IZBORNO NATJECANJE ZA IMC - ZADACI

13. 06. 2019.

Zadatak 1. Zadan je niz nenegativnih realnih brojeva $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \infty$. Dokažite da postoji beskonačna prebrojiva particija $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ od $\mathbb{N}$ takva da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{n\in S_k} a_n = \infty$$

Zadatak 2. Za matricu $A \in M^{n\times n}(\mathbb{Z})$ vrijedi

$$A^2 + A - 2I = J,$$

gdje je J matrica kojoj su svi elementi jednaki 1. Ako je $u = [1, 1, \dots, 1]^t$ svojstveni vektor od A, dokažite da su sve svojstvene vrijednosti od A cjelobrojne.

Zadatak 3. Odredite sve $n \in \mathbb{N}$ takve da za sve realne polinome u n varijabli vrijedi sljedeća tvrdnja: ako je $p(x) > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}^n$, tada p ima minimum na $\mathbb{R}^n$.

Zadatak 4. Za S, proizvoljan podskup od $\mathbb{N}$, dokažite da je barem jedna od sljedećih tvrdnji istinita:

1. Postoje različiti konačni podskupovi F i G od S takvi da je

$$\sum_{n\in F} \frac{1}{n} = \sum_{n\in G} \frac{1}{n}$$

2. Postoji pozitivan racionalan broj $r < 1$ takav da za sve konačne podskupove F od S vrijedi

$$\sum_{n\in F} \frac{1}{n} \neq r$$

Zadatak 5. Dokažite da postoji $A \subset [0, 1]$ tako da za sve polinome stupnja manjeg ili jednakog 2019 vrijedi

$$\int_A p(x)dx = \int_{[0,1]\setminus A} p(x)dx$$

Svaki zadatak vrijedi 10 *bodova. Vrijeme pisanja je* 240 *minuta.*

Neka je λ svojstvena vrijednost od u. $A^2 + A - 2I = J$