Izborno natjecanje za Vojtěch Jarnik

08. ožujka 2013, I. kategorija, rješenja

1. Postoji li niz $(x_n)_{n\geq 1}$ pozitivnih realnih brojeva takav da je $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ i da red
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}$$
konvergira?

   Rješenje. Koristeći dobro poznatu ocjenu $e^x \geq x + 1$ dobivamo
$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{x_{n+1}}{x_n} - 1} \geq \prod_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{x_1}.$$
Odavde je očito da ako je $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}$ divergira u $+\infty$ pa niz sa traženim svojstvima ne postoji.

2. Neka je a realan broj takav da je $|a| < 2$. Označimo s $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ matricu kojoj je svaki element dijagonale jednak a, neposredno iznad i ispod dijagonale jednak 1, a svi ostali elementi jednaki 0, npr.
$$A_4 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$
Dokažite da je $\det A_n$ negativan broj za beskonačno mnogo n.

   Rješenje. Neka je $x_n = \det A_n$. Korištenjem Laplaceovog razvoja po prvom stupcu vidimo da vrijedi rekurzija
$$x_0 = 1, \quad x_1 = a, \quad x_n = a x_{n-1} - x_{n-2} \text{ za } n \geq 2.$$
Opće rješenje te rekurzije je $x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ pri čemu su λ_1 i λ_2 rješenja jednadžbe $\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$, a kompleksni brojevi c_1 i c_2 zadovoljavaju početne uvjete $1 = c_1 + c_2$, $a = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2$, tj.
$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm i\sqrt{4 - a^2}}{2}, \quad c_1 = \frac{a - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad c_2 = \frac{a - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$
Brojevi λ_1 i λ_2 su kompleksno konjugirani, pa su i brojevi c_1 i c_2 kompleksno konjugirani. Zato je $x_n = 2 \cdot \mathrm{Re}(c_1\lambda_1)$. Iz Vieteovih jednadžbi slijedi $|\lambda_1|^2 = \lambda_1\lambda_2 = 1$, pa možemo pisati $\lambda_1 = e^{i\alpha}$, $c_1 = Ce^{i\gamma}$ i
$$x_n = 2C \cdot \mathrm{Re}(e^{i(\gamma + n\alpha)}),$$
pri čemu je $C > 0$ realan broj i $0 < \alpha < \pi$.

   Realan broj x_n je negativan ako postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $\frac{\pi}{2} < \gamma + n\alpha - 2k\pi < \frac{3\pi}{2}$.

   Neka je $m \in \mathbb{N}$ i $\gamma + m\alpha = 2k\pi + \beta$ za neki $k \in \mathbb{Z}$ i $\frac{-\pi}{2} \leq \beta < \frac{3\pi}{2}$. Ako je $-\frac{\pi}{2} < \beta \leq \frac{\pi}{2}$, onda zbog $0 < \alpha < \pi$ postoji $n > m$ takav da je $\frac{\pi}{2} < \gamma + n\alpha - 2k\pi < \frac{3\pi}{2}$. Dakle, za svaki $m \in \mathbb{N}$ postoji $n \geq m$ takav da je x_n negativan, pa takvih prirodnih brojeva n ima beskonačno.

3. Dani su skupovi $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \in \mathbb{Z}\}$, $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d_2((x, y), G) \in \mathbb{Z}\}$. Neka je $f\colon A \to B$ proizvoljna neprekidna funkcija. Za dvije točke iz skupa A kažemo da čine *sretan par* ako su centralno simetrične obzirom na ishodište i f ih preslikava u istu točku. Dokažite da postoji barem 2013 sretnih parova.

   Rješenje. Dokazat ćemo da za svaki prirodan broj n na kružnici $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = n\}$ postoji barem jedan sretan par, pa sretnih parova ima beskonačno.

   Budući da je kružnica povezan skup njena slika pri preslikavanju f je čitava sadržana unutar jedne komponente povezanosti skupa B. Nadalje, svaka komponenta povezanosti skupa B je graf realne funkcije, pa za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ postoji točno jedna točka (x_0, y_0) u svakoj komponenti povezanosti od B. Zato f preslikava točke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) s iste kružnice A_n u istu točku ako i samo ako su prve koordinate točaka $f(x_1, y_1)$ i $f(x_2, y_2)$ jednake.

