IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - RJEŠENJA

JUNIORI

15. 03. 2017.

Zadatak 1. Neka je n prirodni broj i neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ prirodni brojevi djeljivi s 2017 i strogo manji od 3^n. Za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ neka je

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} 3^{j-1}$$

(jedinstveni) ternarni zapis broja a_i. Dokaži da je determinanta matrice $A = (x_{i,j})_{i,j=1}^n$ također djeljiva s 2017.

Rješenje. Kako su svi brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ djeljivi s 2017, postoje prirodni $b_1, b_2, \ldots, b_n$ takvi da je $a_i = 2017 b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Na matrici A ćemo napraviti sljedeću transformaciju: za sve $j = 2, \ldots, n$ ćemo j-ti stupac matrice pomnožiti s 3^{j-1} i dodati prvom stupcu. Tom transformacijom ne mijenja se determinanta matrice:

$$\det A = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,1} & \cdots & x_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ a_2 & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & x_{n,1} & \cdots & x_{n,n} \end{vmatrix} = 2017 \begin{vmatrix} b_1 & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ b_2 & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & x_{n,1} & \cdots & x_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Zadnja matrica ima elemente koji su cijeli brojevi pa je i determinanta cjelobrojna, čime je dokaz gotov. ✓

Napomena. Iz dokaza se vidi kako su baza 3 i broj 2017 u ovom zadatku proizvoljno odabrani.

Zadatak 2. Neka su $(a_{i,n})_{i,n\in\mathbb{N}}$ i a realni brojevi takvi da je

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le n} |a_{i,n}| = 0, \qquad \text{(b)}\ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} = a, \qquad \text{(c)}\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,n}| < \infty.$$

1. Dokaži da je $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{i=1}^{n} (1 + a_{i,n}) = e^a$.
2. Vrijedi li nužno ista tvrdnja bez uvjeta (c)?

Rješenje.

1. Logaritmiranjem dobivamo tvrdnju ekvivalentnu traženoj

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + a_{i,n}) = a.$$

Promotrimo izraz $\sum_{i=1}^{n} a_{i,n} \frac{\ln(1+a_{i,n})}{a_{i,n}}$. Želimo dokazati da ta suma teži u a, a kako zbog (b) znamo da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} = a$ dovoljno je pokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} \frac{\ln(1 + a_{i,n})}{a_{i,n}} - \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} = 0.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Budući da je $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $|x| < \delta$ vrijedi $\left|\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right| < \varepsilon$. Budući da je zbog (a) $\lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le n} |a_{i,n}| = 0$ postoji $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ takav da je za svaki $n \ge N$, $\max_{1\le i\le n} |a_{i,n}| < \delta$. Onda je posebno za svaki $n \ge N$ i za svaki $1 \le i \le n$, $|a_{i,n}| < \delta$, a iz toga sljedi da je za svaki $n \ge N$ i za svaki $1 \le i \le n$, $\left|\frac{\ln(1+a_{i,n})}{a_{i,n}} - 1\right| < \varepsilon$. Neka je $n \ge N$, tada vrijedi

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_{i,n} \frac{\ln(1+a_{i,n})}{a_{i,n}} - \sum_{i=1}^{n} a_{i,n}\right| \le \sum_{i=1}^{n} |a_{i,n}| \left|\frac{\ln(1+a_{i,n})}{a_{i,n}} - 1\right| < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} |a_{i,n}| < \varepsilon \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,n}|.$$

Budući da je zbog (c) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,n}| < \infty$, a ε proizvoljan dobivamo traženu tvrdnju.

2. Promotrimo niz $a_{i,n} = \frac{(-1)^i}{\sqrt{n}}$. Za njega vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le n} |a_{i,n}| = \lim_{n\to\infty} \max_{1\le i\le n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} 0 & : n \text{ paran} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & : n \text{ neparan} \end{cases} = 0,$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,n}| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{n}{\sqrt{n}} = \infty.$$

Promotrimo čemu je za ovaj niz jednako $\prod_{i=1}^{n} (1 + a_{i,n})$ i to samo u slučaju podniza, kada je n paran.

