaku modalnu formulu ϕ, svaki model $\mathfrak{M}_i = (W_i, R_i, V_i)$ i svijet $w \in W_i$ vrijedi: $\mathfrak{M}_i, w \Vdash \phi$ ako i samo ako $\biguplus_i \mathfrak{M}_i, w \Vdash \phi$.*

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po složenosti formule. Ako je $\phi = p$, tvrdnja slijedi iz definicije valuacije u disjunktnoj uniji. U slučaju $\phi = \bot$, tvrdnje s obje strane ekvivalencije koju želimo dokazati su lažne.

U koraku indukcije dokazujemo najzanimljiviji slučaj iz modalne perspektive, a to je onaj za $\phi = \Diamond\psi$ (razmatranje bulovskih veznika je u pravilu jednostavnije i manje zanimljivo). S jedne strane, ako je $\mathfrak{M}_i, w \Vdash \phi$, tada postoji $v \in W_i$ takav da je wR_iv i $\mathfrak{M}_i, v \Vdash \psi$. To je prema pretpostavci indukcije ekvivalentno $\biguplus_i \mathfrak{M}_i, v \Vdash \psi$, pa iz $(w, v) \in \biguplus_i R_i$ slijedi $\biguplus_i \mathfrak{M}_i, w \Vdash \phi$.

Obratno, ako je $\biguplus_i \mathfrak{M}_i, w \Vdash \phi$, tada postoji $v \in \biguplus_i W_i$ takav da je $(w, v) \in \biguplus_i R_i$ i $\biguplus_i \mathfrak{M}_i, v \Vdash \psi$. Prema tome, po pretpostavci vrijedi wR_iv. Iz pretpostavke indukcije dobivamo $\mathfrak{M}_i, v \Vdash \psi$, a time i $\mathfrak{M}_i, w \Vdash \phi$. □

Generirani podokviri i podmodeli

Napraviti jedan veliki okvir ili model od više malih bilo je lako. Međutim, željeli bismo moći pocijepati veliki okvir ili model na više malih. Pitanje je kako, tj. hoćemo li narušiti istinitost na svjetovima u modelu ili je to moguće izbjeći. Naravno, ako je okvir ili model disjunktna unija više malih, možemo raditi s njegovim disjunktnim dijelovima, ali sad ćemo pokušati opisati „finiji" pristup.

Definicija 1.25. Neka su $\mathfrak{F} = (W, R)$ i $\mathfrak{F}' = (W', R')$ okviri.

Kažemo da je $\mathfrak{F}'$ *podokvir* od $\mathfrak{F}$ ako je $W' \subseteq W$ i $R' = R \cap (W' \times W')$.

Kažemo da je $\mathfrak{F}'$ *generirani podokvir* od $\mathfrak{F}$ (oznaka: $\mathfrak{F}' \rightarrowtail \mathfrak{F}$) ako je $\mathfrak{F}'$ podokvir od $\mathfrak{F}$ i za sve $w \in W'$ vrijedi: ako je wRv, onda je $v \in W'$.

Neka su $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ i $\mathfrak{M}' = (\mathfrak{F}', V')$ modeli. Kažemo da je $\mathfrak{M}'$ *podmodel* od $\mathfrak{M}$ ako je $\mathfrak{F}'$ podokvir od $\mathfrak{F}$ i $V'(p) = V(p) \cap W'$ za sve $p \in \Phi$.

Kažemo da je $\mathfrak{M}'$ *generirani podmodel* od $\mathfrak{M}$ (oznaka: $\mathfrak{M}' \rightarrowtail \mathfrak{M}$) ako je $\mathfrak{M}'$ podmodel od $\mathfrak{M}$ i za sve $w \in W'$ vrijedi: ako je wRv, onda je $v \in W'$.

Jasno, korisno je moći srezati ogroman model na manji kojim nam je lakše baratati, a da se pritom istinitost očuva. Spomenimo još neke pojmove koji bi nam mogli zatrebati.

Definicija 1.26. Kažemo da je neki podokvir okvira $\mathfrak{F}$ (podmodel modela $\mathfrak{M}$) *generiran skupom* X ako je X podskup njegovog nosača, a taj podokvir (podmodel) je najmanji generirani podokvir od $\mathfrak{F}$ (podmodel od $\mathfrak{M}$) koji sadrži X.

Podokvir (podmodel) generiran jednočlanim skupom nazivamo *točkom generiranim podokvirom (podmodelom)*, a element skupa koji ga generira nazivamo *korijenom.*

Kao što smo to učinili kod disjunktnih unija, dokazujemo propoziciju o očuvanju istinitosti.

Propozicija 1.27. *Neka je* $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *model te* $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ *njegov generirani podmodel. Tada za svaku modalnu formulu* ϕ *i svaki* $w \in W'$ *vrijedi:* $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M}', w \Vdash \phi$.

Dokaz. Dokazujemo propoziciju indukcijom po složenosti formule. U dokazu propozicije 1.24 napomenuli smo jednostavnost dokaza baze indukcije i koraka u slučaju bulovskih veznika, pa iste preskačemo.

Za slučaj $\phi = \Diamond\psi$, iz $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ slijedi $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$ za neki $v \in W$ takav da je wRv. Budući da je $\mathfrak{M}'$ generirani podmodel, znamo da je $v \in W'$. Tada iz pretpostavke indukcije dobivamo $\mathfrak{M}', v \Vdash \psi$. Stoga je $\mathfrak{M}', w \Vdash \phi$. Obrat je trivijalan. $\square$

Ograničeni morfizmi

Ideja morfizama ili preslikavanja koji čuvaju strukturu od iznimne je važnosti. Kakvi bi morfizmi bili prikladni za modalnu logiku? Glavna ideja je svakako moći osigurati čuvanje istinitosti na svijetu u modelu u oba smjera, baš kao što smo to uspjeli postići za disjunktne unije i generirane podmodele. Drugim riječima, treba nam preslikavanje između modela koje povezuje svjetove koje modalna logika ne može razlikovati. No, kako bismo mogli zadovoljiti takav uvjet na optimalan način?

Pokušat ćemo dati odgovor na to pitanje uvodeći prvo pojam homomorfizma (oni su preslabi za invarijantnost istinitosti: ne odražavaju strukturu kodomene u strukturi domene, tj. nemaju *back* zahtjev—imat ćemo čuvanje istinitosti samo u jednom smjeru), zatim jakog homomorfizma (oni nam daju invarijantnost čuvanjem strukture u oba smjera, ali nisu idealni za modalnu logiku jer je ta invarijantnost pregrubo osigurana), smještenja i izomorfizma (izomorfnost struktura će značiti da ih ne možemo razlikovati na razini modalne ili bilo koje druge logike, pa ćemo moći manipulirati raznim strukturama *do na izomorfizam*). Na kraju ćemo pronaći ono što nam treba: ograničene morfizme.

Definicija 1.28. Neka su $\mathfrak{F} = (W, R)$ i $\mathfrak{F}' = (W', R')$ okviri. Kažemo da je funkcija $f : W \to W'$ *homomorfizam okvira* (oznaka: $f : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$) ako za sve $w, v \in W$ vrijedi implikacija: ako je wRv, tada je $f(w)R'f(v)$. Ako vrijedi i obratna implikacija, kažemo da je f *jaki homomorfizam okvira.*

Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ modeli. Kažemo da je homomorfizam okvira $f : (W, R) \to (W', R')$ *homomorfizam modela* (oznaka: $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$) ako za sve $p \in \Phi$ i $w \in W$ vrijedi: ako je $w \in V(p)$, onda je $f(w) \in V'(p)$. Ako vrijedi i obratna implikacija te je f jaki homomorfizam okvira, kažemo da je f *jaki homomorfizam modela.*

Naravno, kod homomorfizma nema govora o čuvanju istinitosti u oba smjera. Uzmimo, primjerice, $\mathfrak{M} = (\{0, 1\}, \{(0, 1)\}, \emptyset)$, $\mathfrak{M}' = (\{2\}, \{(2, 2)\}, \emptyset)$ i definirajmo $f = \{(0, 2), (1, 2)\}$. Tada je $\mathfrak{M}', 2 \Vdash \Diamond\Diamond\top$, ali $\mathfrak{M}, 0 \nVdash \Diamond\Diamond\top$. Primijetimo da su obje valuacije prazne, pa vrijedi i spomenuta obratna implikacija u definiciji jakog homomorfizma modela (invarijantnost propadne jer f nije jaki homomorfizam okvira).

Kod jakog homomorfizma imamo drugačiju situaciju: zaista dobivamo očuvanje istinitosti u oba smjera.

Propozicija 1.29. *Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ modeli te $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ jaki homomorfizam modela takav da je $f(w) = w'$. Tada su w i w' modalno ekvivalentni.*

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po složenosti formule. Promatramo samo modalni slučaj. Neka je, dakle, $\phi = \Diamond\psi$ i neka za ψ tvrdnja vrijedi. Tada $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ povlači postojanje nekog $v \in W$ takvog da je wRv i vrijedi $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. Iz činjenice da je f homomorfizam modela slijedi $f(w)Rf(v)$, a iz pretpostavke indukcije slijedi $\mathfrak{M}', f(v) \Vdash \psi$. Stoga dobivamo $\mathfrak{M}', w' \Vdash \phi$.

Obrat provodimo analogno pomoću obratne implikacije u definiciji jakog homomorfizma modela. $\square$

Definicija 1.30. Jaki homomorfizam (modela ili okvira) koji je injekcija nazivamo *smještenjem* (modela ili okvira). Ako je još i surjekcija, nazivamo ga *izomorfizmom* (modela ili okvira). Tada kažemo da su dani modeli ili okviri *izomorfni* (oznaka: $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$, odnosno $\mathfrak{F} \cong \mathfrak{F}'$).

Korolar 1.31. *Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ modeli. Tada $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$ povlači $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}'$.*

Dokaz. Direktno iz propozicije 1.29. □

Definirajmo sad ključni tip preslikavanja.

Definicija 1.32. Neka su $\mathfrak{F} = (W, R)$ i $\mathfrak{F}' = (W', R')$ okviri. Kažemo da je homomorfizam okvira $f : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ *ograničeni morfizam okvira* ako zadovoljava sljedeće: ako je $f(w)R'v'$, onda postoji $v \in W$ takav da je wRv i $f(v) = v'$ (*back* uvjet). Ako je f surjekcija, kažemo da je $\mathfrak{F}'$ *slika pri ograničenom morfizmu* (oznaka: $\mathfrak{F} \twoheadrightarrow \mathfrak{F}'$).

Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ modeli. Kažemo da je ograničeni morfizam okvira $f : (W, R) \to (W', R')$ *ograničeni morfizam modela* ako zadovoljava sljedeće: za sve $p \in \Phi$ i $w \in W$, $w \in V(p)$ ako i samo ako $f(w) \in V(p)$. Ako je f surjekcija, kažemo da je $\mathfrak{M}'$ *slika pri ograničenom morfizmu* (oznaka: $\mathfrak{M} \twoheadrightarrow \mathfrak{M}'$).

Napomena. Ako je jasno iz konteksta radi li se o ograničenom morfizmu okvira ili modela, govorit ćemo jednostavno o *ograničenom morfizmu*.

Kao i za sve konstrukcije dosad, dokazujemo propoziciju o očuvanju istinitosti.

Propozicija 1.33. *Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ modeli te $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ ograničeni morfizam. Tada za svaku formulu ϕ i svaki $w \in W$ vrijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash \phi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash \phi$.*

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po složenosti formule. Promatramo samo modalni slučaj. Neka je stoga $\phi = \Diamond\psi$. Jedan smjer je isti kao u dokazu propozicije 1.29. Za drugi, neka je $f(w) \in W'$ i $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash \phi$. Tada znamo da postoji $v' \in W'$ takav da je $f(w)R'v'$ i $\mathfrak{M}', v' \Vdash \psi$. Iz uvjeta *back* dobivamo $v \in W$ koji zadovoljava wRv i $f(v) = v'$. Iz pretpostavke indukcije sad slijedi tvrdnja. □

Ultrafiltar-proširenja

Ovaj je dio posvećen ultrafiltar-proširenjima, zadnjoj od osnovnih konstrukcija. Ultrafiltar-proširenja na neki način predstavljaju upotpunjenja modela. Radi se o takozvanim m-saturiranim modelima. Uskoro dajemo definicije navedenih pojmova.

U nastavku pripremamo i dokaz propozicije o očuvanju istinitosti te jedan primjer: detaljan opis ultrafiltar-proširenja od $(\omega, <)$ koji se često navodi u literaturi (npr. [1], [4] i [8]).

Prisjetimo se da logički veznici odgovaraju nekim skupovnim operacijama. Isto se može reći i za modalnosti. Potkrijepit ćemo tu tvrdnju čim definiramo dva operatora.

Definicija 1.34. Neka je $\mathfrak{F} = (W, R)$ okvir. Definiramo operatore $m_\Diamond$ i $m_\Box$ koji djeluju na podskupovima od W na sljedeći način:

$$m_\Diamond(X) = \{w \in W \big| \text{postoji } v \in X \text{ takav da je } wRv\} \text{ te}$$

$$m_\Box(X) := \{w \in W \big| \text{za sve } v \in W \text{ vrijedi: ako je } wRv, \text{ onda je } v \in X\}.$$

Drugim riječima, skup $m_\Diamond(X)$ sadrži sve svjetove koji su neposredni R-prethodnici nekog svijeta iz X, tj. skup svih onih svjetova od kojih se u jednom koraku kroz model pomoću modalnog operatora $\Diamond$, odnosno relacije R dolazi do nekog svijeta iz X. Operator $m_\Box$ je njegov dual u smislu koji ćemo odmah objasniti.

Istaknimo propoziciju kojom ćemo ukratko prikazati njihov odnos.

Propozicija 1.35. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model. Tada za proizvoljne formule ϕ i ψ vrijedi:*

$$\begin{aligned} V(\phi \vee \psi) &= V(\phi) \cup V(\psi), \\ V(\phi \wedge \psi) &= V(\phi) \cap V(\psi), \\ V(\neg\phi) &= W \setminus V(\phi), \\ V(\Diamond\phi) &= m_\Diamond(V(\phi)) \text{ te} \\ V(\Box\phi) &= m_\Box(V(\phi)). \end{aligned}$$

Dokaz. Sve je tvrdnje jednostavno dokazati direktno iz definicija valuacije i odgovarajućeg veznika, odnosno operatora. U modalnom slučaju, za $m_\Diamond$ samo treba primijetiti da su tvrdnje $w \in V(\Diamond\phi)$ i $w \in m_\Diamond(V(\phi))$ obje ekvivalentne tvrdnji: postoji $v \in W$ takav da je wRv i $v \in V(\phi)$ (neposredno iz definicija od V i $m_\Diamond$). Analogno se pokazuje tvrdnja za $m_\Box$. $\square$

Među pojmovima koje trebamo definirati kako bismo mogli sasvim sažeto formulirati Goldblatt-Thomasonov teorem nalaze se i ultrafiltar-proširenja.

