IZBORNO NATJECANJE ZA IMC - RJEŠENJA

05. 07. 2018.

Zadatak 1. Neka je n prirodan broj i A realna $n \times n$ matrica u kojoj je suma elemenata u svakom retku jednaka 2. Odredi sumu svih elemenata matrice A^{2018}.

Rješenje. Neka je $\mathbf{e}$ vektor duljine n čiji je svaki element jednak 1. Primijetimo da je $A\mathbf{e} = 2\mathbf{e}$, stoga je $A^{2018}\mathbf{e} = 2^{2018}\mathbf{e}$. Iz ovog vidimo da je suma elemenata u svakom retku matrice A^{2018} jednaka 2^{2018}. Konačno, suma svih elemenata matrice A^{2018} jednaka je $n \cdot 2^{2018}$. ✓

Zadatak 2. Neka je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ niz pozitivnih brojeva takav da niz

$$(b_N)_{N=1}^{\infty}, \quad b_N := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} a_n$$

konvergira. Dokažite da tada konvergira i niz

$$(c_N)_{N=1}^{\infty}, \quad c_N := \frac{1}{2\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$$

i to prema istom limesu.

Rješenje. Označimo

$$L := \lim_{N\to\infty} b_N.$$

Iz definicije niza $(b_N)_{N=1}^{\infty}$ dobivamo

$$a_n = nb_n - (n-1)b_{n-1},$$

pri čemu možemo staviti npr. $b_0 = 0$. Sada je

$$\frac{1}{2\sqrt{N+1}}\sum_{n=1}^{N+1} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{N+1}}\sum_{n=1}^{N} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) n}_{\beta_n} b_n + \frac{1}{2}b_{N+1}.$$

Označimo li

$$\beta_n := \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) n,$$

preostaje nam dokazati

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N+1}}\sum_{n=1}^{N} \beta_n b_n = L.$$

Racionalizacijom pokažemo da vrijedi

$$\lim_{N\to\infty} \beta_N\sqrt{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{\sqrt{N+1}-\sqrt{N}}{\sqrt{N+1}\sqrt{N}} N\sqrt{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{N\sqrt{N}}{\sqrt{N+1}\sqrt{N}(\sqrt{N+1}+\sqrt{N})} = \frac{1}{2}.$$

Ako to na prste čitamo kao $\beta_N \approx \frac{1}{2\sqrt{N}}$, slutnja nam je da je zadatak dovoljno svesti na dokazivanje sljedeće dvije tvrdnje:

(a) $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{N+1}} \sum\limits_{n=1}^{N} \gamma_n b_n = L,$

(b) $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{N+1}} \sum\limits_{n=1}^{N} (\beta_n - \gamma_n) b_n = 0.$

gdje je $\gamma_n = \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Tvrdnja (a) direktna je posljedica Cesaro-Stolzovog teorema:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{n=1}^{N} \gamma_n b_n = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{N}(\sqrt{N+1}-\sqrt{N})} b_N = \lim_{N\to\infty} \frac{\sqrt{N+1}+\sqrt{N}}{2\sqrt{N}} b_N = L.$$

Za tvrdnju (b), iz dokazane tvrdnje za limes niza $(\beta_n \sqrt{n})_{n=1}^{\infty}$, znamo da za proizvoljan $\varepsilon > 0$ postoji N_0 takav da za sve $N \geq N_0$ vrijedi

$$\left|\beta_N \sqrt{N} - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon, \text{ odnosno } |\beta_N - \gamma_N| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}}.$$

Sumu iz limesa u tvrdnji (b) rastavimo na sumu prvih N_0 pribrojnika i ostatak, te iskoristimo i to da je niz $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ omeđen nekim $M > 0$ (jer je konvergentan):

$$\begin{aligned}
&\limsup_{N\to\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{n=1}^{N} (\beta_n - \gamma_n) b_n \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=1}^{N_0} (\beta_n - \gamma_n) \right| \lim_{N\to\infty} \frac{M}{\sqrt{N+1}} + \lim_{N\to\infty} \frac{M}{\sqrt{N+1}} \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = 0 + 2M\varepsilon,
\end{aligned}$$

gdje smo za prvu sumu iskoristili da ne ovisi o N, a u drugoj ponovno primijenili Cesaro-Stolza:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{N}(\sqrt{N+1}-\sqrt{N})} = ... = 2.$$

Kako je $\varepsilon > 0$ bio proizvoljan, dokazali smo da je limes iz (b) jednak nuli, te je time zadatak gotov. ✓

Zadatak 3. Trnoružica na ploču napiše N prirodnih brojeva. Nakon toga zla vještica baci kletvu na ploču kojom izbriše neki broj, a zatim i sve brojeve koji su relativno prosti s prvim izbrisanim brojem. Trnoružičin cilj je da nakon kletve na ploči ostane barem K brojeva i da su svi preostali brojevi na ploči u parovima relativno prosti. U ovisnosti o prirodnom broju K odredi najmanji prirodni broj N takav da Trnoružica može na početku napisati N prirodnih brojeva s kojima će ostvariti svoj cilj neovisno o vještičinoj kletvi.