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + a_{i,n}) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \frac{(-1)^i}{\sqrt{n}}) = \left(\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \to \frac{1}{\sqrt{e}} \ne e^0.$$

Iz ovoga zaključujemo da ista tvrdnja ne vrijedi nužno bez uvjeta (c) ✓

Zadatak 3. Dan je neusmjeren jednostavan (i netežinski) graf Γ s vrhovima $v_1, \dots, v_n$. Njemu pridružujemo kvadratnu matricu $\mathbf{A}_\Gamma \in \mathbb{M}_n$ a sljedeći način:

$$A_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i) & : i = j \\ -1 & : i \ne j \text{ i postoji brid između } i \text{ i } j \\ 0 & : i \ne j \text{ i ne postoji brid između } i \text{ i } j \end{cases}$$

Dokažite:

a) Defekt matrice $\mathbf{A}_\Gamma$ jednak je broju komponenata povezanosti grafa Γ.

b) Neka je Γ povezan, a $\mathbf{B}_\Gamma$ dobivena tako da je svakom elementu matrice $\mathbf{A}_\Gamma$ dodana jedna jedinica. Dokaži da je matrica $\mathbf{B}_\Gamma$ regularna.

(Ako student ne pokaže a) dio, smije u b) dijelu iskoristiti da graf ima defekt jednak 1.)

Rješenje. Prva napomena: umjesto $\mathbf{A}_\Gamma$ i $\mathbf{B}_\Gamma$ kraće pišemo $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ redom.

Riješimo prvo *a)* dio. Dokažimo prvo tvrdnju za povezan graf. Dakle, trebamo pokazati da je dimenzija jezgre od $\mathbf{A}$ jednaka 1. Iz načina stvaranja matrice, jasno je da je vektor $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^T$ u jezgri od $\mathbf{A}$: jednostavno kombinatorno prebrojavanje nam daje da je suma svakog retka (ali i stupca, matrica je simetrična) jednaka 0. Dokažimo da su svi ostali vektori jezgre paralelni s njime.

Neka je $\mathbf{x} \neq 0$ neki vektor takav da je $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Neka je $\alpha \in \{1, \ldots, n\}$ indeks takav da je $x_\alpha = \max_i\{x_i\}$. Pogledajmo α-ti red sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$:

$$\deg(v_\alpha)x_\alpha = \sum_{\beta \,:\, v_\beta \leftrightarrow v_\alpha} x_\beta.$$

Kako je x_α maksimalni element, imamo da je svaki sumand na desnoj strani manji ili jednak od x_α, i tih sumanada ima upravo $\deg(v_\alpha)$. Dakle, zapravo vrijedi

$$\deg(v_\alpha)x_\alpha \geq \sum_{\beta \,:\, v_\beta \leftrightarrow v_\alpha} x_\beta.$$

Od malo prije znamo da u gornjoj nejednakosti vrijedi jednakost. To je moguće ako i samo ako vrijede sve jednakosti $x_\beta = x_\alpha$. Dakle, pokazali smo sljedeće:

$$x_\alpha = \max_i\{x_i\} \text{ i } v_\beta \leftrightarrow v_\alpha \implies x_\beta = x_\alpha. \tag{1}$$

Sad ovaj zaključak ponavljamo: ako je neki element x_α, tada su svi njegovi susjedi x_β (susjedi u smislu grafa Γ) maksimalni elementi, pa tada primjenom zaključka za svaki taj element x_β zaključujemo da su i njihovi susjedi maksimalni elementi. Kako je graf povezan, sve ćemo vrhove posjetiti. Dakle, svi elementi su maksimalni, a to znači i jednaki:

$$x_1 = \cdots = x_\alpha = \cdots = x_n \implies \mathbf{x} = x_\alpha\mathbf{e} \implies \mathbf{x}||\mathbf{e},$$

što je i trebalo pokazati.

Pogledajmo sad primjer nepovezanog grafa. Neka ima k komponenata povezanosti. BSO postoje $n_1, n_2, \ldots n_{k-1}$ takvi da su vrhovi $v_1, \ldots, v_{n_1}$ u prvoj komponenti, $v_{n_1+1}, \ldots, v_{n_2}$ u drugoj komponenti, ..., $v_{n_{k-1}+1}, \ldots, v_n$ u zadnjoj komponenti. Ako nije tako, to se može postići drugačijom numeracijom vrhova i primjenom matrica permutacije s lijeva i zdesna na $\mathbf{A}$. Kako su one regularne, i kako množenje regularnom matricom ne mijenja rang (pa i defekt), proces je valjan.

