Izborno natjecanje za Vojtěch Jarník

27.02.2009.

I. kategorija

1. Neka je n neparan prirodan broj i matrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ takva da je $A^2 = 0$ ili $A^2 = I$. Dokažite da vrijedi

$$\det(A + I) \geq \det(A - I).$$

2. Neka je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ klase C^1 takva da je

$$\lim_{x\to a+} f(x) = +\infty, \lim_{x\to b-} f(x) = -\infty,$$

$$f'(x) + f^2(x) \geq -1, \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

   Dokažite da je $b - a \geq \pi$ i dajte primjer kad je $b - a = \pi$.

3. Neka je $A \subset [0, 1]$ skup. Štef i Joža igraju igru na sljedeći način: Štef odabere beskonačno mnogo znamenki $x_1, x_2, x_3, ...$, a Joža permutaciju tih znamenki $y_1, y_2, y_3, ...$ Štef pobjeđuje ako je broj $0.y_1y_2y_3...$ element skupa A, a inače pobjeđuje Joža.

   Za koje prebrojive zatvorene skupove A Štef ima pobjedničku strategiju?

4. Svake dvije od 200 točaka u prostoru povezane su dužinom. Svaka dužina obojana je jednom od k boja. Pero želi obojati svaku točku jednom od tih boja tako da dužina koja spaja dvije točke nije iste boje kao obje te točke (ako su točke iste boje). Može li to Pero učiniti za $k = 10$?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Vrijeme pisanja je 4 puna sata.

Izborno natjecanje za Vojtěch Jarník

27.02.2009.

II. kategorija

1. Neka su $f, g : [0,1] \to \langle 0, +\infty\rangle$ neprekidne različite funkcije takve da je
$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$
Neka je
$$y_n = \int_0^1 \frac{f^{n+1}(x)}{g^n(x)}dx, n \in \mathbb{N}_0.$$
Pokažite da je $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući i neograničen niz.

2. Dokažite da je za svaki prirodan broj $n \geq 2$ broj matrica 2×2 s elementima iz skupa $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$ koji imaju determinantu oblika $kn + 1$ jednak
$$n^3 \cdot \prod_{p \text{ prost}, p|n} (1 - \frac{1}{p^2}).$$

3. Neka je G konačna grupa i T automorfizam na G koji preslikava više od $3/4$ elemenata od G u njihove inverze. Dokaži da je $T(x) = x^{-1}, \forall x \in G$ i da je G abelova.

4. Neka je $k \leq n/2$ i $\mathcal{F}$ familija $k \times k$ podmatrica $n \times n$ matrice tako da svake dvije matrice iz $\mathcal{F}$ imaju neprazan presjek. Dokažite da je
$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}^2.$$

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Vrijeme pisanja je 4 puna sata.