Definicija 1.36. Neka je $\mathfrak{F} = (W, R)$ okvir. Kažemo da je $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{F} = (Uf_W, R^{ue})$ *ultrafiltar-proširenje okvira* $\mathfrak{F}$ ako je Uf_W skup svih ultrafiltara nad W, a R^{ue} je definirana sa: $uR^{ue}v$ ako i samo ako $m_\Diamond(X) \in u$ za sve $X \in v$. Kažemo da je $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{M} = (\mathfrak{ue}\,\mathfrak{F}, V^{ue})$ *ultrafiltar-proširenje modela* $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ ako je $V^{ue}(p)$ skup svih ultrafiltara nad W čiji je $V(p)$ element.

Napomena. Ovdje nam teorem 1.9 garantira da će za sve valuacije V i varijable $p \in \Phi$ takve da je $V(p) \neq \emptyset$ postojati ultrafiltar U nad W takav da $V(p) \in U$: jednostavno uzmemo (pravi) filtar generiran skupom $\{V(p)\}$ i pomoću spomenutog teorema ga nadopunimo do ultrafiltra.

Tu ćemo još razmotriti neke važne koncepte koji će nam omogućiti bolje shvaćanje modalne ekspresivnosti na modelima. Za početak dajemo definiciju m-saturiranosti i opisujemo vezu klasa m-saturiranih modela s još jednim poznatim tipom klasa modela.

Definicija 1.37. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model i neka je Σ skup formula. Kažemo da je model $\mathfrak{M}$ *m-saturiran* ako za svaki svijet $w \in W$ vrijedi sljedeće: ako za svaki $\sigma \subseteq_{\text{fin.}} \Sigma$ postoji svijet $v_\sigma \in W$ takav da je wRv_σ i $v_\sigma \Vdash \bigwedge \sigma$, onda postoji svijet $v \in W$ takav da je wRv i vrijedi $v \Vdash \Sigma$.

Vidjet ćemo da su klase m-saturiranih modela ništa drugo nego specijalni slučajevi takozvanih Hennessy-Milnerovih klasa. Te klase definiramo koristeći pojam bisimulacije.

Definicija 1.38. Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ modeli. Kažemo da je neprazna binarna relacija $Z \subseteq W \times W'$ *bisimulacija između* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ (oznaka: $Z : \mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{M}'$) ako su sljedeći uvjeti zadovoljeni:

(i) ako je wZw', onda za svaki $p \in \Phi$ vrijedi: $w \Vdash p$ ako i samo ako $w' \Vdash p$;

(ii) ako je wZw' i wRv, onda postoji $v' \in W'$ takav da je vZv' i $w'R'v'$ (uvjet *forth*);

(iii) ako je wZw' i $w'R'v'$, onda postoji $v \in W$ takav da je vZv' i wRv (uvjet *back*).

Ako su neka dva svijeta $w \in W$ i $w' \in W'$ u takvoj relaciji, kažemo da su w i w' *bisimulirani* (oznaka: $\mathfrak{M}, w \rightleftarrows \mathfrak{M}', w'$). Ukoliko postoji bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$, pišemo $\mathfrak{M} \rightleftarrows \mathfrak{M}'$ te kažemo da su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ *bisimulirani modeli.*

Definicija 1.39. Neka je $\mathscr{K}$ klasa modela. Kažemo da je $\mathscr{K}$ *Hennessy-Milnerova klasa* ili da $\mathscr{K}$ *ima Hennessy-Milnerovo svojstvo* ako za svaka dva modela $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \in \mathscr{K}$ i svaka dva svijeta $w \in |\mathfrak{M}|$ i $w' \in |\mathfrak{M}'|$, $w \equiv w'$ povlači $\mathfrak{M}, w \rightleftarrows \mathfrak{M}', w'$.

Propozicija 1.40. *Svaka klasa $\mathscr{K}$ m-saturiranih modela ima Hennessy-Milnerovo svojstvo.*

Dokaz. Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ m-saturirani modeli iz $\mathscr{K}$. Dovoljno je dokazati da je relacija modalne ekvivalencije između svjetova u $\mathfrak{M}$ i svjetova u $\mathfrak{M}'$ bisimulacija. Dokazujemo uvjet *forth* uz napomenu da je uvjet na propozicionalnim varijablama zadovoljen po pretpostavci, a uvjet *back* slijedi analogno.

Pretpostavimo, dakle, da su $w, v \in W$ i $w' \in W'$ takvi da je wRv i $w \equiv w'$. Neka je Δ skup formula istinitih na v. Tada za svaki konačan podskup $\delta \subseteq \Delta$ imamo $\mathfrak{M}, v \Vdash \bigwedge \delta$, a time i $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond \bigwedge \delta$. Iz $w \equiv w'$ slijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash \Diamond \bigwedge \delta$, pa w' ima R'-sljedbenika v_δ takvog da je $\mathfrak{M}', v_\delta \Vdash \bigwedge \delta$. Drugim riječima, Δ je konačno ispunjiv na skupu sljedbenika od w'. Zbog m-saturiranosti je Δ ispunjiv na nekom sljedbeniku v' od w'. Stoga je $v \equiv v'$. $\square$

Upotrijebit ćemo još jednu tvrdnju o ultrafiltar-proširenjima u dokazu Goldblatt-Thomasonovog teorema. Radi se o propoziciji koja kaže da je svaki svijet u modelu modalno ekvivalentan njemu odgovarajućem ultrafiltru u ultrafiltar-proširenju. Prije toga uvodimo jednu oznaku, ali i dokazujemo jednu jednostavnu tehničku lemu.

Oznaka. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model te $w \in W$. Označimo $\pi_w = \{X \subseteq W : w \in X\}$ glavni filtar generiran skupom $\{w\}$. Očito se radi o ultrafiltru.

Napomena. Jasno je da pripadni okvir proizvoljnog modela ima izomorfnu kopiju unutar ultrafiltar-proširenja tog modela. Naime, vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} wRv &\iff w \in m_\Diamond(X) \text{ za svaki } X \subseteq W \text{ takav da } v \in X \\ &\iff m_\Diamond(X) \in \pi_w \text{ za svaki } X \subseteq W \text{ takav da } X \in \pi_v \\ &\iff \pi_w R^{ue} \pi_v. \end{aligned}$$

Lema 1.41. *Neka je $\mathfrak{F} = (W, R)$ okvir. Tada za svaki $X \subseteq W$ vrijedi:*

$$m_\Box(X) = W \setminus m_\Diamond(W \setminus X).$$

Dokaz. Neka je $w \in m_\Box(X)$. To prema definiciji od $m_\Box$ znači da za sve $v \in W$ takve da je wRv vrijedi $v \in X$. Kad bi bilo $w \in m_\Diamond(W \setminus X)$, to bi značilo da postoji $v \in W \setminus X$ takav da je wRv, što je u kontradikciji s prethodnim. Prema tome, vrijedi $w \in W \setminus m_\Diamond(W \setminus X)$.

Obratno, neka je $w \in W \setminus m_\Diamond(W \setminus X)$. Tada w nije u $m_\Diamond(W \setminus X)$. To znači da ni za jedan $v \in W \setminus X$ ne vrijedi wRv. Pretpostavimo li da nije $w \in m_\Box(X)$, vrijedit će da postoji $v \in W \setminus X$ za koji je wRv, a to je u kontradikciji s dokazanim. $\Box$

Dokažimo propoziciju o očuvanju istinitosti za ultrafiltar-proširenja.

Propozicija 1.42. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model. Tada je za svaku formulu ϕ i svaki ultrafiltar u nad W istinito sljedeće: $V(\phi) \in u$ ako i samo ako $u \in V^{ue}(\phi)$. Prema tome, za svaki svijet $w \in W$ imamo $w \equiv \pi_w$.*

Dokaz. Druga tvrdnja slijedi iz prve zbog:

$$w \Vdash \phi \iff w \in V(\phi) \iff V(\phi) \in \pi_w \iff \pi_w \in V^{ue}(\phi) \iff \pi_w \Vdash \phi.$$

Prvu tvrdnju dokazujemo indukcijom po složenosti formule ϕ. Tvrdnja je istinita za $p \in \Phi$ neposredno prema definiciji valuacije V^{ue}, a za $\bot$ vrijedi jer je svaki ultrafiltar pravi filtar. Bulovske slučajeve je lako razriješiti pomoću propozicije 1.35.

Razmotrimo modalni slučaj. Neka je $\phi = \Diamond\psi$. Najprije pretpostavimo da je $u \in V^{ue}(\phi)$. Tada postoji ultrafiltar $v \in Uf_W$ takav da je $uR^{ue}v$ i

$v \in V^{ue}(\psi)$. Prema pretpostavci indukcije je $V(\psi) \in v$. Zbog toga i $uR^{ue}v$ imamo $m_\Diamond(V(\psi)) \in u$. Iz propozicije 1.35 slijedi $V(\Diamond\psi) \in u$.

Obratno, pretpostavimo da je $V(\Diamond\psi) \in u$. Treba nam ultrafiltar v takav da je $V(\psi) \in v$ i $uR^{ue}v$. Potonji se uvjet svodi na: $m_\Diamond(X) \in u$ za sve $X \in v$ ili, ekvivalentno,

$$v_0 := \{X : m_\Box(X) \in u\} \subseteq v.$$

Naime, pretpostavimo da vrijedi prva tvrdnja. Iz $X \in v_0$ slijedi $m_\Box(X) \in u$, odnosno prema lemi 1.41 vrijedi $m_\Diamond(W \setminus X) = W \setminus m_\Box(X) \notin u$. To znači da $W \setminus X \notin v$, odnosno $X \in v$. Ako pak pretpostavimo drugu tvrdnju, tada iz $X \in v$ slijedi $W \setminus X \notin v$, a time i $W \setminus X \notin v_0$. Definicija od v_0 i lema 1.41 tada povlače $W \setminus m_\Diamond(X) = m_\Box(W \setminus X) \notin u$, a time je $m_\Diamond(X) \in u$.

Ideja je iskoristiti teorem o ultrafiltru kako bismo izgradili potreban ultrafiltar. No, prije svega nam treba zaključak da $v_0 \cup \{V(\psi)\}$ ima svojstvo konačnih presjeka. Neka su stoga $Y, Z \in v_0$. Po definiciji, $m_\Box(Y), m_\Box(Z) \in u$. Budući da je u ultrafiltar, vrijedi $m_\Box(Y \cap Z) = m_\Box(Y) \cap m_\Box(Z) \in u$. To pokazuje $Y \cap Z \in v_0$, odnosno da je v_0 zatvoren na konačne presjeke.

Provjerimo sada da za sve $Y \in v_0$ vrijedi $Y \cap V(\psi) \neq \emptyset$ (posebno, $\emptyset \notin v_0$). Neka je Y proizvoljan element of v_0. Tada je $m_\Box(Y) \in u$. Kako je u zatvoren na konačne presjeke i $\emptyset \notin u$, mora postojati element $x \in m_\Box(Y) \cap V(\Diamond\psi)$. No tada x mora imati sljedbenika y u $V(\psi)$. Konačno, $x \in m_\Box(Y)$ povlači $y \in Y$.

Iz dokazanih činjenica slijedi da skup $v_0 \cup \{V(\psi)\}$ ima svojstvo konačnih presjeka, pa se pomoću teorema 1.9 može nadopuniti do ultrafiltra v. Prema dokazanom iz $v_0 \subseteq v$ slijedi $uR^{ue}v$, a $V(\psi) \in v$ i pretpostavka indukcije povlače $v \in V^{ue}(\psi)$. Stoga je $u \in V^{ue}(\Diamond\psi)$. □

Propozicija 1.43. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model. Tada je $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{M}$ m-saturiran model.*

Dokaz. Neka je u ultrafiltar nad W te Δ skup modalnih formula koji je konačno ispunjiv na skupu sljedbenika od u. Želimo naći ultrafiltar u' takav da je $uR^{ue}u'$ i $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{M}, u' \Vdash \Delta$. Za skup Δ' svih konačnih konjunkcija formula iz Δ definiramo

$$\Gamma = \{V(\phi) : \phi \in \Delta'\} \cup \{Y \subseteq W : m_\Box(Y) \in u\}.$$

Tvrdimo da skup Γ ima svojstvo konačnih presjeka. Budući da su oba skupa u uniji zatvorena na konačne presjeke, dovoljno je pokazati da za proizvoljne $\phi \in \Delta'$ i $Y \subseteq W$ gdje je $m_{\Box}(Y) \in u$ vrijedi $V(\phi) \cap Y \neq \emptyset$. No, ako je $\phi \in \Delta'$, onda po pretpostavci postoji sljedbenik u'' od u takav da je $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{M}, u'' \Vdash \phi$, odnosno prema propoziciji 1.42 vrijedi $V(\phi) \in u''$. Također, prema lemi 1.41 iz $m_{\Box}(Y) \in u$ dobivamo $m_{\Diamond}(W \setminus Y) = W \setminus m_{\Box}(Y) \notin u$. Iz definicije od R^{ue} slijedi $W \setminus Y \notin u''$. Stoga je $Y \in u''$. Prema tome, $V(\phi) \cap Y \in u''$, pa je $V(\phi) \cap Y \neq \emptyset$.

Prema teoremu 1.9 skup Γ možemo proširiti do ultrafiltra u'. Na njemu je Δ očito ispunjen. Dokažimo da je u' sljedbenik od u. Iz $\{Y \subseteq W : m_{\Box}(Y) \in u\} \subseteq u'$ slijedi da za svaki $Y \in u'$ imamo $W \setminus Y \notin \{Y \subseteq W : m_{\Box}(Y) \in u\}$, odnosno prema lemi 1.41 vrijedi $m_{\Diamond}(Y) = W \setminus m_{\Box}(W \setminus Y) \in u$. Zaključujemo da je $uR^{ue}u'$. $\Box$

Nastavak našeg razmatranja ultrafiltar-proširenja bit će usmjeren dokazivanju da nećemo proći bez isticanja pretpostavke o ultrafiltar-proširenjima u iskazu Goldblatt-Thomasonovog teorema. Za to će nam dobro doći jedan primjer čije detaljno razumijevanje je ključno, pa ćemo ga pažljivo raspisati. U tu svrhu, dokažimo jednu propoziciju.

Propozicija 1.44. *Neka je U ultrafiltar nad beskonačnim skupom I. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(i) U nije glavni ultrafiltar.

(ii) U sadrži sve kofinitne podskupove od I.

(iii) U sadrži samo beskonačne podskupove od I.