Sada je matrica $\mathbf{A}$ blok dijagonalna. Za svaki od tih blokova znamo da se vektor $\tilde{\mathbf{e}}_i$ nalazi u njihovoj jezgri, gdje taj vektor ima svugdje nule, osim na mjestima $n_{i-1}+1, \ldots, n_i$, gdje su jedinice. Također, slično rezoniranje kao za povezan graf, zaključujemo da svaki vektor u jezgri mora biti linearna kombinacija vektora $\tilde{\mathbf{e}}_i$. Jasno je da su ti vektori linearno nezavisni i da ih ima k, pa je *a*) dio gotov.

Dokažimo sada *b*) dio. Prema *a*), matrica $\mathbf{A}$ ima rang $n-1$. Dapače, znamo i više. Neka su $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ stupci matrice $\mathbf{A}$. Kako je $\mathbf{e}$ jedini element baze jezgre simetrične matrice $\mathbf{A}$, znamo sljedeće:

$$\sum_i \mu_i \mathbf{w}_i = 0 \implies \mathbf{Am} = 0 \implies \mu_1 = \cdots = \mu_n,$$

gdje je $\mathbf{m} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T$.

Dokažimo da su stupci $\mathbf{w}_1 + \mathbf{e}, \ldots, \mathbf{w}_n + \mathbf{e}$ linearno nezavisni. Pretpostavimo suprotno, $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $|\lambda_1| + \ldots + |\lambda_n| \neq 0$ takvi da

$$\sum_i \lambda_i(\mathbf{w}_i + \mathbf{e}) = 0.$$

Uređivanjem, i uvođenjem $L = \sum_i \lambda_i$ imamo

$$\sum_i \lambda_i \mathbf{w}_i = -L\mathbf{e}. \tag{2}$$

Ovo je zapravo linearan sustav jednadžbi: matrica sustava čine vektori w_i, dakle matrica sustava je $\mathbf{A}$. Nepoznanica je $\mathbf{y} := (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$, vektor desne strane je $-L\mathbf{e}$. Dakle

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = -L\mathbf{e}.$$

Zbrojimo sve jednakosti koje imamo. Kako je za svaki redak, već puno ponavljano, suma svih elemenata u retku jednaka nuli dobijemo

$$0 = -Ln. \implies L = 0.$$

Kada to vratimo u (2), imamo

$$\sum_i \lambda_i \mathbf{w}_i = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n.$$

Zadnja dva zaključka zajedno daju da je nužno svaki λ_i jednak nuli, dakle $\mathbf{B}$ je regularna.

Napomena. Jednadžbu 2 mogli smo samo skalarno pomnožiti s $\mathbf{e}$.
Zadatak se može poopćiti i na težinski graf, ukoliko su te težine pozitivne (ako nisu, ne možemo zaključivati jednakost kod nejednakosti i dobiti (1)).

Zadatak 4. *Pakiranje* kocke $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ je svaki skup $P \subseteq Q$ koji je unija kugala jediničnog polumjera s međusobno disjunktnim nutrinama. Za $n \in \mathbb{N}$ i $r > 0$ označimo sa $V_n(r)$ supremum skupa volumena svih pakiranja kocke $[0, r]^n$. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $\lim_{r\to\infty} V_n(r)/r^n$.

Rješenje. Označimo:

$$M := \sup_{r>0} \frac{V_n(r)}{r^n} \in \langle 0, 1].$$

Za svaki ε takav da je $0 < \varepsilon < M$ postoji $r_\varepsilon > 0$ takav da je $V_n(r_\varepsilon) > (M - \varepsilon)r_\varepsilon^n$, a potom i pakiranje P_ε od $[0, r_\varepsilon]^n$ volumena većeg od $(M - \varepsilon)r_\varepsilon^n$. Za bilo koji $k \in \mathbb{N}$ kocku $[0, kr_\varepsilon]^n$ možemo podijeliti na k^n kongruentnih manjih kocaka. Svaku od njih možemo pakirati translatom od P_ε te unija svih tih pakiranja daje pakiranje od $[0, kr_\varepsilon]^n$ volumena većeg od $(M - \varepsilon)k^n r_\varepsilon^n$. Funkcija $r \mapsto V_n(r)$ je svakako neopadajuća pa za bilo koji $r > 0$ uz oznaku $k = \lfloor r/r_\varepsilon \rfloor$ sada imamo

$$\frac{V_n(r)}{r^n} \ge \frac{V_n(kr_\varepsilon)}{(k+1)^n r_\varepsilon^n} > \frac{(M-\varepsilon)k^n r_\varepsilon^n}{(k+1)^n r_\varepsilon^n} = (M-\varepsilon)\Big(1 - \frac{1}{k+1}\Big)^n.$$