   Neka je $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ projekcija na prvu koordinatu $p(x, y) = x$, te $a\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ antipodalno preslikavanje $a(x, y) = (-x, -y)$. Neka je $g_n\colon A_n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana formulom $g_n(x, y) = p(f(x, y)) - p(f(a(x, y)))$.Budući da su funkcije f, p i a neprekidne slijedi da je funkcija g_n također neprekidna. Zaključujemo da sretan par postoji na kružnici A_n ako i samo ako g_n ima nultočku.

   Ako je $g_n(n, 0) = 0$, onda smo gotovi. Ako je $g_n(n, 0) \neq 0$, onda iz $g_n(-n, 0) = -g_n(n, 0)$ vidimo da g_n poprima i negativnu i pozitivnu vrijednost pa po Bolzano-Weierstrasssovom teoremu g_n mora imati nultočku.

4. Roger igra teniski meč (s malo izmijenjenim pravilima) protiv strašnog protivnika u kojemu prilikom svakog poena jedan od njih servira. Ako servira Roger, vjerojatnost da će osvojiti taj poen jednaka je p_1, a ako servira protivnik vjerojatnost da će Roger osvojiti taj poen jednaka je p_2. Postoje dva moguća pravila o servisima:

   (a) Igrači serviraju naizmjence.

   (b) Igrač servira sve dok ne izgubi poen, a nakon toga servira drugi igrač, i tako dalje.

   U svakom slučaju, Roger servira prvi i prvi igrač koji osvoji n poena je pobjednik. Pokažite da je vjerojatnost da Roger pobijedi neovisna o odabiru pravila o servisima.

   Rješenje. Pretpostavimo da igrači nastavljaju igrati i nakon što se zna pobjednik, te neka je $\Omega = \{0, 1\}^{2n-1} = \{(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_{n-1})\}$ vjerojatnosni prostor koji modelira ishod prvih n Rogerovih servisa i prvih $n - 1$ protivnikovih servisa, dakle $a_i = 1$ ako Roger osvoji svoj i-ti servis, a $b_i = 1$ ako osvoji i-ti protivnikov servis. Uočimo da je neovisno o odabiru pravila o servisima

$$\mathbb{P}\left((a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_{n-1})\right) = p_1^{\sum_{i=1}^n a_i}(1 - p_1)^{n - \sum_{i=1}^n a_i} p_2^{\sum_{i=1}^{n-1} b_i}(1 - p_2)^{n-1-\sum_{i=1}^{n-1} b_i}.$$

   Ključna stvar za uočiti je da je Roger pobjednik ako i samo ako je u prvih n svojih i prvih $n - 1$ protivnikovih servisa, osvojio barem n poena, odnosno da su događaji {Roger je pobjednik} i $\{\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^{n-1} b_i \geq n\}$ jednaki. U slučaju pravila 1 to je očito jer se radi upravo o prvih $2n-1$ servisa u meču. U slučaju pravila 2, u to se lako možemo uvjeriti uočivši da je do trenutka u kojem je Roger osvojio n-ti poen (pobjednički), on upravo n puta servirao. Neke od tih servisa je izgubio, ali je jednak broj njih opet dobio kada je protivnik servirao (i to u prvih $n - 1$ njegovih servisa). Analogno razmišljamo i u slučaju protivnikove pobjede.

   Međutim, događaj $\{\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^{n-1} b_i \geq n\}$ se može rastaviti na disjunktnu uniju događaja za koje smo prethodno izračunali vjerojatnost i komentirali da ona ne ovisi o izboru pravila o servisima, pa je tvrdnja dokazana.

Izborno natjecanje za Vojtěch Jarnik

08. ožujka 2013, II. kategorija, rješenja

1. Neka je $Z = \{z \in \mathbb{C} \colon z^{2^n} \neq 1, \text{za sve } n \geq 1\}$. Za koje $z \in Z$ red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2^{n-1}}}{1 - z^{2^n}}$$

konvergira i prema čemu?