Dokaz.

(ii)⇒(iii): Pretpostavimo da U sadrži neki konačan skup. No, tada ne može sadržavati njegov komplement koji je kofinitan.

(iii)⇒(ii): Pretpostavimo da U ne sadrži neki kofinitan skup. No, tada sadrži njegov konačan komplement.

(iii)⇒(i): Ako U sadrži samo beskonačne podskupove od I, očito nije glavni (da bi bio glavni, mora sadržavati i jednočlan skup kojim je generiran).

(i)⇒(iii): Neka je $A = \{a_0, \ldots, a_n\} \subseteq I$ za neki $n < \omega$, te neka je $A \in U$. Tada barem jedan od skupova $\{a_0\}, \ldots, \{a_n\}$ mora biti u U. Kad ne bi bilo tako, vrijedilo bi $I \setminus \{a_0\} \in U, \ldots, I \setminus \{a_n\} \in U$. Tada je i $\big(I \setminus \{a_0\}\big) \cap \ldots \cap \big(I \setminus \{a_0\}\big) = I \setminus \{a_0, \ldots, a_n\} = I \setminus A \in U$, što je u kontradikciji s $A \in U$ po definiciji ultrafiltra. Dovoljno je još pokazati da je nađeni $\{a_i\}$ najmanji u $(U, \subseteq)$. Pretpostavimo da postoji $X \in U$ takav da $a_i \notin X$. No, tada je i $\{a_i\} \cap X = \emptyset \in U$, a to je opet u kontradikciji s definicijom ultrafiltra. Dakle, U je generiran s $\{a_i\}$ i stoga glavni.

□

Primjer. Zanima nas kako izgleda ultrafiltar-proširenje okvira $(\omega, <)$. Prema gornjoj propoziciji, ultrafiltri nad ω mogu ili biti glavni ili sadržavati sve kofinitne podskupove od ω (postojanje onih koji nisu glavni dobivamo primjenom korolara 1.10 na Fréchetov filtar nad ω—dobivamo ultrafiltar koji sadrži sve kofinitne podskupove od ω, pa prema propoziciji 1.44 on nije glavni). Naravno, znamo da trećih nema prema propoziciji 1.44.

Općenito, pokazali smo da glavni ultrafiltri $\pi_w, w \in \mathfrak{F}$ čine svojevrsnu kopiju od $\mathfrak{F}$ unutar $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{F}$ (za sve $w, v \in \mathfrak{F}$ vrijedi: ako je wRv, onda je $\pi_w R^{ue} \pi_v$). Ovdje čak vrijedi da je svaki ultrafiltar koji nije glavni dostiživ iz svakog ultrafiltra: neka su $u, u' \in \mathfrak{ue}(\omega, <)$, neka u' nije glavni, te neka je $X \in u'$. Tada, prema propoziciji 1.44, X mora biti beskonačan, pa za svaki $n < \omega$ postoji m takav da je $n < m$ i $m \in X$. Stoga je $m_\Diamond(X) = \omega$. Naravno, vrijedi $\omega \in u$ (jer je u filtar nad ω), pa je $u <^{ue} u'$.

Prema tome, možemo zamišljati $\mathfrak{ue}(\omega, <)$ kao nanizane $\pi_0, \pi_1, \ldots$, a na njihovom kraju ultrafiltre koji nisu glavni i koji su svi međusobno (simetrično) povezani relacijom R^{ue} (čak i svaki sa sobom), te je svaki od njih još dostiživ iz π_n, za svaki $n < \omega$.

Skiciramo li $\mathfrak{ue}(\omega, <)$ tako da podrazumijevamo tranzitivnost i ne ističemo veze prema ultrafiltrima koji nisu glavni, dobit ćemo balon od 2^c ultrafiltara koji nisu glavni na kraju beskonačno duge niti, zapravo kopije od $(\omega, <)$.

Napomena. Iz Pospíšilovog teorema (v. [5]) odmah slijedi da ultrafiltara nad beskonačnim skupom W ima $2^{2^{\mathrm{card}\, W}}$. Dokaz tog teorema nije težak, ali ga preskačemo jer nam ne treba u nastavku.

Prijelaz na okvire

Dokazali smo popriličan broj korisnih tvrdnji za modele, ali vrlo velik i zanimljiv dio modalne logike bavi se proučavanjem okvira. Najbitnije za nas bit će saznati što smo točno u smislu definabilnosti pokupili od logike prvog reda.

Potpuno razumijevanje krije se u Goldblatt-Thomasonovom teoremu i razmatranjima iza njega, ali prije nego se možemo upustiti u diskusiju o modalnoj definabilnosti elementarnih klasa okvira, moramo dokazati da naše četiri konstrukcije čuvaju valjanost modalnih formula na okvirima.

Teorem 1.45. *Neka je ϕ modalna formula.*

(i) Neka je $\{\mathfrak{F}_i : i \in I\}$ familija disjunktnih okvira. Ako za svaki $i \in I$ vrijedi $\mathfrak{F}_i \Vdash \phi$, onda je $\biguplus_i \mathfrak{F}_i \Vdash \phi$.

(ii) Neka je $\mathfrak{F}$ okvir i $\mathfrak{F}' \rightarrowtail \mathfrak{F}$. Ako vrijedi $\mathfrak{F} \Vdash \phi$, onda je $\mathfrak{F}' \Vdash \phi$.

(iii) Neka je $\mathfrak{F}$ okvir i $\mathfrak{F} \twoheadrightarrow \mathfrak{F}'$. Ako vrijedi $\mathfrak{F} \Vdash \phi$, onda je $\mathfrak{F}' \Vdash \phi$.

(iv) Neka je $\mathfrak{F}$ okvir i $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{F} \Vdash \phi$. Tada vrijedi $\mathfrak{F} \Vdash \phi$.

Dokaz.

(i) Pretpostavimo da ϕ nije valjana na $\mathfrak{F} = \biguplus_i \mathfrak{F}_i$. Tada postoje valuacija V i svijet $w \in |\mathfrak{F}|$ takvi da $(\mathfrak{F}, V), w \nVdash \phi$. Definiramo valuacije $V_i, i \in I$ na sljedeći način:
$$V_i(p) = V(p) \cap |\mathfrak{F}_i|.$$
Iz definicije valuacija V_i i disjunktnosti od $|\mathfrak{F}_i|$ vidimo da je $V = \biguplus_i V_i$. Prema propoziciji 1.24 postoji $i \in I$ takav da $(\mathfrak{F}_i, V_i), w \nVdash \phi$, odnosno vrijedi $\mathfrak{F}_i \nVdash \phi$.

(ii) Pretpostavimo da ϕ nije valjana na $\mathfrak{F}'$, tj. da postoje valuacija V' i svijet $w \in |\mathfrak{F}'|$ takvi da $(\mathfrak{F}', V'), w \nVdash \phi$. Očito je $(\mathfrak{F}', V') \rightarrowtail (\mathfrak{F}, V')$, pa prema propoziciji 1.27 vrijedi $(\mathfrak{F}, V'), w \nVdash \phi$, odnosno $\mathfrak{F} \nVdash \phi$.

(iii) Pretpostavimo da ϕ nije valjana na $\mathfrak{F}'$, odnosno da postoje valuacija V' i svijet $w' \in |\mathfrak{F}'|$ takvi da $(\mathfrak{F}', V'), w' \nVdash \phi$. Definiramo valuaciju V

na sljedeći način:

$$V(p) = \{x \in |\mathfrak{F}| : f(x) \in V'(p)\}.$$

Budući da je $(\mathfrak{F}, V) \twoheadrightarrow (\mathfrak{F}', V')$, primjenom propozicije 1.33 dobivamo $(\mathfrak{F}, V), w \nVdash \phi$ za neki $w \in |\mathfrak{F}|$.

(iv) Pretpostavimo da ϕ nije valjana na $\mathfrak{F}$, tj. da postoje valuacija V i svijet $w \in |\mathfrak{F}|$ takvi da $(\mathfrak{F}, V), w \nVdash \phi$. No, tada vrijedi $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \neg\phi$. Stoga iz propozicije 1.42 za $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ dobivamo $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{M}, \pi_w \Vdash \neg\phi$. Drugim riječima, imamo $(\mathfrak{ue}\,\mathfrak{F}, V^{ue}), \pi_w \nVdash \phi$, odnosno $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{F} \nVdash \phi$. □

Pogledajmo jedan od više načina pojednostavljivanja okvira pri proučavanju modalne logike: uz pomoć iduće definicije i propozicije moći ćemo se koncentrirati na sastavne dijelove okvira koji su često puno jednostavniji.

Definicija 1.46. Neka je $\mathfrak{F} = (W, R)$ okvir. Za podokvir $\mathfrak{F}' = (W', R|_{W' \times W'})$ kažemo da je *generiran jednim svijetom (točkom)* ako za neki $w \in W$ vrijedi

$$W' = \{v \in W : \text{ postoji } k < \omega \text{ takav da je } wR^k v\}.$$

Svijet w u definiciji nazivamo *korijenom od* $\mathfrak{F}$.

Vidjet ćemo kako uzeti sve točkom generirane podokvire nekog okvira i pomoću njih sastaviti taj okvir bez korištenja konstrukcija na klasama okvira izvan četiri osnovne konstrukcije. Ovaj pristup će nam osobito dobro doći u dokazu Goldblatt-Thomasonovog teorema.

Propozicija 1.47. *Neka je $\mathfrak{F}$ okvir. Tada postoji familija $\{\mathfrak{F}_i : i \in I\}$ okvira takva da vrijedi:*

(i) svaki $\mathfrak{F}_i$ je točkom generiran podokvir od $\mathfrak{F}$ te

(ii) postoji surjektivni ograničeni morfizam

$$f : \biguplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i \to \mathfrak{F}.$$

Dokaz. Neka je $\mathfrak{F} = (W, R)$ okvir takav da je $W = \{w_i : i \in I\}$ za neki $I \neq \emptyset$. Za svaki $i \in I$ definiramo:

$$\begin{aligned} W_i &= \{w \in W: \text{ postoji } k < \omega \text{ takav da je } w_i R^k w\}, \\ R_i &= R \cap (W_i \times W_i) \text{ te} \\ \mathfrak{F}_i &= (W_i, R_i). \end{aligned}$$

Neka je sada $f : \biguplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i \to \mathfrak{F}$ definirana sa $f(w, j) = w$ za sve svjetove (w, j) okvira $\biguplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i = (W', R')$. Budući da je za svaki $i \in I$ okvir $\mathfrak{F}_i$ podokvir od $\mathfrak{F}$ generiran jednim svijetom, preostaje još pokazati da je f surjektivni ograničeni morfizam.

Surjektivnost je, dakako, očita (za $w_i \in W$ vrijedi $f(w_i, i) = w_i$). Pretpostavimo stoga da za $(w, i), (v, j) \in W'$ vrijedi $(w, i)R'(v, j)$. Tada postoji $k \in I$ takav da je $(w, k)R_k(v, k)$. Po definiciji R_k vrijedi wRv, tj. $f(w, i)Rf(v, j)$. Prema tome, f je homomorfizam u odnosu na R', odnosno vrijedi *forth*.

Unatrag, neka je $(w, i) \in W'$, $w, v \in W$ te wRv. Iz wRv tada slijedi $(w, i)R_i(v, i)$, odnosno $(w, i)R'(v, i)$. Dakle, našli smo svijet $(v, i) \in W'$ takav da je $(w, i)R'(v, i)$ i $f(v, i) = v$. Stoga, vrijedi *back* uvjet, pa je f zaista ograničeni morfizam. □

Poglavlje 2

Saturiranost

Daleko najvećom poteškoćom u dokazivanju Goldblatt-Thomasonovog teorema pokazat će se dobivanje dovoljno kvalitetnih struktura za našu svrhu. Trebale bi nam strukture koje su bogate u smislu, vrlo opušteno rečeno, postojanja svjedoka za mnoge skupove formula s točno jednom slobodnom varijablom.

Razlog poteškoći bit će pregrubo ubacivanje jedne ideje u preslabu teoriju. Naime, vrlo domišljat dokaz uključivat će proučavanje skupa propozicionalnih varijabli koji je neprebrojiv. Kako bismo mogli pričati o saturiranosti, pojmu koji se definira u okviru logike prvog reda, standardnom translacijom preselit ćemo diskusiju u to okruženje i naš neprebrojiv skup propozicionalnih varijabli zapisati kao neprebrojiv skup nelogičkih simbola. No, teorem koji nam daje i više nego dovoljno saturirane strukture to čini samo za prebrojive skupove nelogičkih simbola. Stoga ćemo morati pojačati taj rezultat. Dokazat ćemo ga pomoću tri leme, od kojih je jedna netrivijalna, i jednog pomoćnog teorema.

Naravno, kako bismo za početak uspjeli dokazati čak i slabu varijantu nama bitnog teorema, moramo se dobro pripremiti. Najprije definiramo svojstvo ultrafiltara koje predstavlja jedan od dva sastojka koji će nam trebati za postizanje određene razine saturiranosti. Radi se o prebrojivo nepotpunim ultrafiltrima. Odmah dajemo i karakterizaciju tog pojma.

Definicija 2.1. Kažemo da je filtar F *prebrojivo nepotpun* ako postoji prebrojiv skup $E \subseteq F$ takav da $\bigcap E \notin F$.

Lema 2.2. *Neka je $I \neq \emptyset$ i U ultrafiltar nad I. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:*

(i) U je prebrojivo nepotpun.

(ii) Postoji silazan niz skupova $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$ gdje je $I_n \in U$ za svaki $n < \omega$, takav da vrijedi $\bigcap_{n<\omega} I_n = \emptyset$.

Dokaz.

(i)⇒(ii): Neka je $E = \{X_n : n < \omega\} \subseteq U$ takav da $\bigcap E = \bigcap_{n<\omega} X_n \notin U$. Definiramo induktivno niz skupova I_n ovako:

$$\begin{aligned} I_0 &= I \\ I_1 &= X_0 \setminus \left(\bigcap E\right) \\ I_{n+1} &= I_n \cap X_n, \text{ za } n > 0. \end{aligned}$$

Uočimo da je $(I_n)_{n<\omega}$ silazan niz skupova. Dokazujemo da je $I_n \in U$ za svaki $n < \omega$ indukcijom po n: budući da je $I_0 = I$ i U ultrafiltar, vrijedi $I_0 \in U$. Nadalje, $X_0 \in U$ te $(\bigcap E)^c \in U$, pa je $X_0 \cap (\bigcap E)^c \in U$. No, $X_0 \cap (\bigcap E)^c = X_0 \setminus (\bigcap E) = I_1$. Stoga je $I_1 \in U$. Pretpostavimo da za neki $n > 0$ vrijedi $I_n \in U$. Budući da je po definiciji $I_{n+1} = I_n \cap X_n$, vrijedi $I_{n+1} \in U$.