Ako je $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ dovoljno velik da vrijedi $\Big(1 - \frac{1}{k_\varepsilon+1}\Big)^n \ge \frac{M-2\varepsilon}{M-\varepsilon}$, tada za svaki $r \ge k_\varepsilon r_\varepsilon$ imamo

$$M - 2\varepsilon \le \frac{V_n(r)}{r^n} \le M.$$

Dakle, traženi limes postoji i zapravo je jednak M. ✓

Napomena. Izvor zadatka: *Tricki*, http://www.tricki.org, članak: *Use self-similarity to get a limit from an inferior or superior limit.* Kao što je tamo pokazano, tvrdnja (uz isti dokaz) vrijedi i za pakiranja izometričkim kopijama nekog kompaktnog skupa s rubom mjere nula (umjesto kuglama).

IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - RJEŠENJA

SENIORI

15. 03. 2017.

Zadatak 1. Neka je R prsten takav da za svaki $a \in R$ vrijedi $a^2 = a$. Dokaži da je R komutativan.

Rješenje. Dokažimo najprije da za svaki izbor $a, b \in R$ vrijedi $ab = -ba$.
Iz $(a+b)^2 = a+b$ slijedi

$$a^2 + ab + ba + b^2 = a + b \quad \Rightarrow \quad a + ab + ba + b = a + b \quad \Rightarrow \quad ab + ba = 0,$$

to jest $ab = -ba$.
Sada preostaje uočiti da za svaki element $x \in R$ vrijedi $x = x^2 = (-x)^2 = -x$.
Posebno, vrijedi i $-ba = ba$, dakle $ab = ba$, što je trebalo pokazati. ✓

Zadatak 2. Izračunaj $\lim\limits_{n\to\infty} n \sin(n! \cdot 2\pi e)$.

Rješenje. Neka je

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Znamo da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e.$$

Stavimo $r_n = e - a_n$. Prvo pokažimo da je $\frac{1}{n+1} < n! \cdot r_n < \frac{1}{n}$. Lijeva strana nejednakosti je očita iz definicije od r_n. Imamo

$$a_{n+m} - a_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(n+k)!} < \frac{1}{(n+1)!} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(n+2)^k} \right) < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}}.$$

Puštanjem $m \to \infty$ i korištenjem činjenice da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e$$

dobivamo $r_n = e - a_n < \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}$, a množenjem s $n!$ konačno i $n! r_n < \frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$. Iz pokazanog imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot n! r_n = 1.$$

Konačno:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin(2\pi n! e) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \sin(2\pi n! r_n) = \lim_{n\to\infty} n \cdot 2\pi n! r_n \frac{\sin(2\pi n! r_n)}{2\pi n! r_n} = 2\pi,$$

gdje smo u prvoj jednakosti koristili da je $e = r_n + a_n$, $n! a_n \in \mathbb{Z}$ i da je funkcija $\sin(x)$ periodična s periodom 2π, a u posljednjoj jednakosti činjenicu da je

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot n! r_n = 1.$$

✓

Zadatak 3. Prirodan broj k nazvat ćemo *šarenim* ako postoji prirodan broj n takav da k dijeli sve brojeve

$$\binom{n}{1}, \quad \binom{n}{2}, \quad \dots, \quad \binom{n}{n-1}.$$

Nađi sve šarene brojeve.

Rješenje. Dokazat ćemo da su svi šareni brojevi 1 (što je očito jer jedan dijeli sve brojeve) i prosti brojevi. Zaista, za sve proste p izraz $\binom{p}{k}$, gdje je $0 < k < p$, sastoji se od brojnika koji jest djeljiv s p te nazivnika koji nije.
Dokažimo prije glavnog dijela dokaza dvije pomoćne tvrdnje.