Rješenje. Zadatak pretvaramo u zadatak iz teorije grafova. Svaki od N vrhova označavat će jedan od N Trnoružičinih brojeva. Dva vrha grafa spojit ćemo neusmjerenim bridom ako odgovarajući brojevi koji odgovaraju tim vrhovima nisu relativno prosti. Drugačija formulacija zadatka sada glasi ovako: treba konstruirati graf s N vrhova takav da brisanjem bilo kojeg vrha grafa i svih vrhova koji nisu njemu susjedni, ostane barem K vrhova od kojih nikoja dva nisu međusobno povezana bridom.
(Nije baš jasna ekvivalencija zadataka, ali ono što ćemo napraviti je sljedeće: naći ćemo najmanji N_1 u ovisnosti o K za problem iz teorije grafova. Znamo da je on manji ili jednak najmanjem N_2 u problemu iz teorije brojeva, no mi ćemo dokazati i da je jednak.)
Primijetimo dvije trivijalne tvrdnje: svaki vrh treba imati barem K susjednih vrhova (brisanjem tog vrha treba nam ostati barem K vrhova, a ostaju samo oni koji su mu susjedni); ne

smije postojati trokut u grafu (ako su vrhovi A, B, C svi međusobno spojeni bridom, tada brisanjem vrha A ostaju vrhovi B i C koji su međusobno spojeni bridom).
Zadatak iz teorije grafova sada nije teško riješiti: uzmimo bilo koji vrh X_0. On mora imati barem K susjeda, dakle postoje još barem vrhovi $X_1, \ldots, X_K$ koji su susjedi za X_0. Vrh X_1 također mora imati još barem K susjeda. X_0 je jedan od njih, ali niti jedan drugi X_i to ne smije biti jer bismo imali neki trokut. Dakle, zbog toga moramo imati još barem $K-1$ vrhova $Y_1, \ldots, Y_{K-1}$ u našem grafu. Sad smo došli do $N \geq 2K$ vrhova. Dokažimo da je to i dovoljno. Za primjer takvog grafa uzmimo potpuni bipartitni graf s $2 \cdot K$ vrhova, tj. graf s vrhovima $A_1, \ldots, A_K, B_1, \ldots, B_K$ takvi da su između svih vrhova A_i, B_j uspostavljen brid, no između vrhova A_i, A_j niti B_i, B_j nema brida. Lagano je provjeriti da taj graf zadovoljava uvjete zadatka: brisanjem bilo kojeg vrha A_i, ostaju svi vrhovi $B_1, \ldots, B_K$, obratno za brisanje nekog vrha B_i.
Vratimo se sada na problem iz teorije brojeva. Dokazat ćemo da za bilo koji K postoji $N = 2K$ prirodnih brojeva sa svojstvom opisanim u tekstu zadatka. Dokaz iz teorije grafova govori nam da N ne može biti manji od $2K$. Konsturiramo na sljedeći način: svakom bridu grafa pridajemo jedinstveni prosti broj. Kako je bridova u grafu konačno, a prostih brojeva beskonačno mnogo, ovo je jasno moguće. Vrh pridružen broju bit će jednak umnošku svih bridova koji ulaze(=izlaze) iz njega. Sada N brojeva koji su pridani vrhovima grafa čini izbor za Trnoružicu, i zadatak je gotov. ✓

Zadatak 4. U ovisnosti o prirodnom broju n odredi sve parametre $\lambda \in \mathbb{R}$ za koje sljedeći sustav ima rješenje u realnim brojevima:

$$a_0 = a_n = \lambda;\ a_k = 2\lambda - \frac{1}{a_{k-1}},\ k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Rješenje. Raspisujući prvih nekoliko članova izraženih preko λ (u daljem tekstu x), uočavamo pravilnost koju nije teško dokazati indukcijom. Naime:

$$a_k = \frac{P_{k+1}(x)}{P_k(x)},\ \text{gdje je } P_k \text{ rekurzivno zadan niz polinoma: } P_{k+1}(x) = 2xP_k(x) - P_{k-1}(x).$$