Iz dokazanog slijedi da je $I_n \in U$ za svaki $n < \omega$. Još samo treba dokazati da je $\bigcap_{n<\omega} I_n = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno: neka je $x \in \bigcap_{n<\omega} I_n$ proizvoljan. Tada je $x \in I_1$, odnosno $x \in X_0$ i $x \notin \bigcap E$. Zatim, za sve $n > 0$ je $x \in I_{n+1}$. Zbog $I_{n+1} = I_n \cap X_n \subseteq X_n$ i $x \in X_0$ vrijedi $x \in X_n$ za sve $n < \omega$, tj. $x \in \bigcap E$. Time je dobivena kontradikcija.

(ii)⇒(i): Budući da je U ultrafiltar, $\bigcap_{n<\omega} I_n = \emptyset \notin U$.

□

Definicija 2.3. Neka je σ skup nelogičkih simbola. Sa $\Gamma(x)$ označimo skup (ne nužno svih) σ-formula takvih da samo varijabla x može imati slobodan nastup. Ako je $\mathfrak{M}$ neka σ-struktura, sa $\mathfrak{M} \models \Gamma[m]$ označavat ćemo činjenicu da uz valuaciju $v(x) = m$ (nije bitno kako je definirana na ostalim individualnim varijablama) vrijedi $\mathfrak{M} \models_v \Gamma(x)$. Ako je $\Gamma(x) = \{\gamma(x)\}$, pišemo $\mathfrak{M} \models \gamma[m]$.

Kažemo da je $\Gamma(x)$ *konačno ispunjiv na* $\mathfrak{M}$ ako za svaki konačan $\Delta(x) \subseteq \Gamma(x)$ postoji $m_\Delta \in |\mathfrak{M}|$ takav da $\mathfrak{M} \models \Delta[m_\Delta]$. Kažemo da je $\Gamma(x)$ *ispunjiv na* $\mathfrak{M}$ ako postoji $m \in |\mathfrak{M}|$ takav da $\mathfrak{M} \models \Gamma[m]$.

Definicija 2.4. Neka je σ skup nelogičkih simbola, $\mathfrak{M}$ neka σ-struktura te $\Gamma(x)$ skup kao gore. Kažemo da je $\Gamma(x)$ *konzistentan s teorijom modela* $\mathfrak{M}$ ako postoji σ-struktura $\mathfrak{N}$ takva da je $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$ i postoji $n \in |\mathfrak{N}|$ takav da je $\mathfrak{N} \models \Gamma[n]$.

Za dokaz slabije verzije teorema koji nam treba bit će nam od koristi jedna karakterizacija pojma konzistentnosti skupa formula s teorijom nekog modela. Uvodimo oznaku koja će nam uvelike olakšati zapisivanje u tom i narednim dokazima.

Oznaka. Neka je σ skup nelogičkih simbola, $\mathfrak{M} = (|\mathfrak{M}|, \varphi)$ σ-struktura te $A \subseteq |\mathfrak{M}|$. Koristit ćemo oznaku $\sigma[A] = \sigma \cup \{c_a : a \in A\}$ za proširenje od σ novim konstantskim simbolima c_a, za svaki $a \in A$. Nadalje, sa $\mathfrak{M}_A = (|\mathfrak{M}|, \varphi_A)$ označavat ćemo $\sigma[A]$-strukturu gdje je $\varphi_A(c_a) = a$ za svaki $a \in A$ i $\varphi_A|_\sigma = \varphi$. Nekad ćemo pisati i $(\mathfrak{M}, a)_{a\in A}$ umjesto $\mathfrak{M}_A$, odnosno fiksirat ćemo neki dobar uređaj na A i pisati $(\mathfrak{M}, a_m)_{m<\lambda}$ gdje je $\lambda = \operatorname{card} A$.

Lema 2.5. *Neka je σ skup nelogičkih simbola, $\mathfrak{M}$ neka σ-struktura te $\Gamma(x)$ skup σ-formula takvih da samo varijabla x može imati slobodan nastup. Tada je $\Gamma(x)$ konzistentan s teorijom modela $\mathfrak{M}$ ako i samo ako je $\Gamma(x)$ konačno ispunjiv na $\mathfrak{M}$.*

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $\Delta(x) = \{\delta_1(x), \ldots, \delta_k(x)\} \subseteq_{\text{fin.}} \Gamma(x)$. Iz pretpostavke slijedi da postoji $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$ i $n_\Delta \in |\mathfrak{N}|$ takav da je $\mathfrak{N} \models \Delta[n_\Delta]$. Drugim riječima, vrijedi $\mathfrak{N} \models \exists x\big(\delta_1(x) \wedge \ldots \wedge \delta_k(x)\big)$. No, iz $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$ slijedi $\mathfrak{M} \models \exists x\big(\delta_1(x) \wedge \ldots \wedge \delta_k(x)\big)$, pa postoji $m_\Delta \in |\mathfrak{M}|$ takav da je $\mathfrak{M} \models \Delta[m_\Delta]$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $\Delta'(x)$ proizvoljan konačan podskup od $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) \cup \Gamma(x)$ te $\Delta(x) = \Delta'(x) \cap \Gamma(x)$. Tada po pretpostavci postoji $m_\Delta \in |\mathfrak{M}|$ takav da $\mathfrak{M} \models$

$\Delta[m_\Delta]$. Dakle, vrijedi $\mathfrak{M}_{\{m_\Delta\}} \models \Delta(c_{m_\Delta}|x)$. Budući da trivijalno imamo i $\mathfrak{M}_{\{m_\Delta\}} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$, vrijedi $\mathfrak{M}_{\{m_\Delta\}} \models \Delta'(c_{m_\Delta}|x)$.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je za svaki c_{m_Δ} iskorišten isti simbol, nazovimo ga c. Koncentrirajmo se na $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$ i skup σ'-formula $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}) \cup \Gamma(c|x)$. Dokazali smo da je taj skup formula konačno ispunjiv, pa je prema teoremu kompaktnosti ispunjiv. Stoga postoji σ'-struktura $\mathfrak{N}$ takva da je $\mathfrak{N} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M}) \cup \Gamma(c|x)$. Tada iz $\mathfrak{N} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ slijedi $\mathfrak{N} \equiv \mathfrak{M}$, a iz $\mathfrak{N} \models \Gamma(c|x)$ slijedi da postoji $n \in |\mathfrak{N}|$ takav da $\mathfrak{N} \models \Gamma[n]$.

Primijetimo da sada $\mathfrak{N}$ možemo smatrati σ-strukturom: konstantski simbol c više nije ni u jednoj formuli koja nas zanima, pa jednostavno maknemo interpretaciju od c iz $\mathfrak{N}$.

□

Vrijeme je za iskaz i dokaz teorema o proširenju. Naime, voljeli bismo utvrditi da je ultraprodukt familije proširenja upravo proširenje ultraprodukta. Tu činjenicu koristimo u dokazu prvog od teorema koji su posvećeni temi ovog poglavlja—saturiranosti.

Teorem 2.6. *Neka je σ skup nelogičkih simbola, A i I neprazni skupovi, $\sigma' = \sigma \cup A$, $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ familija σ-struktura te $\{\mathfrak{M}'_i : i \in I\}$ familija σ'-struktura takvih da je $\mathfrak{M}'_i = (\mathfrak{M}_i)_A$. Pretpostavimo da je U ultrafiltar nad I. Tada je $\prod_U \mathfrak{M}'_i = (\prod_U \mathfrak{M}_i)_B$ za neki skup B.*

Dokaz. Očito strukture $\mathfrak{M}_i$ i $\mathfrak{M}'_i$ imaju iste nosače. Stoga je i $|\prod_U \mathfrak{M}_i| = |\prod_U \mathfrak{M}'_i|$. Nadalje, budući da je $\mathfrak{M}'_i = (\mathfrak{M}_i)_A$, svaki se simbol iz σ isto interpretira u $\mathfrak{M}_i$ i $\mathfrak{M}'_i$. Prema definiciji ultraprodukta σ-struktura, interpretacija simbola iz σ na $\prod_U \mathfrak{M}_i$ ovisi samo o interpretacijama u $\mathfrak{M}_i$, nosačima $|\mathfrak{M}_i|$ i ultrafiltru U. Stoga se svaki simbol iz σ isto interpretira u $\prod_U \mathfrak{M}_i$ i $\prod_U \mathfrak{M}'_i$, odnosno postoji skup B takav da je $\prod_U \mathfrak{M}'_i = (\prod_U \mathfrak{M}_i)_B$. □

Definicija 2.7. Neka je σ skup nelogičkih simbola, $\mathfrak{M}$ neka σ-struktura te λ proizvoljan kardinalni broj. Kažemo da je $\mathfrak{M}$ λ-*saturirana* ako za svaki $A \subseteq |\mathfrak{M}|$ takav da je $\mathrm{card}\, A < \lambda$ i svaki skup $\Gamma(x)$ $\sigma[A]$-formula konzistentan s teorijom od $\mathfrak{M}_A$ vrijedi da postoji $u \in |\mathfrak{M}_A|$ takav da je $\mathfrak{M}_A \models \Gamma[u]$.

Nadovežimo se na prethodnu definiciju na očekivan način.

Lema 2.8. *Neka je σ skup nelogičkih simbola, $\mathfrak{M}$ neka σ-struktura te α granični kardinal. Tada je $\mathfrak{M}$ α-saturirana ako i samo ako je $\mathfrak{M}$ β-saturirana za sve $\beta < \alpha$.*

Dokaz. Jedan smjer je trivijalan. Za drugi, pretpostavimo da je struktura $\mathfrak{M}$ β-saturirana za sve $\beta < \alpha$. Kad ne bi bila i α-saturirana, postojao bi $A \subseteq |\mathfrak{M}|$, $\operatorname{card} A = \beta < \alpha$ te skup $\Gamma(x)$ $\sigma[A]$-formula konzistentan s teorijom od $\mathfrak{M}_A$ takav da je za svaki $u \in |\mathfrak{M}_A|$ zapravo $\mathfrak{M}_A \not\models \Gamma[u]$. No, tada $\mathfrak{M}$ nije $\beta + 1$-saturirana. □

Ono što sada treba istražiti je dobivanje saturiranih struktura za skupove nelogičkih simbola proizvoljne kardinalnosti. Nažalost, kao što smo i najavili, nećemo biti u stanju to učiniti u jednom koraku: najprije ćemo pokazati kako riješiti problem u slučaju prebrojivog skupa nelogičkih simbola. Zatim ćemo nastojati poopćiti taj rezultat na proizvoljne kardinalnosti pomoću relativno tehničkih razmatranja iz teorije modela.

Uz to poopćenje dat ćemo i definiciju jedne posebne vrste ultrafiltra koju nazivamo α-dobrim ultrafiltrom. To svojstvo je upravo drugi sastojak koji nas dijeli od one prave tvrdnje o saturiranosti. Drugim riječima, jednom kad budemo dokazali i egzistenciju α-dobrih prebrojivo nepotpunih ultrafiltara, razriješit ćemo tehnički najzahtjevniji dio dokaza Goldblatt-Thomasonovog teorema jednim vrlo jakim rezultatom koji ćemo odmah potom dokazati.

Teorem 2.9. *Neka je σ prebrojiv skup nelogičkih simbola i U prebrojivo nepotpun ultrafiltar nad skupom I. Tada je za svaku familiju σ-struktura $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ ultraprodukt $\prod_U \mathfrak{M}_i$ ω_1-saturiran.*

Dokaz. Neka je $A = \{a_m : m < \omega\} \subseteq |\prod_U \mathfrak{M}_i|$. Prema definiciji λ-saturiranosti i lemama 2.5 i 2.8, dovoljno je pokazati da za svaki skup $\Gamma(x)$ $\sigma[A]$-formula takvih da samo varijabla x može imati slobodan nastup vrijedi: ako je $\Gamma(x)$ konačno ispunjiv na $(\prod_U \mathfrak{M}_i, a_m)_{m<\omega}$, onda je $\Gamma(x)$ ispunjiv na $(\prod_U \mathfrak{M}_i, a_m)_{m<\omega}$. Primijetimo da iz $a_m = (\lambda i.a_m(i))_U$ pomoću teorema 2.6 dobivamo

$$\Big(\prod_U \mathfrak{M}_i, a_m\Big)_{m<\omega} = \prod_U \big((\mathfrak{M}_i, a_m(i))_{m<\omega}\big).$$

Budući da je σ prebrojiv skup, $\sigma[A]$ je također prebrojiv. Stoga je dovoljno pokazati da za svaki skup $\Gamma(x)$ σ-formula takvih da samo varijabla x može imati slobodan nastup vrijedi: ako je $\Gamma(x)$ konačno ispunjiv na $\prod_U \mathfrak{M}_i$, onda je $\Gamma(x)$ ispunjiv na $\prod_U \mathfrak{M}_i$.

Pretpostavimo stoga da je $\Gamma(x)$ konačno ispunjiv na $\prod_U \mathfrak{M}_i$. Budući da je σ prebrojiv, prebrojiv je i $\Gamma(x) = \{\gamma_1(x), \gamma_2(x), \ldots\}$. Nadalje, U je prebrojivo nepotpun, pa prema lemi 2.2 postoji prebrojiv silazan niz skupova

$$I = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$$

takav da je svaki $I_n \in U$ i $\bigcap_{n<\omega} I_n = \emptyset$. Neka je $X_0 = I$ te za svaki $n < \omega$, neka je

$$X_n = I_n \cap \big\{ i \in I : \mathfrak{M}_i \models (\exists x)(\gamma_1(x) \wedge \ldots \wedge \gamma_n(x)) \big\}.$$

Tada je prema Łošovom teoremu $X_n \in U$, za svaki $n < \omega$. Također je $\bigcap_{n<\omega} X_n = \emptyset$ i $X_n \supseteq X_{n+1}$, za svaki $n < \omega$. Iz toga slijedi da za svaki $i \in I$ postoji najveći $n(i) < \omega$ takav da je $i \in X_{n(i)}$. Sada biramo funkciju $f \in |\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i|$ na sljedeći način: ako je $n(i) = 0$, uzimamo $f(i) \in |\mathfrak{M}_i|$ proizvoljan; ako je $n(i) > 0$, uzimamo $f(i) \in |\mathfrak{M}_i|$ tako da vrijedi

$$\mathfrak{M}_i \models \big(\gamma_1(x) \wedge \ldots \wedge \gamma_{n(i)}(x)\big)\big[f(i)\big].$$

Za $n > 0$ i $i \in X_n$ bit će $n(i) \geq n$, pa zaključujemo $\mathfrak{M}_i \models \gamma_n\big[f(i)\big]$. Budući da je $X_n \in U$, iz Łošovog teorema slijedi $\prod_U \mathfrak{M}_i \models \gamma_n[f_U]$. Prema tome, vrijedi $\prod_U \mathfrak{M}_i \models \Gamma[f_U]$, odnosno $\Gamma(x)$ je ispunjiv na $\prod_U \mathfrak{M}_i$. □

Proučavanje saturiranosti za općenite kardinalne brojeve skupa nelogičkih simbola započinjemo uvođenjem nekih osnovnih pojmova koji će nam u tome pomoći. Definiramo dvije vrste skupovnih funkcija i spomenutu novu vrstu ultrafiltra kako bismo mogli generalizirati teorem 2.9.

