# IZBORNO NATJECANJE ZA IMC - ZADACI

24. svibnja 2013.

**Zadatak 1.** Konvergira li niz $\left(\cos^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)\right)_{n\geq 0}$? Ako konvergira, nađite mu limes, u suprotnom dokažite da ne konvergira.

**Zadatak 2.** Neka je $n$ prirodan broj i $a_{1,1}=1$, $a_{1,j}=j$, $a_{i,1}=i$ te $a_{i,j}=a_{i-1,j-1}+ij$, za sve $i,\, j\in\{2,\, 3\ldots,\, n\}$. Neka je $f:\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Z}^n$ funkcija zadana s

$$f\left(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n\right)=\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j,\, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}x_j,\, \ldots,\, \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}x_j\right).$$

Dokažite da je $f$ bijekcija.

**Zadatak 3.** Odredite sve funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ koje su 2013 puta derivabilne i koje zadovoljavaju jednakost

$$\sum_{\substack{I\subseteq\mathbb{N}_{2013}\\ |I|\text{ neparan}}} f\left(\sum_{i\in I} x_i\right)=\sum_{\substack{\emptyset\neq J\subseteq\mathbb{N}_{2013}\\ |J|\text{ paran}}} f\left(\sum_{j\in J} x_j\right),$$

za sve realne brojeve $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{2013}$.

*(**Napomena.** $\mathbb{N}_{2013}$ je oznaka za skup $\{1,\, 2,\, \ldots,\, 2013\}$, a $|I|$ je oznaka za kardinalitet skupa $I$.)*

**Zadatak 4.** *Visina* prirodnog broja $a$ se definira kao broj $\frac{s(a)}{a}$, gdje je $s(a)$ suma svih prirodnih djelitelja broja $a$. Pokažite da, za svaki par prirodnih brojeva $(N,\, k)$, postoji prirodan broj $b$, takav da je visina svakog od brojeva $b,\, b+1,\, \ldots,\, b+k$ veća od $N$.

**Zadatak 5.** Neka je $G$ konačno generirana grupa takva da za svaki $g\in G, g\neq e_G$ postoji konačna grupa $K$ i homomorfizam $\phi\colon G\to K$ takav da je $\phi(g)\neq e_K$. Neka je $\omega\colon G\to G$ surjektivni homomorfizam. Dokažite da je $\omega$ injekcija.

*(**Napomena.** $e_G$ i $e_K$ redom označavaju neutralne elemente u grupama $G$ i $K$.)*

**Zadatak 6.** Neka je $G$ konačna Abelova grupa. Ako $[0,1)$ gledamo kao na grupu uz zbrajanje mod 1, neka je $\hat{G}$ grupa svih homomorfizama $G\to[0,1)$ uz standardno zbrajanje funkcija. Za proizvoljan skup $S\subseteq\hat{G}$ neka je

$$B(S)=\{x\in G:\varphi(x)\in[0,1/2)\text{ za sve }\varphi\in S\}.$$

Ako je grupa $\hat{G}$ konačna, dokažite da za svaki $\Delta\subseteq G$ takav da je $0\in\Delta$, postoji $S\subseteq\hat{G}$ takav da je $|S|\leq 1+\log_2|\Delta|$ i $\Delta\cap B(S)=\{0\}$.

*Matija Bašić, Matija Kazalicki, Vjekoslav Kovač, Ivan Krijan, Rudi Mrazović*