Ako za početne uvjete stavimo $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$, dobivamo Čebiševljeve polinome prve vrste. Jedina preostala jednadžba za provjeriti je $a_n = a_0$, što je ekvivalentno s:

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x).$$

Pronađimo prvo sva rješenja jednadžbe $x \in [-1, 1]$. Izrazimo li jednadžbu preko trigonometrijskih formula ($P_k(x) = \cos(k \arccos \varphi)$, uz $\varphi = \arccos x$), dobivamo:

$$\cos(n+1)\varphi = \cos\varphi \cos n\varphi = \frac{1}{2}\left(\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi\right)$$

$$\iff \cos(n+1)\varphi = \cos(n-1)\varphi \iff \sin n\varphi \sin\varphi = 0.$$

Odavde vidimo da su sva rješenja dana s

$$\varphi = \frac{k\pi}{n} \iff \lambda = x = \cos\frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Da bismo vidjeli da su to uistinu i sva rješenja, možemo iskoristiti neki argument brojanja nultočaka polinoma $P_{n+1}(x) - xP_n(x)$, ili možemo iskoristiti formulu za Čebiševljeve polinome za $x \notin [-1, 1]$: $P_n\left(\frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})\right) = \frac{1}{2}\left(t^n + \frac{1}{t^n}\right)$. ✓

Zadatak 5. Potpuni homogeni simetrični polinom stupnja d u varijablama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ definiran je formulom

$$h_d(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_d \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_d}.$$

Tako je npr. $h_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$. Dokažite da za svaki parni prirodni broj d i za svake realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vrijedi $h_d(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge 0$.

Rješenje. Neka su $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ nezavisne slučajne varijable s eksponencijalnom distibucijom parametra 1. To znači da svaka Z_i ima funkciju gustoće $f(x) = e^{-x}$ za $x \ge 0$, $f(x) = 0$ za $x < 0$. Najprije tvrdimo da za svaki $m \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$\mathbb{E} Z_i^m = m!.$$

(Pritom interpretiramo 0^0 kao 1.) To pokazujemo matematičkom indukcijom po m. Kao bazu indukcije možemo uzeti $m = 0$, kada je tvrdnja očigledna: $\mathbb{E} Z_i^0 = \mathbb{E} 1 = 0$. Korak indukcije slijedi parcijalnom integracijom:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} Z_i^m = \int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx &\overset{\text{parc.int.}}{=} \begin{bmatrix} u = x^m & du = m x^{m-1} dx \\ dv = e^{-x} dx & v = -e^{-x} \end{bmatrix} \\
&= (-x^m e^{-x}) \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + m \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x} dx = m \mathbb{E} Z_i^{m-1}.
\end{aligned}$$

Nadalje tvrdimo da vrijedi

$$h_d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{d!} \mathbb{E}(x_1 Z_1 + x_2 Z_2 + \cdots + x_n Z_n)^d$$

pa zadatak očigledno slijedi iz činjenice da je d-ta potencija realnog broja nenegativna. Naime, koristeći multinomni teorem, činjenicu $\mathbb{E}(XY) = (\mathbb{E}X)(\mathbb{E}Y)$ za nezavisne slučajne varijable X i Y te netom dokazanu formulu $\mathbb{E} Z_i^m = m!$, možemo pisati:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{d!} \mathbb{E}(x_1 Z_1 + x_2 Z_2 + \cdots + x_n Z_n)^d \\
&= \frac{1}{d!} \mathbb{E} \sum_{\substack{d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{N}_0 \\ d_1 + d_2 + \cdots + d_n = d}} \frac{d!}{d_1! d_2! \cdots d_n!} (x_1 Z_1)^{d_1} (x_2 Z_2)^{d_2} \cdots (x_n Z_n)^{d_n} \\
&= \sum_{\substack{d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{N}_0 \\ d_1 + d_2 + \cdots + d_n = d}} x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n} \frac{\mathbb{E} Z_1^{d_1}}{d_1!} \frac{\mathbb{E} Z_2^{d_2}}{d_2!} \cdots \frac{\mathbb{E} Z_n^{d_n}}{d_n!} \\
&= \sum_{\substack{d_1, d_2, \ldots, d_n \in \mathbb{N}_0 \\ d_1 + d_2 + \cdots + d_n = d}} x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n} = h_d(x_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Time je dokazana željena jednakost. ✓