Definicija 2.10. Neka je $I \neq \emptyset$, β proizvoljan kardinalni broj te f, g funkcije sa $\mathscr{P}_\omega(\beta)$ (skupa svih konačnih podskupova od β) u $\mathscr{P}(I)$. Pišemo $g \leq f$ ako za sve $u \in \mathscr{P}_\omega(\beta)$ vrijedi $g(u) \subseteq f(u)$. Kažemo da je f *antimonotona* ako za sve $u, w \in \mathscr{P}_\omega(\beta)$ takve da je $u \subseteq w$ vrijedi $f(u) \supseteq f(w)$. Kažemo da je g *antiaditivna* ako za sve $u, w \in \mathscr{P}_\omega(\beta)$ vrijedi $g(u \cup w) = g(u) \cap g(w)$.

Napomena. Očito je svaka antiaditivna funkcija sa $\mathscr{P}_\omega(\beta)$ u $\mathscr{P}(I)$ antimonotona.

Definicija 2.11. Neka je $I \neq \emptyset$, U ultrafiltar nad I te α beskonačan kardinalni broj. Kažemo da je ultrafiltar U *α-dobar* ako za svaki kardinal $\beta < \alpha$ i svaku antimonotonu funkciju $f : \mathscr{P}_\omega(\beta) \to U$ postoji antiaditivna funkcija $g : \mathscr{P}_\omega(\beta) \to U$ takva da je $g \leq f$.

Napomena. Primijetimo da je svaki α-dobar ultrafiltar i β-dobar za svaki beskonačni $\beta < \alpha$.

Lema 2.12. *Neka je $I \neq \emptyset$, U ultrafiltar nad I te α beskonačan kardinalni broj. U je α^+-dobar ako i samo ako za svaku antimonotonu funkciju f : $\mathscr{P}_\omega(\alpha) \to U$ postoji antiaditivna funkcija $g : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to U$ takva da je $g \leq f$.*

Dokaz. Jedan smjer je očit, a drugi je vrlo jednostavan. Za drugi, pretpostavimo da je $\beta \leq \alpha$ i $f : \mathscr{P}_\omega(\beta) \to U$ antimonotona. Definiramo funkciju $f' : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to U$ sa $f'(u) = f(u \cap \beta)$, za sve $u \in \mathscr{P}_\omega(\alpha)$. Lako se vidi da je f' antimonotona (direktno iz antimonotonosti od f). Prema pretpostavci postoji antiaditivna funkcija $g' \leq f'$ sa $\mathscr{P}_\omega(\alpha)$ u U. Neka je $g = g'|_{\mathscr{P}_\omega(\beta)}$. Jasno je da g preslikava $\mathscr{P}_\omega(\beta)$ u U. Direktno iz antiaditivnosti od g' slijedi antiaditivnost od g. Također, iz činjenice $g' \leq f'$ slijedi $g \leq f$. $\square$

Sljedeće dokazujemo da se svaka familija od α skupova kardinalnog broja α može profiniti do familije od α *disjunktnih* skupova kardinalnog broja α.

Lema 2.13. *Neka je α beskonačan kardinalni broj, X proizvoljan skup takav da je $\operatorname{card} X = \alpha$ te $\{Y_x : x \in X\}$ familija skupova od kojih je svaki kardinalnog broja α. Tada postoji familija skupova $\{Z_x : x \in X\}$ takva da za sve $x, y \in X$ vrijedi:*

(i) $Z_x \subseteq Y_x$,

(ii) $\operatorname{card} Z_x = \alpha$ *te*

(iii) *ako je $x \neq y$, tada $Z_x \cap Z_y = \emptyset$.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $X = \alpha$. Za svaki ordinalni broj $\beta \leq \alpha$, neka je $X_\beta = \{(\gamma, \delta) : \gamma \leq \delta < \beta\}$. Tada je $X_\beta \subseteq \beta \times \beta$. Budući da je α granični ordinalni broj, $X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$. Želimo naći injekciju f sa X_α takvu da je

$$f(\gamma, \delta) \in Y_\gamma, \text{ za sve } \gamma, \delta \text{ za koje je } \gamma \leq \delta < \alpha. \tag{$*$}$$

Jednom kad to učinimo, možemo definirati $Z_\gamma = \{f(\gamma, \delta) : \gamma \leq \delta < \alpha\}$. Familija $\{Z_\gamma : \gamma < \alpha\}$ očito ima tražena svojstva.

Funkciju f definiramo transfinitnom indukcijom. Neka je $\beta < \alpha$. Pretpostavimo da smo već definirali injekciju f_β s domenom X_β koja zadovoljava svojstvo $(*)$ za β. Iz $\operatorname{card} X_\beta < \alpha$ i $\operatorname{card} Y_\gamma = \alpha$ za sve $\gamma < \alpha$ slijedi da f_β možemo proširiti (AC) do injekcije $f_{\beta+1}$ s domenom $X_{\beta+1}$ takve da $(*)$ vrijedi za $\beta + 1$ ($\operatorname{card} X_{\beta+1} = \operatorname{card} X_\beta + \beta < \alpha + \alpha = \alpha$, pa možemo sačuvati injektivnost) . Uzmemo li uniju na graničnim ordinalima, dobivamo lanac funkcija f_β s domenom X_β takav da je f_β injekcija i zadovoljava svojstvo $(*)$. Tada je $f = \bigcup_{\beta<\alpha} f_\beta$ funkcija koju tražimo. □

U nastavku definiramo dva pojma koja ćemo koristiti pri iskazivanju i dokazivanju najzahtjevnije leme u ovom poglavlju. Ta će lema predstavljati ključ dokaza teorema o egzistenciji prebrojivo nepotpunih α^+-dobrih ultrafiltara nad proizvoljnim skupom kardinalnosti α.

Čim budemo dokazali taj teorem, začas ćemo imati i rezultat o saturiranosti dovoljno dobar za dokaz Goldblatt-Thomasonovog teorema.

Definicija 2.14. Neka je $I \neq \emptyset$ te F filtar nad I. Kažemo da je F *uniformni filtar* ako za svaki $A \in F$ vrijedi $\operatorname{card} A = \operatorname{card} I$.

Definicija 2.15. Neka je Π neprazna familija nekih particija od α takva da svaka od tih particija sadrži točno α blokova. Nadalje, neka je F filtar nad α različit od $\{\alpha\}$. Kažemo da je uređen par (Π, F) *konzistentan* ako za sve $X \in F$ i $X_1, \ldots, X_n, n < \omega$ takve da svaki X_i pripada različitoj particiji $P_i \in \Pi$ vrijedi $X \cap \bigcap_{1 \leq i \leq n} X_i \neq \emptyset$.

Oznaka. Ako je F filtar i $F \cup E$ ima svojstvo konačnih presjeka, sa (F, E) označavamo filtar generiran sa $F \cup E$.

Lema 2.16. *Neka je α beskonačan kardinalni broj.*

(i) Neka je F uniformni filtar nad α generiran podskupom $E \subseteq F$ takvim da je $\operatorname{card} E \leq \alpha$. Tada postoji familija Π particija od α takva da je $\operatorname{card} \Pi = 2^\alpha$ i (Π, F) konzistentan uređen par.

(ii) Pretpostavimo da je (Π, F) konzistentan. Neka je $J \subseteq \alpha$. Tada je ili $(\Pi, (F, \{J\}))$ konzistentan ili je $(\Pi', (F, \{\alpha \setminus J\}))$ konzistentan za neki kofinitni $\Pi' \subseteq \Pi$.

(iii) Pretpostavimo da je (Π, F) konzistentan. Neka je $p : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to F$ antimonotona funkcija i $P \in \Pi$. Tada postoje filtar $F' \supseteq F$ i antiaditivna funkcija $q : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to F'$ takvi da je $q \leq p$ i $(\Pi \setminus \{P\}, F')$ konzistentan.

Dokaz.

(i) Neka je $\{J_\beta : \beta < \alpha\}$ skup svih konačnih presjeka elemenata od E. Tada je $\operatorname{card} J_\beta = \alpha$ (jer je $J_\beta \in F$). Prema lemi 2.13 postoje u parovima disjunktni $I_\beta \subseteq J_\beta, \beta < \alpha$ takvi da je $\operatorname{card} I_\beta = \alpha$.

Promotrimo skup

$$B = \{(s, r) : s \in \mathscr{P}_\omega(\alpha), r : \mathscr{P}(s) \to \alpha\}.$$

Očito imamo $\operatorname{card} B = \alpha$. Neka je

$$B = \{(s_\xi, r_\xi) : \xi \in I_\beta\} \text{ za svaki } \beta < \alpha.$$

Za svaki $J \subseteq \alpha$ definiramo funkciju $f_J : \alpha \to \alpha$ na sljedeći način:

$$f_J(\xi) = \begin{cases} r_\xi(J \cap s_\xi) & \text{ako } \xi \in \bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Pokažimo da ima točno 2^α funkcija f_J. Pretpostavimo $J_1 \neq J_2$. Bez smanjenja općenitosti, neka je $x \in J_1$ i $x \notin J_2$. Definiramo $s = \{x\}$ i $r = \{(\{x\}, 0), (0, 1)\}$. Tada je $(s, r) \in B$, pa je $(s, r) = (s_\xi, r_\xi)$ za neki ξ. Prema tome, $f_{J_1}(\xi) = r(J_1 \cap s) = 0$ i $f_{J_2}(\xi) = r(J_2 \cap S) = 1$. Time smo pokazali $f_{J_1} \neq f_{J_2}$.

Sada tvrdimo da za $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ proizvoljne ordinale iz α i $J_1, \ldots, J_n$ proizvoljne različite podskupove od α postoji $\xi \in I_\beta$ takav da

$$f_{J_i}(\xi) = \gamma_i \text{ za sve } 1 \leq i \leq n.$$

Kako bismo to vidjeli, uzmimo proizvoljan konačan $s \subseteq \alpha$ takav da je

$$s \cap J_i \neq s \cap J_j \text{ za sve } 1 \leq i < j \leq n.$$

Neka je sad $r : \mathscr{P}(s) \to \alpha$ definirana sa

$$r(J_i \cap s) = \gamma_i \text{ za sve } 1 \leq i \leq n.$$

Budući da postoji $\xi \in I_\beta$ takav da je $(s_\xi, r_\xi) = (s, r)$, iz toga slijedi

$$f_{J_i}(\xi) = r_\xi(J_i \cap s_\xi) = r(J_i \cap s) = \gamma_i.$$

Time je pokazana i činjenica da je $\operatorname{Im} f_J = \alpha$ za sve $J \subseteq \alpha$. Konačno, definiramo familiju

$$\Pi = \{\{f_J^{-1}(\gamma) : \gamma < \alpha\} : J \subseteq \alpha\}$$

koja očito zadovoljava željena svojstva.

(ii) Pretpostavimo da $(\Pi, (F, \{J\}))$ nije konzistentan. Tada postoje $X \in F$, $X_i \in P_i \in \Pi, 1 \leq i \leq n$ takvi da su P_i različiti i

$$J \cap X \cap \bigcap_{1 \leq i \leq n} X_i = \emptyset.$$

Neka je $\Pi' = \Pi \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$. Neka su $Q_j, 1 \leq j \leq m$ različiti elementi od Π' i $Y_j \in Q_j$. Tada prema pretpostavci imamo

$$X \cap \bigcap_{1 \leq i \leq n} X_i \cap \bigcap_{1 \leq j \leq m} Y_j \neq \emptyset.$$

Stoga je jasno

$$(\alpha \setminus J) \cap X \cap \bigcap_{1 \leq j \leq m} Y_j \neq \emptyset,$$

čime smo dobili da je $(\Pi', (F, \{\alpha \setminus J\}))$ konzistentan.

(iii) Neka je $P = \{X_\delta : \delta < \alpha\}$ te $\mathscr{P}_\omega(\alpha) = \{t_\delta : \delta < \alpha\}$. Za svaki $\delta < \alpha$ definiramo funkciju $q_\delta : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to \mathscr{P}(\alpha)$ na sljedeći način:

$$q_\delta(s) = \begin{cases} p(t_\delta) \cap X_\delta & \text{ako } s \subseteq t_\delta, \\ \emptyset & \text{inače.} \end{cases}$$

Primijetimo da je $q_\delta(s) \subseteq p(t_\delta)$, $q_\delta(s) \neq \emptyset$ ako je $s \subseteq t_\delta$ i $g_\delta(s_1 \cup s_2) = q_\delta(s_1) \cap q_\delta(s_2)$. Pojasnimo posljednju tvrdnju: budući da vrijedi $s_1 \cup s_2 \subseteq t_\delta$ ako i samo ako $s_1, s_2 \subseteq t_\delta$, $q_\delta(s_1 \cup s_2)$ će biti $p(t_\delta) \cap X_\delta$, odnosno $\emptyset$ ovisno o tome budu li oba s_1, s_2 podskupovi od t_δ ili ne, redom.

Definirajmo funkciju $q : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to \mathscr{P}(\alpha)$ sa

$$q(s) = \bigcup_{\delta < \alpha} q_\delta(s).$$

Funkcija p je antimonotona, pa nalazimo da je $q_\delta(s) \subseteq p(t_\delta) \subseteq p(s)$ za sve $\delta < \alpha$ (u slučaju $q_\delta(s) = \emptyset$ trivijalno vrijedi $q_\delta(s) \subseteq p(s)$). Pogledamo li uniju po δ, dobivamo $q(s) \subseteq p(s)$, pa zaključujemo $q \leq p$.