Rješenje. Za promatrani red N-ta parcijalna suma jednaka je

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{z^{2^{n-1}}}{1 - z^{2^n}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\left(z^{2^{n-1}} + 1\right) - 1}{\left(1 - z^{2^{n-1}}\right)\left(1 + z^{2^{n-1}}\right)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{1 - z^{2^{n-1}}} - \frac{1}{1 - z^{2^n}}\right) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1 - z^{2^N}}.$$

Sada je očito da ako je $|z| < 1$ red konvergira prema $\frac{z}{1-z}$. S druge strane, ako je $|z| > 1$ koristeći nejednakost trokuta imamo

$$\left|\frac{1}{1 - z^{2^N}}\right| \leq \frac{1}{|z|^{2^N} - 1},$$

pa u tom slučaju red konvergira prema $\frac{1}{1-z}$.

Konačno, neka je $|z| = 1$, tj. $z = e^{i\theta}$ za neki $\theta \in [0, 2\pi)$. Tada je $z^{-m} - z^m = -2i\sin(m\theta)$, pa je

$$\frac{z^{2^{n-1}}}{1 - z^{2^n}} = \frac{1}{z^{-2^{n-1}} - z^{2^{n-1}}} = \frac{1}{-2i\sin(2^{n-1}\theta)},$$

što je po apsolutnoj vrijednosti veće od $\frac{1}{2}$, pa opći član promatranog reda ne konvergira prema 0. Zaključujemo da red divergira.

2. Neka je G skup, te $\mathbf{M} = (m_{ij})$ matrica dimenzije $n \times n$ sa elementima iz G takva da su u svakom retku i stupcu svi elementi različiti. Ako je $\mathbb{F}$ polje sa više od n elemenata, dokažite da postoji funkcija $f \colon G \to \mathbb{F}$ takva da je

$$\det f(\mathbf{M}) \neq 0,$$

pri čemu je $f(\mathbf{M}) = (f(m_{ij}))_{i,j=1,\ldots,n}$.

Rješenje. Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po n. Za $n = 1$, tvdnja je jednostavna, jedino što je potrebno je funkciju f definirati na način da jedinom elementu matrice $\mathbf{M}$ pridružuje element različit od 0.

Pretpostavimo da je $g \in G$ element matrice $\mathbf{M}$. Determinanta matrice $f(\mathbf{M})$ je polinom u varijabli $f(g)$ stupnja najviše $n < |\mathbb{F}|$. Nadalje, iz Laplaceovog razvoja je vidljivo da je vodeći koeficijent tog polinoma jednak determinanti neke podmatrice od $f(\mathbf{M})$. Po pretpostavci indukcije, f se može definirati na skupu $G \setminus \{g\}$ tako da taj koeficijent nije 0. Ovako dobiveni polinom u $f(g)$ onda nije nul-polinom, pa ima najviše n nultočaka, odakle slijedi da se za $f(g)$ može odabrati element iz $\mathbb{F}$ za koji njegova vrijednost (a time i tražena determinanta) nije jednaka 0.

3. Neka je G konačna grupa koja nije abelova. Dokažite da najviše $5/8$ parova elemenata iz G komutira.

Rješenje. Neka je
$$C = \{(x,y) \in G \times G \colon xy = yx\}.$$
Prije svega, uočimo da je
$$|C| = \sum_{x \in G} |C_x|,$$
pri čemu C_x označava centralizator elementa x. Poznato je (i lako za pokazati) da ako su x i y konjugirani elementi, tada su C_x i C_y konjugirane podgrupe. Nadalje, broj elemenata u klasi konjugiranja elementa x jednak je $[G : C_x]$. Uzevši elemente $x_1, x_2, \ldots, x_k$ kao predstavnike klasa konjugiranja u grupi G, dobivamo

$$|C| = \sum_{i=1}^{k} [G : C_{x_i}] \cdot |C_{x_i}| = k|G|,$$

pa se ostatak zadatka svodi na traženje gornje ograde za k, broj klasa konjugiranja.