Tvrdnja 1: Neka je $\alpha > 1$ prirodan broj relativno prost s p. Tada $\binom{\alpha p^\beta}{p^\beta}$ nije djeljivo s p.
U dokazu koristimo formulu za najveću potenciju prostog broja koja dijeli $n!$:

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

($\nu_p(m)$ je najveći nenegativan cijeli broj k takav da $p^k \mid m$). Ovdje imamo

$$\nu_p\left(\binom{\alpha p^\beta}{p^\beta}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{\alpha p^\beta}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(\alpha-1)p^\beta}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{p^\beta}{p^k} \right\rfloor \right).$$

Sada možemo vidjeti kako je svaka zagrada u sumi jednaka nuli: za $k \leq \beta$ imamo najveće cijele dijelove od cijelih brojeva, a za $k > \beta$ imamo da je $\left\lfloor \frac{\alpha p^\beta}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(\alpha-1)p^\beta}{p^k} \right\rfloor$ (jer uzimamo kvocijent dva uzastopna broja s $p^{k-\beta}$, kako veći od njih nije djeljiv s $p^{k-\beta}$, rezultat pri cjelobrojnom dijeljenju je jednak) te $\left\lfloor \frac{p^\beta}{p^k} \right\rfloor = 0$ (jer je broj manji od 1).

Tvrdnja 2: Broj $\binom{p^\beta}{p^{\beta-1}}$ nije djeljiv s p^2.
U dokazu opet koristimo istu formulu. Promatramo sumu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{p^\beta}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(p-1)p^{\beta-1}}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{p^{\beta-1}}{p^k} \right\rfloor \right)$$

i dokazujemo da je jednaka 1. Za $k < \beta$ uzimamo najveće cijele dijelove od cijelih brojeva. Za $k > \beta$ svako najveće cijelo iznosi 0. Jedino za $k = \beta$ sumiramo zagradu oblika $(1 - 0 - 0)$, odakle vidimo konačno da je traženi broj djeljiv s p, ali ne i p^2.

Dokažimo sada ostatak zadatka. Neka je k neki šareni broj, a n odgovarajući broj iz teksta zadatka. Iz uvjeta zadatka vidimo $k \mid \binom{n}{1} = n$. Pretpostavimo da k ima više od jednog prostog faktora. Tada više od jednog prostog faktora ima i n, pa ga možemo zapisati u formatu $n = \alpha p^\beta$, $p \mid k$, $\alpha > 1$ i $p \nmid \alpha$. Tada prema Tvrdnji 1 $\binom{\alpha p^\beta}{p^\beta}$ nije djeljivo s p, pa ne može biti djeljivo niti s k.
Pretpostavimo sada da je k barem druga potencija prostog broja: $k = p^\gamma$. Slično kao gore, n je također djeljiv s p^γ, ali nije djeljiv ni sa kojim drugim prostim brojem (jer opet možemo primijeniti Tvrdnju 1), dakle oblika je $n = p^\beta$. Tada prema Tvrdnji 2 $\binom{p^\beta}{p^{\beta-1}}$ nije djeljiv s p^2, pa niti s k, čime je dokaz gotov. ✓

Zadatak 4. Neka je n prirodan broj i A realna $n \times n$ matrica. Dokaži da postoji realni ne-nul polinom P, u n varijabli, takav da je

$$P(Ax) = \det A \cdot P(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Rješenje. Neka su $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sve realne i $\beta_1, \overline{\beta_1}, \beta_2, \overline{\beta_2}, \dots, \beta_k, \overline{\beta_k}$ sve kompleksne svojstvene vrijednosti matrice A^t $(m + 2k = n)$. Tada vrijedi

$$\det A = \det A^t = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \beta_1 \overline{\beta_1} \dots \beta_k \overline{\beta_k}.$$

Neka su $a_1, a_2, \dots, a_m$ pripadajući realni, a $b_1, b_2, \dots, b_k$ pripadajući kompleksni svojstveni vektori matrice A^t. Promotrimo funkcije

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^t a_i \quad \text{i} \quad x \mapsto (x^t b_j) \cdot (x^t \overline{b_j}).$$

Očito se radi o realnim ne-nul polinomima u n varijabli, za sve $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, k$. Tada je i

$$P(x) = \prod_{i=1}^{m} (x^t a_i) \prod_{j=1}^{k} (x^t b_j) \cdot (x^t \overline{b_j})$$

realni ne-nul polinom u n varijabli. Tvrdimo da je to traženi polinom.

$$\begin{aligned} P(Ax) &= \prod_{i=1}^{m} (x^t A^t a_i) \prod_{j=1}^{k} (x^t A^t b_j) \cdot (x^t A^t \overline{b_j}) \\ &= \prod_{i=1}^{m} (x^t \alpha_i a_i) \prod_{j=1}^{k} (x^t \beta_j b_j) \cdot (x^t \overline{\beta_j b_j}) \\ &= \det A \cdot P(x). \end{aligned}$$

Ovime smo dokaz priveli kraju. ✓