Iz $q_\delta(s) \cap q_{\delta'}(s) = \emptyset$ ako $\delta \neq \delta'$ slijedi da je $q(s)$ disjunktna unija podskupova od X_δ. Koristeći činjenicu da je svaka funkcija q_δ antiaditivna, lako dobivamo da je q antiaditivna. Naime, znamo

$$q(s_1 \cup s_2) = \bigcup_{\delta < \alpha} (q_\delta(s_1) \cap q_\delta(s_2)) \subseteq \left(\bigcup_{\delta < \alpha} q_\delta(s_1) \right) \cap \left(\bigcup_{\delta < \alpha} q_\delta(s_2) \right).$$

Jasno, zadnja relacija među skupovima ne mora općenito biti jednakost. No, ovdje mora: ako je x iz skupa na desnoj strani, vrijedi $x \in g_\delta(s_1)$ i $x \in g_{\delta'}(s_2)$, odnosno $x \in p(t_\delta) \cap p(t_{\delta'}) \cap X_\delta \cap X_{\delta'}$. Znamo da je $X_\delta \cap X_{\delta'} \neq \emptyset$ ako i samo ako je $\delta = \delta'$, pa možemo zaključiti $x \in p(t_\delta) \cap X_\delta$, tj. x je u skupu na lijevoj strani. Još samo valja uočiti: ako je skup na desnoj strani prazan, onda je i skup na lijevoj strani prazan.

Neka je sad $F' = (F, \operatorname{Im} q)$. Tvrdimo da je $(\Pi \setminus \{P\}, F')$ konzistentan. Uzmimo $X \in F$, $s \in \mathscr{P}_\omega(\alpha)$, $X_i \in P_i \in \Pi, 1 \leq i \leq n$ tako da su P_i međusobno različiti i različiti od particije P. Primijetimo da vrijedi

$q(s) \supseteq q_\delta(s) = p(t_\delta) \cap X_\delta$ i

$$X \cap p(t_\delta) \cap X_\delta \cap \bigcap_{1 \leq i \leq n} X_i \neq \emptyset,$$

za neki $\delta < \alpha$ (pozivamo se na konzistentnost (Π, F) imajući na umu da je $X \cap p(t_\delta) \in F$ i da su $X_\delta, X_1, \ldots, X_n$ blokovi iz različitih particija u Π). Uzevši u obzir da se svaki filtar u F' može napisati kao $X \cap q(s)$, iz pokazane činjenice

$$X \cap q(s) \cap \bigcap_{1 \leq i \leq n} X_i \neq \emptyset$$

direktno slijedi konzistentnost para $(\Pi \setminus \{P\}, F')$.

□

Spomenimo ovdje jedan poznat pojam iz teorije skupova. Intuitivno, željeli bismo izraziti nemogućnost dobivanja nekog skupa kao unije premalog broja njegovih dijelova.

Definicija 2.17. Neka je ξ granični ordinal. Kažemo da je skup X *kofinalan* u ξ ako je $X \subseteq \xi$ i $\xi = \bigcup X$. Oznakom $\mathrm{cf}(\xi)$ označavamo najmanji kardinalni broj α takav da postoji skup tog kardinalnog broja kofinalan u ξ. Dodatno definiramo $\mathrm{cf}(0) = 0$ i $\mathrm{cf}(\eta + 1) = 1$ za proizvoljan ordinal η. Kažemo da je broj $\mathrm{cf}(\xi)$ *kofinalnost od* ξ.

Primjer.

- $\mathrm{cf}(\omega) = \aleph_0$
- $\mathrm{cf}(2^\alpha) > \alpha$ za beskonačan kardinal α (iz Königovog teorema, v. [5])

Sad napokon imamo sve što nam treba kako bismo dokazali dva teorema koji će u potpunosti ukloniti više puta objašnjenu poteškoću u dokazu Goldblatt-Thomasona: pitanje kako izaći na kraj s neprebrojivim skupom nelogičkih simbola.

Iz prvog teorema dobivamo prebrojivo nepotpun α^+-dobar ultrafiltar koji treba predati drugome kako bi nam on dao dovoljno saturiranu strukturu.

Teorem 2.18. *Neka je I beskonačan skup kardinalnog broja α. Tada postoji α^+-dobar prebrojivo nepotpun ultrafiltar U nad I.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $I = \alpha$. Neka je $I_n, n < \omega$ niz podskupova od α takvih da je $\operatorname{card} I_n = \alpha$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ i $\bigcap_{n<\omega} I_n = \emptyset$. Naime, možemo pogledati particiju $\{B_n : n < \omega\}$ od α u $\aleph_0$ blokova kardinalnog broja α (jer je $\alpha \cdot \aleph_0 = \alpha$), pa jednostavno stavimo $I_n := \alpha \setminus \bigcup_{i<n} B_i$.

Neka je F_0 uniformni filtar generiran skupom $\{I_n : n < \omega\}$. Prema lemi 2.16(i), postoji familija Π_0 particija od α takva da je $\operatorname{card} \Pi_0 = 2^\alpha$ i (Π_0, F_0) konzistentan. Transfinitnom indukcijom definiramo nizove $\Pi_\xi, \xi < 2^\alpha$ te $F_\xi, \xi < 2^\alpha$ tako da vrijedi:

$$\Pi_\xi \subseteq \Pi_\eta, F_\xi \supseteq F_\eta \text{ ako } \eta \leq \xi < 2^\alpha,$$

$$\operatorname{card} \Pi_\xi = 2^\alpha, \quad \operatorname{card}(\Pi_\xi \setminus \Pi_{\xi+1}) < \omega, \quad \Pi_\lambda = \bigcap_{\eta<\lambda} \Pi_\eta, \quad \lambda \text{ granični},$$

$$(\Pi_\xi, F_\xi) \text{ je konzistentan za } \xi < 2^\alpha.$$

Konstrukciju provodimo na sljedeći način: neka je $\{p_\xi : \xi < 2^\alpha\}$ skup svih antimonotonih funkcija sa $\mathscr{P}_\omega(\alpha)$ u $\mathscr{P}(\alpha)$ (znamo da funkcija općenito ima $(2^\alpha)^\alpha = 2^{\alpha \cdot \alpha} = 2^\alpha$, a već samo konstantnih funkcija, koje su trivijalno antimonotone, ima 2^α) te $\mathscr{P}(\alpha) = \{J_\xi : \xi < 2^\alpha\}$. Pretpostavimo da smo konstruirali Π_η, F_η za $\eta < \xi < 2^\alpha$. Ako je ξ granični ordinal, jednostavno uzmemo

$$\Pi_\xi = \bigcap_{\eta<\xi} \Pi_\eta \text{ i } F_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} F_\eta.$$

Očito je (Π_ξ, F_ξ) konzistentan i vrijedi $\operatorname{card} \Pi_\xi = 2^\alpha$ (oduzeli smo konačno mnogo elemenata manje od 2^α puta).

Nadalje, ako je $\xi = \lambda + 2n + 1$, λ granični i $n < \omega$, neka je J element od $\mathscr{P}(\alpha)$ s najmanjim indeksom koji nije već u $F_{\xi-1}$. Prema lemi 2.16(ii), možemo naći Π_ξ, F_ξ takve da je

$$\operatorname{card}(\Pi_{\xi-1} \setminus \Pi_\xi) < \omega, \quad \operatorname{card}(\Pi_\xi) = 2^\alpha,$$

$$J \in F_\xi \text{ ili } \alpha \setminus J \in F_\xi,$$

$$(\Pi_\xi, F_\xi) \text{ konzistentan.}$$

Ako je $\xi = \lambda + 2n + 2$, λ granični i $n < \omega$, neka je tada $p : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to F_{\xi-1}$ funkcija s najmanjim indeksom koja ide u $F_{\xi-1}$, a nije još iskorištena. Lema 2.16(iii) nam daje $\Pi_\xi, F_\xi, q : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to F_\xi$ takve da

$$\operatorname{card}(\Pi_{\xi-1} \setminus \Pi_\xi) = 1, \quad \operatorname{card}(\Pi_\xi) = 2^\alpha,$$

$$q \leq p, \text{ q antiaditivna,}$$

$$F_\xi = (F_{\xi-1}, \operatorname{Im} q),$$

$$(\Pi_\xi, F_\xi) \text{ konzistentan.}$$

Neka je $F = \cup_{\xi<2^\alpha} F_\xi$. Iz naše konstrukcije, leme 2.12 i činjenice $\operatorname{cf}(2^\alpha) > \alpha$ slijedi da je F prebrojivo nepotpun α^+-dobar ultrafiltar nad α. Naime, pretpostavimo li da nisu sve antimonotone funkcije koje idu u F iskorištene kod koraka na „parnim" sljedbenicima u gornjoj konstrukciji (onih za neki $\lambda + 2n + 2$), znamo da postoji takva funkcija $p_{\xi_1} : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to F$ s najmanjim indeksom ξ_1. Dokazujemo da postoji η_1 takav da funkcija p_{ξ_1} zapravo ide u F_{η_1}. Kad ne bi tako bilo, imali bismo skup

$$X = \left\{ \bigcup p_{\xi_1}(a) : a \in \mathscr{P}_\omega(\alpha) \right\}$$

kardinalnosti najviše α koji je kofinalan u 2^α, a to je nemoguće.

Sad kad znamo da je $p_{\xi_1} : \mathscr{P}_\omega(\alpha) \to F_{\eta_1}$ neiskorištena s najmanjim indeksom, iz činjenice da svih iskorištenih ima $2^\alpha > \operatorname{card} \xi_1$ možemo zaključiti da „parnih" koraka u konstrukciji većih od ξ_1 ima barem $\operatorname{card} \xi_1$. Pogledajmo skup $\{\zeta_i : i \leq \xi_1\}$, početni komad ordinalnog tipa ξ_1^+ skupa

$$\{\lambda + 2n + 2 : \lambda + 2n + 2 > \xi_1, \lambda \text{ granični}, n < \omega\}$$

svih „parnih" koraka u konstrukciji poslije ξ_1. Zatim promotrimo skup

$$\{p_{\zeta_i} : i \leq \xi_1\}$$

gdje je p_{ζ_i} funkcija odabrana u ζ_i-tom koraku. Iz konstrukcije i odabira funkcije p_{ξ_1} to mora biti podskup od $\{p_i : i < \xi_1\}$, a to je nemoguće. $\square$

Sada dokazujemo generalizaciju teorema 2.9.

Teorem 2.19. *Neka je α beskonačan kardinalni broj, $I \neq \emptyset$ skup indeksa, U prebrojivo nepotpun α-dobar ultrafiltar nad I te neka je σ skup nelogičkih simbola takav da vrijedi $\omega \cup \operatorname{card} \sigma < \alpha$. Tada je za svaku familiju $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ σ-struktura ultraprodukt $\prod_U \mathfrak{M}_i$ α-saturiran.*

Dokaz. Kao u dokazu teorema 2.9 zaključujemo da je dovoljno dokazati da za svaki skup $\Gamma(x)$ σ-formula takvih da samo x može imati slobodan nastup vrijedi: ako je $\Gamma(x)$ konačno ispunjiv na $\prod_U \mathfrak{M}_i$, onda je $\Gamma(x)$ ispunjiv na $\prod_U \mathfrak{M}_i$.

Pretpostavimo stoga da je svaki konačan podskup od $\Gamma(x)$ ispunjiv na $\prod_U \mathfrak{M}_i$. Budući da je U prebrojivo nepotpun, prema lemi 2.2 možemo naći silazan niz skupova

$$I = I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$$

takav da je svaki $I_n \in U$ i vrijedi $\bigcap_{n<\omega} I_n = \emptyset$. Iz $\operatorname{card} \sigma \leq \omega \cup \operatorname{card} \sigma < \alpha$ slijedi $\operatorname{card} \Gamma < \alpha$.

Definirajmo funkciju $f : \mathscr{P}_\omega(\Gamma) \to U$ na sljedeći način: za svaki neprazan konačan podskup $\gamma \subseteq \Gamma$ neka je

$$f(\gamma) = I_{\operatorname{card} \gamma} \cap \left\{ i \in I : \mathfrak{M}_i \models (\exists x) \bigwedge \gamma \right\}$$

te $f(\emptyset) = I$. Svaki $\gamma \in \mathscr{P}_\omega(\Gamma)$ je po pretpostavci ispunjiv na $\prod_U \mathfrak{M}_i$, pa imamo $\prod_U \mathfrak{M}_i \models (\exists x) \bigwedge \gamma$. Tada prema Łośovom teoremu vrijedi $f(\gamma) \in U$. Kad god je $\gamma \subseteq \gamma' \in \mathscr{P}_\omega(\Gamma)$, imamo

$$I_{\operatorname{card} \gamma'} \subseteq I_{\operatorname{card} \gamma} \text{ i } \models (\exists x) \bigwedge \gamma' \to (\exists x) \bigwedge \gamma.$$

Prema tome, $f(\gamma') \subseteq f(\gamma)$, tj. f je antimonotona. Sad možemo iskoristiti činjenicu da je U α-dobar: iz gornjeg slijedi da postoji antiaditivna funkcija $g : \mathscr{P}_\omega(\Gamma) \to U$ takva da je $g \leq f$.

Neka je za svaki $i \in I$

$$\gamma_i = \{\theta \in \Gamma : i \in g(\{\theta\})\}.$$

Dokažimo implikaciju: ako je $\operatorname{card} \gamma_i \geq n$, tada je $i \in I_n$. Ukoliko γ_i sadrži barem n različitih elemenata $\theta_1, \dots, \theta_n$, tada za sve $s \leq n$ imamo $i \in g(\{\theta_s\})$. Iz antiaditivnosti od g slijedi

$$i \in g(\{\theta_1\}) \cap \dots \cap (\{\theta_n\}) = g(\{\theta_1, \dots, \theta_n\}) \subseteq f(\{\theta_1, \dots, \theta_n\}) \subseteq I_n.$$

Iz $\bigcap_{n<\omega} I_n = \emptyset$ slijedi da je γ_i konačan za sve $i \in I$.

Sad biramo svjedoka $h_U \in |\prod_U \mathfrak{M}_i|$ za $\Gamma(x)$. Za svaki $i \in I$, iz definicije od γ_i i antiaditivnosti od g dobivamo

$$i \in \bigcap \{g(\{\theta\}) : \theta \in \gamma_i\} = g(\gamma_i) \subseteq f(\gamma_i).$$

Pomoću $i \in f(\gamma_i)$ možemo odabrati element $h(i) \in |\mathfrak{M}_i|$ takav da

$$\mathfrak{M}_i \models \bigwedge \gamma_i[h(i)].$$

Stoga, kad god je $\theta \in \Gamma$ i $i \in g(\{\theta\})$, imamo $\theta \in \gamma_i$ i $\mathfrak{M}_i \models \theta[h(i)]$. No, znamo da je $g(\{\theta\}) \in U$, pa nam Łośov teorem govori da za sve $\theta \in \Gamma$ vrijedi $\prod_U \mathfrak{M}_i \models \theta[h_U]$. Time smo pokazali da je h_U traženi svjedok. $\square$

U dokazu Goldblatt-Thomasonovog teorema trebat će nam još jedna važna spona logike prvog reda i modalne logike. Naime, jednom kad budemo osigurali ω-saturiranost nekog modela promatranog kao strukture prvog reda, poželjet ćemo imati nešto bolje prilagođeno modalnoj logici.