Prije svega uočimo da je klasa konjugiranja trivijalna (jednočlana) ako i samo ako je njen jedini element sadržan u Z, centru grupe G. Zato je

$$|G| = |Z| + |K_1| + |K_2| + \cdots + |K_l|,$$

pri čemu $K_1, K_2, \ldots, K_l$ predstavljaju netrivijalne klase konjugiranja, dakle $k = |Z| + l$. Svaka netrivijalna klasa komuniciranja ima bar 2 elementa, pa je

$$l \le \frac{|G| - |Z|}{2}.$$

S druge strane, G nije abelova pa G/Z nije ciklička zbog čega ima bar 4 elementa, tj. $|G|/|Z| \ge 4$. Dobivamo

$$k = |Z| + l \le \frac{|G| + |Z|}{2} \le \frac{5}{8}|G|,$$

odnosno
$$|C| \le \frac{5}{8}|G|^2,$$

što smo i trebali dokazati.

4. Neka je G abelova grupa, E Banachov prostor, te neka je $f \colon G \to E$ funkcija koja je *skoro* aditivna, tj. takva da za neki $\epsilon > 0$ vrijedi

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \le \epsilon, \quad \text{za sve } x, y \in G.$$

Dokažite da postoji aditivna funkcija $h \colon G \to E$ koja je *blizu* funkcije f, tj. takva je da vrijedi
$$h(x) + h(y) = h(x+y), \quad \text{za sve } x, y \in G,$$
i
$$\|f(x) - h(x)\| \le \epsilon, \quad \text{za sve } x \in G.$$

Rješenje. Ideja je da definiramo niz funkcija $h_n\colon G \to E$ koje su *sve bliže i bliže* tome da budu aditivne (u smislu gornje ograde za odstupanje od aditivne jednakosti), a pritom ostaju *blizu* funkcije f.

Preciznije, induktivno ćemo definirati funkcije $h_n\colon G \to E$ tako da je $h_0 = f$,

$$\|h_n(x+y) - h_n(x) - h_n(y)\| \le \frac{\epsilon}{2^n}, \quad \text{za sve } x, y \in G,$$

i

$$\|h_n(x) - h_{n-1}(x)\| \le \frac{\epsilon}{2^n}, \quad \text{za sve } x \in G.$$

Slučaj $n = 0$ vrijedi zbog danog uvjeta za funkciju f. Pretpostavimo da smo definirali funkciju h_n sa traženim svojstvima za neki $n \ge 0$, te definiramo $h_{n+1}(x) = h_n(2x)/2$. Tada je

$$\|h_{n+1}(x+y) - h_{n+1}(x) - h_{n+1}(y)\| = \frac{1}{2}\,\|h_n(2x+2y) - h_n(2x) - h_n(2y)\| \le \frac{\epsilon}{2^{n+1}},$$

pri čemu zadnja nejednakost slijedi iz pretpostavke indukcije. Također,

$$\|h_{n+1}(x) - h_n(x)\| = \left\|\frac{1}{2}h_n(2x) - h_n(x)\right\| = \frac{1}{2}\,\|h_n(2x) - 2h_n(x)\| \le \frac{\epsilon}{2^{n+1}},$$

pri čemu zadnja nejednakost opet slijedi iz pretpostavke indukcije.

Uočimo da je za proizvoljni $x \in G$ i $n > m$

$$\|h_n(x) - h_m(x)\| \le \sum_{k=m}^{n-1} \|h_{k+1}(x) - h_k(x)\| \le \sum_{k=m}^{n-1} \frac{\epsilon}{2^{k+1}} < \frac{\epsilon}{2^m}.$$

Odavde slijedi da je niz $(h_n(x))_{n\ge 0}$ Cauchyjev pa zbog potpunosti prostora E možemo definirati

$$h(x) := \lim_{n\to\infty} h_n(x).$$

Uočimo da uz $m = 0$ iz prethodne nejednakost također zaključujemo da je

$$\|h_n(x) - f(x)\| < \epsilon.$$

Iz ove nejednakosti te iz

$$\|h_n(x+y) - h_n(x) - h_n(y)\| \le \frac{\epsilon}{2^n},$$

puštanjem $n \to \infty$, te korištenjem neprekidnosti norme dobivamo da funkcija h zadovoljava tražena svojstva.

M. Bašić, M. Kazalicki, V. Kovač, R. Mrazović