IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - ZADACI
JUNIORI
15. 03. 2017.

Zadatak 1. Neka je n prirodni broj i neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prirodni brojevi djeljivi s 2017 i strogo manji od 3^n. Za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ neka je

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} 3^{j-1}$$

(jedinstveni) ternarni zapis broja a_i. Dokažite da je determinanta matrice $A = (x_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ također djeljiva s 2017.

Zadatak 2. Neka su $(a_{i,n})_{i,n\in\mathbb{N}}$ i a realni brojevi takvi da je

$$\text{(a)} \lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le n} |a_{i,n}| = 0, \qquad \text{(b)} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} = a, \qquad \text{(c)} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,n}| < \infty.$$

1. Dokažite da je $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{i=1}^{n} (1 + a_{i,n}) = e^a$.
2. Vrijedi li nužno ista tvrdnja bez uvjeta (c)?

Zadatak 3. Dan je neusmjeren jednostavan (i netežinski) graf Γ s vrhovima $v_1, \ldots, v_n$. Njemu pridružujemo kvadratnu matricu $\mathbf{A}_\Gamma \in \mathbb{M}_n$ a sljedeći način:

$$A_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i) & : i = j \\ -1 & : i \neq j \text{ i postoji brid između } i \text{ i } j \\ 0 & : i \neq j \text{ i ne postoji brid između } i \text{ i } j \end{cases}$$

Dokažite:

a) Defekt matrice $\mathbf{A}_\Gamma$ jednak je broju komponenata povezanosti grafa Γ.

b) Neka je Γ povezan, a $\mathbf{B}_\Gamma$ dobivena tako da je svakom elementu matrice $\mathbf{A}_\Gamma$ dodana jedna jedinica. Dokaži da je matrica $\mathbf{B}_\Gamma$ regularna.

(Ako student ne pokaže a) dio, smije u b) dijelu iskoristiti da graf ima defekt jednak 1.*)*

Zadatak 4. *Pakiranje* kocke $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ je svaki skup $P \subseteq Q$ koji je unija kugala jediničnog polumjera s međusobno disjunktnim nutrinama. Za $n \in \mathbb{N}$ i $r > 0$ označimo sa $V_n(r)$ supremum skupa volumena svih pakiranja kocke $[0, r]^n$. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $\lim\limits_{r\to\infty} V_n(r)/r^n$.

Svaki zadatak vrijedi 10 *bodova. Vrijeme pisanja je* 240 *minuta.*

IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - ZADACI

SENIORI

15. 03. 2017.

Zadatak 1. Neka je R prsten takav da za svaki $a \in R$ vrijedi $a^2 = a$. Dokažite da je R komutativan.

Zadatak 2. Izračunajte $\lim_{n\to\infty} n \sin(n! \cdot 2\pi e)$.

Zadatak 3. Prirodan broj k nazvat ćemo *šarenim* ako postoji prirodan broj n takav da k dijeli sve brojeve

$$\binom{n}{1}, \quad \binom{n}{2}, \quad \ldots, \quad \binom{n}{n-1}.$$

Nađite sve šarene brojeve.

Zadatak 4. Neka je n prirodan broj i A realna $n \times n$ matrica. Dokažite da postoji realni ne-nul polinom P, u n varijabli, takav da je

$$P(Ax) = \det A \cdot P(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Svaki zadatak vrijedi 10 *bodova. Vrijeme pisanja je* 240 *minuta.*