Propozicija 2.20. *Svaki ω-saturiran model je i m-saturiran.*

Dokaz. Neka je model $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ ω-saturirana $\sigma^1(\Phi)$-struktura. Pretpostavimo da je $a \in W$ te Δ skup modalnih formula koji je konačno ispunjiv na skupu sljedbenika od a. Promotrimo $\sigma^1(\Phi)[\{a\}]$-strukturu $\mathfrak{M}_{\{a\}}$. Definiramo $\Delta' = \{Rc_a x\} \cup ST_x(\Delta)$ gdje je $ST_x(\Delta)$ skup standardnih translacija svih formula iz Δ.

Budući da je svaki konačan podskup od Δ' istinit na nekom sljedbeniku od a, prema lemi 2.5 je Δ' konzistentan s teorijom od $\mathfrak{M}_{\{a\}}$, pa iz ω-saturiranosti slijedi da je Δ' istinit na nekom svijetu $b \in W$. Iz $\mathfrak{M}_{\{a\}} \models Rc_a x[b]$ imamo da je b sljedbenik od a. Budući da za sve $\phi \in \Delta$ vrijedi $\mathfrak{M}_{\{a\}} \models ST_x(\phi)[b]$, propozicija 1.22 nam kaže da je $\mathfrak{M}, b \Vdash \Delta$. Stoga je Δ ispunjiv na skupu sljedbenika od a. $\square$

Poglavlje 3

Dokaz Goldblatt-Thomasona

Gotovo smo spremni za iskaz teorema koji karakterizira modalno definabilne elementarne klase okvira. Još nam je potrebna jedna kratka definicija.

Definicija 3.1. Kažemo da klasa okvira $\mathscr{K}$ *reflektira ultrafiltar-proširenja* ako $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{F} \in \mathscr{K}$ povlači $\mathfrak{F} \in \mathscr{K}$.

Teorem 3.2 (Goldblatt-Thomason)**.** *Neka je $\mathscr{K}$ elementarna klasa okvira. Klasa $\mathscr{K}$ je modalno definabilna skupom formula ako i samo ako je zatvorena na disjunktne unije, generirane podokvire i slike pri ograničenim morfizmima te reflektira ultrafiltar-proširenja.*

Dokaz. Dovoljnost je dokazana u teoremu 1.45. Nužnost dokazujemo tako da pogledamo klasu svih modalnih formula koje su valjane u $\mathscr{K}$ i pokažemo da ona definira $\mathscr{K}$. To ćemo učiniti tako da pokažemo da je ultrafiltar-proširenje okvira $\mathfrak{F}$ na kojem je gorenavedena klasa valjana zapravo slika pri ograničenom morfizmu neke ultrapotencije pogodno odabranog okvira iz $\mathscr{K}$. Sada dajemo detaljan dokaz.

Neka je $\mathscr{K}$ elementarna klasa okvira zatvorena na četiri navedene konstrukcije (prema korolaru 1.6 slijedi i da je zatvorena na ultraprodukte) te neka je $\Lambda_{\mathscr{K}}$ logika od $\mathscr{K}$, tj. $\Lambda_{\mathscr{K}} = \{\phi : \mathfrak{F} \Vdash \phi \text{ za sve } \mathfrak{F} \in \mathscr{K}\}$. Dokažimo da $\Lambda_{\mathscr{K}}$ definira $\mathscr{K}$. Neka je $\mathfrak{F} = (W, R)$ okvir takav da vrijedi $\mathfrak{F} \Vdash \Lambda_{\mathscr{K}}$. Želimo dokazati da je $\mathfrak{F} \in \mathscr{K}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mathfrak{F}$ generiran točkom jer ako je $\mathfrak{F} \Vdash \Lambda_{\mathscr{K}}$, onda je prema teoremu 1.45 $\Lambda_{\mathscr{K}}$ valjana i na svakom točkom generiranom podokviru od $\mathfrak{F}$. Ako uspijemo dokazati da je svaki točkom generirani podokvir od $\mathfrak{F}$ u $\mathscr{K}$, onda iz svojstava zatvorenosti od $\mathscr{K}$ i propozicije 1.47 slijedi da je $\mathfrak{F} \in \mathscr{K}$. Stoga u nastavku pretpostavljamo da je $\mathfrak{F}$ generiran svijetom w.

Neka je Φ skup propozicionalnih varijabli koji sadrži propozicionalnu varijablu p_A za svaki $A \subseteq W$. Pogledajmo model $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ gdje je $V(p_A) = A$. Neka je $\Delta \subseteq \mathrm{Form}(\Phi)$ skup svih formula istinitih na korijenu w modela $\mathfrak{M}$, tj. $\Delta = \{\phi \in \mathrm{Form}(\Phi) : w \Vdash \phi\}$. Tvrdimo sljedeće:

$$\Delta \text{ je ispunjiv u } \mathscr{K}.$$

Kako bismo to dokazali, prvo dokažimo da je Δ konačno ispunjiv u $\mathscr{K}$. Neka je δ konačan podskup od Δ. Lako je vidjeti da je δ ispunjiv u $\mathscr{K}$: da nije tako, $\neg \bigwedge \delta$ bila bi valjana na svakom okviru iz $\mathscr{K}$, pa bi time pripadala $\Lambda_{\mathscr{K}}$ i vrijedilo bi $\mathfrak{F} \Vdash \neg \bigwedge \delta$, što je u kontradikciji s $w \Vdash \bigwedge \delta$. Međutim, ako je svaki konačni $\delta \subseteq \Delta$ ispunjiv na nekom okviru iz $\mathscr{K}$, onda prema korolaru 1.11 dobivamo da je Δ ispunjiv na ultraproduktu nekih okvira iz $\mathscr{K}$, a s obzirom da je $\mathscr{K}$ zatvorena na ultraprodukte, zaista je Δ ispunjiv u $\mathscr{K}$.

Drugim riječima, postoji model $\mathfrak{N} = (X, S, U)$ i svijet $b \in X$ takav da je okvir $\mathfrak{G} = (X, S)$ u $\mathscr{K}$ i $\mathfrak{N}, b \Vdash \Delta$. Budući da je $\mathscr{K}$ zatvorena na generirane podokvire i ta konstrukcija čuva istinitost na modelu, možemo uzeti da je $\mathfrak{G}$ generiran točkom b. Ostaje još povezati $\mathfrak{G}$ s početnim okvirom $\mathfrak{F}$ na sljedeći način:

$$\mathfrak{ue}\,\mathfrak{F} \text{ je slika pri ograničenom morfizmu neke ultrapotencije od } \mathfrak{G}.$$

Neka je $\alpha = \omega \cup \mathrm{card}\, \sigma^1(\Phi)$. Iz teorema 2.18 dobivamo α^+-dobar prebrojivo nepotpun ultrafiltar U nad α. No, tada iz teorema 2.19 slijedi da je ultrapotencija $\mathfrak{N}' = (X', S', U') = \prod_U \mathfrak{N}$ $\sigma^1(\Phi)$-strukture $\mathfrak{N}$ α^+-saturirana, a time i ω-saturirana. Prema propoziciji 2.20, $\mathfrak{N}'$ je m-saturiran model.

Postavlja se pitanje kako definirati ograničen morfizam. Prirodan bi izbor bio pridružiti svijetu $s \in X'$ familiju

$$f(s) = \{A \subseteq W : \mathfrak{N}', s \Vdash p_A\}.$$

Dokažimo jednu tvrdnju korisnu za nastavak dokaza:

$$\text{za sve formule } \phi \in \mathrm{Form}(\Phi) \text{ je } \mathfrak{M} \Vdash \phi \text{ ako i samo ako je } \mathfrak{N}' \Vdash \phi.$$

Pogledajmo sljedeći lanac ekvivalencija:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M} \Vdash \phi &\iff \mathfrak{M}, w \Vdash \Box^n \phi, \text{ za svaki } n < \omega \\
&\iff \Box^n \phi \in \Delta, \text{ za svaki } n < \omega \\
&\iff \mathfrak{N}, b \Vdash \Box^n \phi, \text{ za svaki } n < \omega \\
&\iff \mathfrak{N} \Vdash \phi \\
&\overset{\text{Łoś}}{\iff} \mathfrak{N}' \Vdash \phi
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Provjerimo da je za sve $s \in X'$ familija $f(s)$ zaista ultrafiltar nad W.

1. Po definiciji valuacije V, vrijedi $\mathfrak{M} \Vdash p_W$, odnosno prema (3.1) vrijedi $\mathfrak{N}' \Vdash p_W$. Posebno je $s \Vdash p_W$, pa imamo $W \in f(s)$.

2. Ako su $A, B \in f(s)$, onda je $s \Vdash p_A$ i $s \Vdash p_B$. Očito je formula $p_A \wedge p_B \leftrightarrow p_{A \cap B}$ istinita na $\mathfrak{M}$ (prema definiciji valuacije V), pa iz (3.1) slijedi $\mathfrak{N}' \Vdash p_A \wedge p_B \leftrightarrow p_{A \cap B}$. Stoga je $s \Vdash p_{A \cap B}$. Dakle, po definiciji od f je $A \cap B \in f(s)$.

3. Neka je $Y \in f(s)$ te $Y \subseteq Z \subseteq W$. Tada je $s \Vdash p_Y$, pa je po definiciji valuacije $s \in Y$, a zbog $Y \subseteq Z$ vrijedi $s \in Z$. Slijedi da je $s \Vdash p_Z$, odnosno $Z \in f(s)$.

4. Očito vrijedi $\emptyset \notin f(s)$.

5. Neka je $Y \in f(s)$. Tada je $s \Vdash p_Y$, odnosno $s \in Y$, pa iz $s \notin W \setminus Y$ slijedi $s \nVdash p_{W \setminus Y}$. Stoga vrijedi $W \setminus Y \notin f(s)$.

Kako bismo dobili da je f ograničeni morfizam, dokažimo da za sve ultrafiltre u nad W i sve svjetove $s \in X'$ vrijedi:

$$u = f(s) \text{ ako i samo ako } \mathfrak{ue}\,\mathfrak{M}, u \equiv \mathfrak{N}', s.$$

Naime, budući da imamo m-saturiranost od $\mathfrak{N}'$, a s obzirom da iz propozicije 1.43 dobivamo m-saturiranost od $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{M}$, klasa $\{\mathfrak{ue}\,\mathfrak{M}, \mathfrak{N}'\}$ je Hennessy-Milnerova prema propoziciji 1.40. Stoga nam gornja ekvivalencija govori da su s i $f(s)$ bisimulirani za svaki $s \in X'$—prisjetimo li se definicija, uočit ćemo da je to upravo ono što nam treba.

Za prvi smjer, dovoljno je dokazati da za svaku formulu $\phi \in \mathrm{Form}(\Phi)$ i svaki svijet $s \in X'$ vrijedi: $f(s) \Vdash \phi$ povlači $s \Vdash \phi$. Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{M}, f(s) \Vdash \phi$. Iz propozicije 1.42 tada slijedi $V(\phi) \in f(s)$. Prema definiciji od f je $s \Vdash p_{V(\phi)}$. Iz definicije od V slijedi $\mathfrak{M} \Vdash \phi \leftrightarrow p_{V(\phi)}$, pa prema (3.1) imamo $\mathfrak{N}' \Vdash \phi \leftrightarrow p_{V(\phi)}$, a tada je $s \Vdash \phi$.

Obratno, ako su iste formule istinite na s i u, onda za svaki $A \subseteq W$ vrijedi: $s \Vdash p_A$ ako i samo ako $u \Vdash p_A$. No, to je isto što i: $A \in f(s)$ ako i samo ako $A = V(p_A) \in u$. To upravo znači $u = f(s)$.

Konačno, pokažimo da je f surjekcija. Neka je u ultrafiltar nad W. Tvrdimo da je svaki konačan podskup od $\Sigma = \{p_A : A \in u\}$ ispunjiv u $\mathfrak{N}'$. Neka je $\sigma = \{p_{A_1}, \ldots, p_{A_n}\} \subseteq_{\text{fin.}} \Sigma$. Skup σ je ispunjiv u $\mathfrak{M}$ jer je $p_{A_1} \wedge \ldots \wedge p_{A_n}$ istinita na nekom svijetu u $\mathfrak{M}$ ako i samo ako je $p_{A_1 \cap \ldots \cap A_n}$ istinita na nekom svijetu u $\mathfrak{M}$, a to jest jer je ultrafiltar u pravi filtar. Nadalje, budući da w generira $\mathfrak{M}$, odatle je $w \Vdash \Diamond^n \bigwedge \sigma$ za neki $n < \omega$. Prema definiciji od $\mathfrak{N}$ i b slijedi $b \Vdash \Diamond^n \bigwedge \sigma$, pa iz toga dobivamo da je σ ispunjiv u $\mathfrak{N}$. Budući da je $\mathfrak{N}'$ ultrapotencija od $\mathfrak{N}$, σ je ispunjiv u $\mathfrak{N}'$. No, $\mathfrak{N}'$ je m-saturiran, pa s obzirom da je Σ konačno ispunjiv u $\mathfrak{N}'$, Σ je ispunjiv na nekom svijetu s' u $\mathfrak{N}'$, iz čega slijedi $f(s') = u$.

Time smo dokazali da je $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{F}$ slika pri ograničenom morfizmu neke ultrapotencije od $\mathfrak{G}$. Budući da je $\mathfrak{G} \in \mathscr{K}$, ultrapotencija od $\mathfrak{G}$ je u $\mathscr{K}$ zbog zatvorenosti od $\mathscr{K}$ na ultraprodukte, $\mathfrak{ue}\,\mathfrak{F} \in \mathscr{K}$ jer je $\mathscr{K}$ zatvorena za slike pri ograničenim morfizmima, a iz činjenice da $\mathscr{K}$ reflektira ultrafiltar-proširenja slijedi $\mathfrak{F} \in \mathscr{K}$. $\square$

3.1 „Oslabljivanje" pretpostavki

Nakon što smo dokazali nužnost pretpostavke o zatvorenosti na opisane četiri konstrukcije, nameće se pitanje mogućnosti brisanja po jednog uvjeta iz iskaza Goldblatt-Thomasonovog teorema bez utjecaja na istinitost samog teorema. Pokazat ćemo da je u svakom od četiri slučaja odgovor negativan. Način za dokazivanje takvog negativnog rezultata je lako pogoditi: ako dana klasa okvira $\mathscr{K}$ nije zatvorena na neku konstrukciju koja čuva valjanost modalnih formula na okvirima, ne može biti modalno definabilna.

