IZBORNO NATJECANJE ZA IMC - ZADACI

06. 06. 2014.

Zadatak 1. Neka su A i B realne kvadratne matrice istog reda takve da je A simetrična i da je $A^3B = BA^3$. Dokažite da je tada $AB = BA$.

Zadatak 2. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija takva da je $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ i $f'(0) = f'(1) = 0$. Dokažite da postoji $x \in [0, 1]$ takav da je $|f''(x)| \geq 4$.

Zadatak 3. Neka je R komutativan prsten s jedinicom i neka je

$$\mathrm{SL}_2(R) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) | a, b, c, d \in R; ad - bc = 1 \right\}.$$

Dokažite da je za svaki prirodan broj N preslikavanje

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) &\to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) &\mapsto \left(\begin{smallmatrix} a \bmod N & b \bmod N \\ c \bmod N & d \bmod N \end{smallmatrix}\right), \end{aligned}$$

surjektivno.

Zadatak 4. Neka je $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijekcija. Za svaki $r \in \mathbb{R}$ neka je

$$T_r = \sum_{q_n < r} \frac{1}{n!}.$$

Dokažite da je skup $\{T_r\colon r \in \mathbb{R}\}$ linearno nezavisan nad $\mathbb{Q}$.

Zadatak 5. Pretpostavimo da je pravokutnik P sa stranicama duljina a i b podijeljen na kvadrate $K_1, \ldots, K_n$ stranica paralelnih stranicama pravokutnika P. Ako je s_i duljina stranice kvadrata K_i, dokažite da je $s_i/a, s_i/b \in \mathbb{Q}$, za svaki $i = 1, \ldots, n$.

Zadatak 6. Za koje parove prirodnih brojeva m i n je polinom $X^m - Y^n$ ireducibilan u $\mathbb{C}[X, Y]$?

Svaki zadatak vrijedi 10 *bodova. Vrijeme pisanja je* 240 *minuta.*