Naime, kad bi $\mathscr{K}$ bila modalno definabilna, postojao bi skup Γ modalnih formula takav da je $\mathscr{K} \Vdash \Gamma$. Budući da $\mathscr{K}$ nije zatvorena na spomenutu konstrukciju, postoji podskup klase $\mathscr{K}$ od kojeg pomoću te konstrukcije dobivamo novi okvir $\mathfrak{F} \notin \mathscr{K}$. No, budući da dana konstrukcija čuva valjanost, imamo i $\mathfrak{F} \Vdash \Gamma$, odnosno $\mathfrak{F} \in \mathscr{K}$. Time smo dobili kontradikciju iz pretpostavke da je $\mathscr{K}$ modalno definabilna.

Naravno, ograničit ćemo diskusiju na četiri osnovne konstrukcije okvira jer je to ono što nas zanima. Ključan alat će stoga predstavljati teorem 1.45. Njegovu upotrebu nećemo posebno naglašavati u svakom od četiri slučaja.

Za početak maknimo pretpostavku da klasa okvira u teoremu mora biti zatvorena na disjunktne unije (dodavanje negacije nekom uvjetu i njegovo brisanje iz iskaza nisu iste stvari!). Pogledajmo sljedeći primjer:

$$\mathscr{K} = \{\mathfrak{F} : \mathfrak{F} = (W, W^2)\}.$$

Radi se o klasi svih okvira čija su svaka dva svijeta u relaciji. Prethodna rečenica jasno najavljuje koja je to $\{R, =\}$-formula koja definira klasu $\mathscr{K}$: $\forall x \forall y Rxy$. S druge pak strane, $\mathscr{K}$ očito nije zatvorena na disjunktne unije (sve ostale pretpostavke su zadovoljene), pa prema prethodnoj diskusiji $\mathscr{K}$ nije modalno definabilna. Zaključujemo da ne možemo iz iskaza Goldblatt-Thomasonovog teorema obrisati pretpostavku o zatvorenosti na disjunktne unije i sačuvati njegovu istinitost.

Pokušajmo sad ukloniti uvjet za generirane podokvire. Pogledajmo klasu:

$$\mathscr{K} = \{\mathfrak{F} : \mathfrak{F} = (W, R), \text{ postoji } w \in W \text{ takav da nije } wRw\}.$$

Očito $\{R, =\}$-formula $\exists x \neg Rxx$ definira $\mathscr{K}$, no $\mathscr{K}$ nije zatvorena na generirane podokvire. Naime, uzmemo li okvir $(\{x, y\}, \{(x, x)\}) \in \mathscr{K}$, vidimo da njegov generirani podokvir $(\{x\}, \{(x, x)\})$ nije iz $\mathscr{K}$. Nije teško pokazati da preostala tri uvjeta još uvijek vrijede. Ipak, prema dokazanom $\mathscr{K}$ nije modalno definabilna.

Nećemo biti ništa uspješniji u brisanju zatvorenosti na ograničene morfizme: $\{R, =\}$-formula $\forall x \neg Rxx$ definira klasu svih irefleksivnih okvira, ali za sliku $\mathfrak{F}' = (\{w'\}, \{(w', w')\})$ okvira $\mathfrak{F} = (\{w, v\}, \{(w, v), (v, w)\}) \in \mathscr{K}$ pri ograničenom morfizmu $f : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ definiranom sa $f = \lambda u.w'$ vrijedi $\mathfrak{F}' \notin \mathscr{K}$. Kao i kod disjunktnih unija i generiranih podokvira, napomenimo da su preostale tri pretpostavke ostale istinite.

Konačno, ne možemo proći ni bez pretpostavke o reflektiranju ultrafiltar-proširenja. Tu ćemo iskoristiti primjer sa stranice 24: ultrafiltar-proširenje od $(\omega, <)$. Razmotrimo klasu $\mathscr{K}$ definiranu $\{R, =\}$-formulom $\forall x \exists y (Rxy \wedge Ryy)$. Iako je $\mathfrak{ue}(\omega, <) \in \mathscr{K}$, vrijedi $(\omega, <) \notin \mathscr{K}$. Prema tome, $\mathscr{K}$ nije modalno definabilna iako su svi preostali uvjeti zatvorenosti zadovoljeni.

3.2 Jaka verzija Goldblatt-Thomasonovog teorema

Budući da na vrlo jednostavan način opisan u [1] možemo poprilično poopćiti Goldblatt-Thomasonov teorem, učinit ćemo to čim pojačamo korolar 1.11.

Lema 3.3. *Neka je $\mathscr{K}$ klasa okvira te Δ skup modalnih formula koji je konačno ispunjiv u $\mathscr{K}$. Tada je Δ ispunjiv na nekoj ultrapotenciji disjunktne unije nekih okvira u $\mathscr{K}$.*

Dokaz. Prema korolaru 1.11 postoje familija okvira $\{\mathfrak{F}_i : i \in I\} \subseteq \mathscr{K}$ i ultrafiltar U nad I takvi da je Δ ispunjiv na $\prod_U \mathfrak{F}_i$.

Označimo $\mathfrak{F}_1 = (W_1, R_1) = \prod_U \mathfrak{F}_i$ i $\mathfrak{F}_2 = (W_2, R_2) = \prod_U \left(\biguplus_i \mathfrak{F}_i\right)$. Dokažimo da postoji okvir $\mathfrak{F}$ takav da vrijedi:

$$\mathfrak{F}_1 \cong \mathfrak{F} \rightarrowtail \mathfrak{F}_2.$$

Definiramo[1] preslikavanje $\Psi : \mathfrak{F}_1 \to \mathfrak{F}_2$ sa

$$\Psi(f_U) = \big(\lambda i.(i, f(i))\big)_U.$$

Očito je Ψ dobro definirana injekcija. Pokazujemo da je Ψ jaki homomorfizam okvira. Neka su $f_U, g_U \in W_1$ takve da je $f_U R_1 g_U$. To je ekvivalentno tvrdnji $\{i \in I : f(i) R_i g(i)\} \in U$, odnosno $\{i \in I : (i, f(i)) R_i' (i, g(i))\} \in U$. Posljednje je pak ekvivalentno tvrdnji $\Psi(f_U) R_2 \Psi(g_U)$. Time smo dokazali da je Ψ izomorfizam okvira $\mathfrak{F}_1$ i nekog okvira $\mathfrak{F}$. Prema korolaru 1.31, Δ je ispunjiv na $\mathfrak{F}$.

[1] Ovdje koristimo indekse iz definicije disjunktne unije familije okvira zbog preciznosti i jasnoće izlaganja.

Očito je $\mathfrak{F} = (W, R)$ podokvir od $\mathfrak{F}_2$. Želimo pokazati da je $\mathfrak{F}$ generirani podokvir od $\mathfrak{F}_2$. Pretpostavimo da je $\Psi(f_U) \in W$ za $f_U \in W_1$ i da postoji $g_U \in W_2$ takav da je $\Psi(f_U) R_2 g_U$. Označimo $\biguplus_i \mathfrak{F}_i = (W', R')$. Iz definicije od R_2 slijedi $\{i \in I : (i, f(i)) R' g(i)\} \in U$. Iz $f_U \in W_1$ slijedi $\{i \in I : f(i) \in W_i\} \in U$, odnosno $\{i \in I : (i, f(i)) \in W_i'\} \in U$.

Budući da je svaki $\mathfrak{F}_i'$ generirani podokvir od $\biguplus_i \mathfrak{F}_i$, dobivamo $\{i \in I : g(i) \in W_i'\} \supseteq \{i \in I : (i, f(i)) R' g(i)\} \cap \{i \in I : (i, f(i)) \in W_i'\} \in U$. Stoga je $A = \{i \in I : g(i) \in W_i'\} \in U$. Za svaki $i \in A$ označimo $g(i) = (i, h(i))$, a za $i \in I \setminus A$ sa $h(i)$ označimo proizvoljan element of W_i. Tada je $g_U = \Psi(h_U) \in W$, pa smo dokazali da je $\mathfrak{F} \rightarrowtail \mathfrak{F}_2$. Iz propozicije 1.27 slijedi da je Δ ispunjiv na $\mathfrak{F}_2$. □

Teorem 3.4 (Jaka verzija Goldblatt-Thomasonovog teorema)**.**
Neka je $\mathscr{K}$ klasa okvira zatvorena na ultrapotencije. $\mathscr{K}$ je modalno definabilna skupom formula ako i samo ako je zatvorena na disjunktne unije, generirane podokvire i slike pri ograničenim morfizmima te reflektira ultrafiltar-proširenja.

Dokaz. Dokaz dovoljnosti je potpuno isti kao u Goldblatt-Thomasonovom teoremu. Dokaz nužnosti također prepisujemo, ali pažljivije: moramo popraviti argumentaciju gdje god se koristi zatvorenost na ultraprodukte jer tu pretpostavku ovdje nemamo.

Kao prvo, treba pokazati da je, uz oznake iz dokaza teorema 3.2, skup Δ ispunjiv u $\mathscr{K}$. Iz leme 3.3 te zatvorenosti klase $\mathscr{K}$ na disjunktne unije i ultrapotencije slijedi da postoji $\mathfrak{F} \in \mathscr{K}$ takav da je Δ ispunjiv na $\mathfrak{F}$. Stoga je Δ ispunjiv u $\mathscr{K}$.

Još je potrebna sasvim trivijalna preinaka: pred kraj dokaza teorema 3.2 spominjemo da je ultrapotencija $\mathfrak{G}$ u klasi $\mathscr{K}$ zbog zatvorenosti na ultraprodukte. Naravno, dovoljna je zatvorenost od $\mathscr{K}$ na ultrapotencije. □

Zaključak

Ovdje završava naš uvod u definabilnost kroz semantičku priču o poznatom Goldblatt-Thomasonovom teoremu. Drugi pristup bi bio sintaktički i vodio bi na Sahlqvistov teorem korespondencije. Također, valja napomenuti da smo gledali samo osnovni modalni jezik u Kripkeovoj semantici. Uz nju se proučavaju mnoge druge semantike: najistaknutije od njih su semantika općih okvira, algebarska, topološka i okolinska semantika. One su razvijene kako bi se popravila „nepotpunost" Kripkeove semantike. Naime, valjanost na okvirima je pojam drugog reda, pa je teško reći što bi tu bio dokazni postupak.

Unatoč tome, razlog za naše proučavanje Kripkeove semantike jest to što je najvizualnija i najbliža logičarima te daje najzabavniji dokaz Goldblatt-Thomasonovog teorema. Valja spomenuti da je prvi dokaz dao Goldblatt 1974. godine u zajedničkom članku [3] s Thomasonom i to u Kripkeovoj semantici uz slabije pretpostavke (umjesto zatvorenosti na ultrapotencije on uzima zatvorenost na modalnu ekvivalenciju). Thomason je dodao općenitiji rezultat u kojem konstrukcije nisu toliko zanimljive, ali se odnosi na sve klase okvira.

U prošlom se poglavlju, nažalost, nismo uspjeli riješiti nijednog od naša četiri uvjeta, čak ni onoga o reflektiranju ultrafiltar-proširenja koji nas nekako najviše smeta. Prema [11], mogli bismo ispustiti taj uvjet ako smo voljni pristati na to da nam teorem vrijedi samo za klase konačnih tranzitivnih okvira. S pozitivne strane, uspjeli smo dokazati čak i jaku verziju Goldblatt-Thomasonovog teorema. Ipak, moguće je detaljno opisati koji tip modalnih formula definira klasu u toj verziji teorema. Za to bismo trebali izmijeniti jednu pretpostavku: zatvorenost klase na ultrapotencije zamijenimo zatvorenošću na ultrafiltar-proširenja (ne reflektiranje!). Tada iz [4] otkrivamo da se radi o takozvanim *d-perzistentnim formulama*. One su jedan od predmeta proučavanja u vidu semantike općih okvira. Upravo ta semantika predstavlja idući logičan korak u bavljenju definabilnošću. Napomenimo da nismo davali detalje ovog više algebarskog pristupa jer bismo morali ispočetka izgraditi notaciju, definicije i rezultate za novu semantiku kao što smo to učinili za Kripkeovu semantiku.

Opišimo ipak ukratko o čemu se radi. Opći okviri su vrlo slični uobičajenim Kripkeovim okvirima koje smo proučavali u ovom radu, ali sadrže dodatnu informaciju o tome koje su valuacije *dopustive*. Definiraju se $\mathscr{K}$-*perzistentne formule* kao one valjane na zadanoj klasi $\mathscr{K}$ općih okvira bez obzira gledamo li na svaki pojedini okvir kao opći ili obični, odnosno gledamo li samo dopustive valuacije ili sve valuacije. Ako je još svaki opći okvir u toj klasi *deskriptivan* (v. definiciju u [4]), onda govorimo o d-perzistentnim formulama.

Za kraj spomenimo otegotnu okolnost za potencijalnu praktičnost i primjenu takve verzije Goldblatt-Thomasona: može biti vrlo teško odlučiti jesu li za konkretnu klasu okvira zadovoljeni uvjeti teorema, čak i u slučaju kad se radi o elementarnoj klasi. To je razočaravajuća posljedica sljedeće činjenice: očuvanje istinitosti formula prvog reda za ultrafiltar-proširenja je Π^1_1-težak problem, a time skup rečenica prvog reda očuvan za reflektiranje ultrafiltar-proširenja nije rekurzivno prebrojiv (v. dokaz u [7]).

Bibliografija

[1] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema: *Modal logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[2] C. C. Chang, H. J. Keisler: *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[3] R. I. Goldblatt, S. K. Thomason: Axiomatic classes in propositional modal logic, *Algebra and logic* (J. Crossley, ed.), *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 450, str. 163–173, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[4] V. Goranko, M. Otto: Model Theory of Modal Logic, *Handbook of Modal Logic*, vol. 3 (P. Blackburn, J. F. A. K. van Benthem, F. Wolter, eds.), str. 252–321, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[5] T. Jech: *Set Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[6] D. Kiraly: *Modalna logika*, diplomski rad, PMF–MO, Zagreb, 2004.

[7] B. D. ten Cate: *Model theory for extended modal languages*, doktorski rad, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam, 2005.

[8] J. F. A. K. van Benthem: Correspondence Theory, *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 3 (D. M. Gabbay, F. Guenthner, eds.), str. 325–408, Kluwer Academic Publishers, 2001.

[9] J. F. A. K. van Benthem: Canonical Modal Logics and Ultrafilter Extensions, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 44, br. 1, str. 1–8, 1979.

[10] J. F. A. K. van Benthem: Modal Formulas Are Either Elementary or Not $\Sigma\Delta$-Elementary, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 41, br. 2, str. 436–438, 1976.

[11] J. F. A. K. van Benthem: Notes on Modal Definability, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 30, br. 1, str. 20–35, 1989.

[12] M. Vuković: *Matematička logika*, Element, Zagreb, 2009.